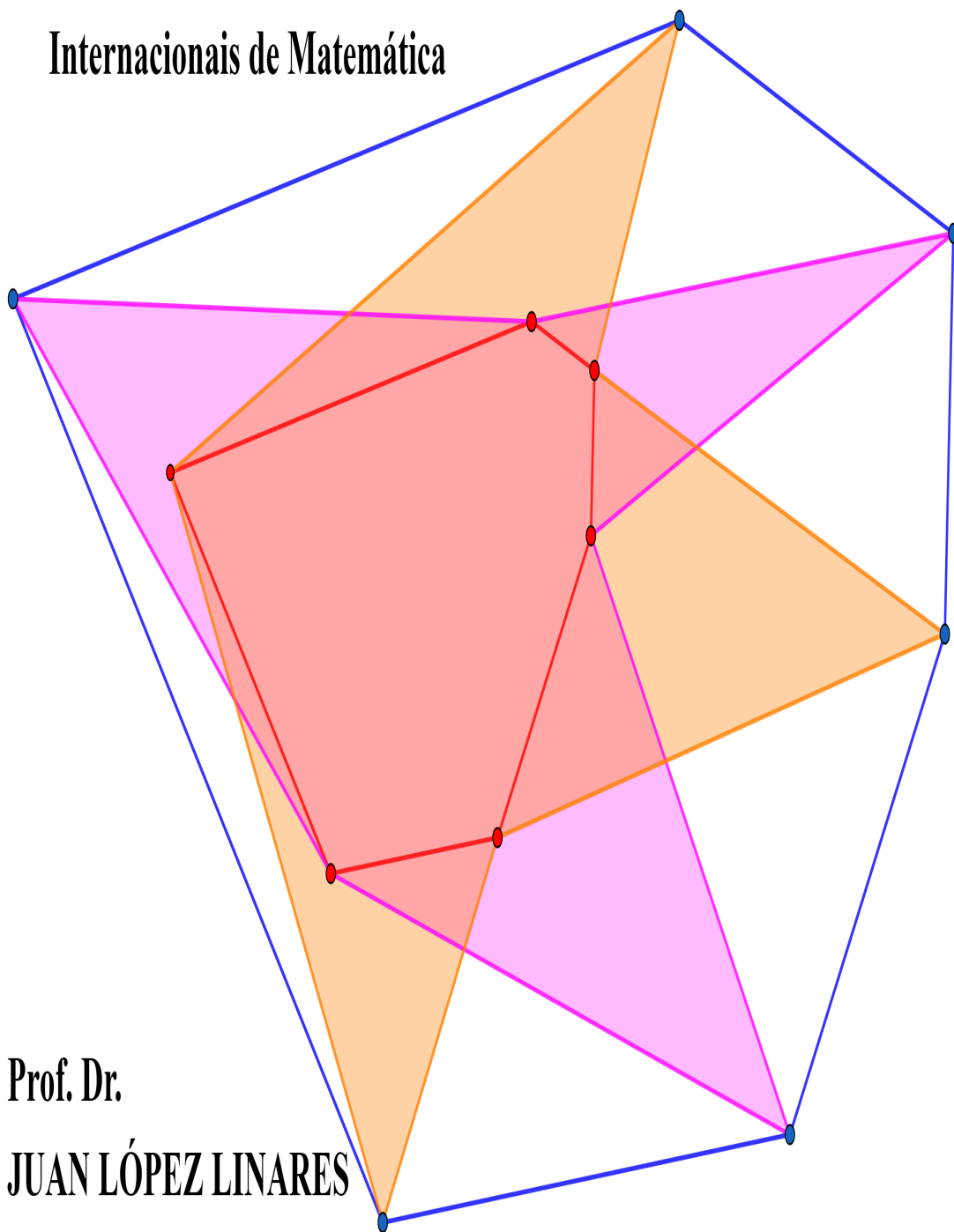


Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática



**Prof. Dr.
JUAN LÓPEZ LINARES**

JUAN LÓPEZ LINARES

**Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas
Internacionais de Matemática**

DOI: 10.11606/9786587023106

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2020

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Vahan Agopyan

Vice-Reitor: Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225 - Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretora: Profa. Dra. Elisabete Maria Macedo Viegas

Vice-Diretor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo

L864g	López Linares, Juan Geometria: soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática / Juan López Linares. -- Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 82 p. ISBN 978-65-87023-10-6 (e-book) DOI: 10.11606/9786587023106 1. Olimpíadas Internacionais de Matemática. 2. Ensino Médio. 3. Ensino universitário. 4. Geometria Plana Euclidiana. 5. Problemas resolvidos. I. Título.
-------	---

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Está autorizada a reprodução parcial ou total desta obra desde que citada a fonte. Proibido uso com fins comerciais.

Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (DM-UFSCar), pela revisão detalhada e valiosos comentários críticos em alguns problemas.

Agradeço ao Prof. Alexys Bruno Alfonso, da Faculdade de Ciências de Bauru, UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Departamento de Matemática, pelas discussões relativas a vários problemas, seus comentários críticos e sugestões e a ajuda no uso do LATEX.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e o curso de Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino e resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respectivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019.

Título Curto

Vinte Desafios de Geometria Plana Euclidiana

Título Longo

Geometria: Soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática

Resumo

Este livro faz parte de um projeto de longo prazo de incentivo a participação em Olimpíadas de Matemáticas. São apresentados 20 problemas de Geometria Plana Euclidiana. O texto conta com 37 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Muitos dos desafios tem como complemento gráficos interativos no site do Geogebra e vídeos no YouTube. Trigonometria, Teorema e Desigualdade de Ptolomeu, Potência de um ponto e Eixo Radical, Congruência e Semelhança de triângulos e cálculo de área são discutidos. Tipicamente cada questão usa conhecimentos ligados a mais de uma ramo da Matemática. Em várias seções apresentamos primeiro uma introdução aos conhecimentos chaves. Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas neste texto usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Palavras Chaves: Olimpíadas Internacionais de Matemática, Ensino Médio, Ensino Universitário, Geometria Plana Euclidiana, Problemas Resolvidos

Short Title

Twenty Euclidean Plane Geometry Challenges

Long Title

Geometry: Detailed solutions to 20 problems in International Mathematical Olympiads

Abstract

This book is part of a long-term project to encourage participation in Mathematics Olympics. 20 Euclidean Plane Geometry problems are presented. The text has 37 pictures that make it easy to follow the resolution. Many of the challenges are complemented by interactive graphics on the Geogebra website and videos on YouTube. Trigonometry, Ptolemy's Theorem and Inequality, Power of a point and Radical Axis, Congruence and Similarity of triangles and area calculation are discussed. Typically each question uses knowledge linked to more than one branch of mathematics. In several sections, we first present an introduction to key knowledge. Our presentation aims that the material can actually be read and studied by Portuguese (and perhaps Spanish) students who are preparing for the final stages of the national or international Olympics. We also hope that this approach will support high school teachers who venture into more advanced topics. In comparison with other available solutions, those presented in this text use less elaborate arguments and a smaller number of transitions to be completed by the reader.

Keywords: International Mathematical Olympiads, High School Education, University Teaching, Euclidean Plane Geometry, Problems Solved

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Enunciados dos problemas	10
2	Trigonometria	14
2.1	Trigonometria e Média Geométrica em um triângulo arbitrário. IMO 1974 P2 .	14
2.1.1	Considerações iniciais.	14
2.1.2	Resolução.	15
2.2	Trigonometria e Soma de Áreas. SL da IMO 1975 P12	20
2.2.1	Resolução.	20
2.3	Distância entre Pontos na Semicircunferência Trigonométrica. SL da IMO 1975 P15	22
2.3.1	Considerações iniciais.	22
2.3.2	Resolução.	23
2.4	Cosseno e Seno de ângulos notáveis - Arco Capaz - Triângulo Acutângulo - P1 NI IGO 2017	24
2.4.1	Resolução	25
3	Teorema e Desigualdade de Ptolomeu	27
3.1	Teorema e Desigualdade de Ptolomeu	27
3.1.1	Teorema de Ptolomeu	27
3.1.2	Desigualdade de Ptolomeu	29
3.2	Teorema de Ptolomeu, Arco Capaz, Triângulo Equilátero. IMO 1995 P5	31
3.2.1	Resolução	32
3.3	Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritméticas e harmônica. IMO 1997 SL P7	34
3.3.1	Resolução	34
3.4	Coordenadas de polígono inscritível. SL da IMO 2000 P4	36
3.4.1	Resolução	37

4	Potência de um ponto relativo a uma circunferência e Eixo Radical	38
4.1	Eixo Radical, Equação Quadrática. SL IMO 1971 P4	38
4.1.1	Resolução	38
4.2	Eixo Radical, Circuncentro. SL IMO 1994 P15	42
4.2.1	Resolução	43
4.3	Potência de um ponto e eixo radical. P5 IMO 2012.	45
4.3.1	Resolução	45
5	Congruência e Semelhança de Triângulos	48
5.1	Congruência de triângulos e duas circunferências secantes. IMO 1979 P3	48
5.1.1	Resolução	48
5.2	Pentágono regular, razão áurea e semelhança. P3 N.E. IGO 2017	50
5.2.1	Resolução	50
5.3	Circunferência inscrita, linha tangente, congruência de triângulos. P1 NA IGO 2017	51
5.3.1	Resolução	51
5.4	Pontos colineares, semelhança de triângulos e paralelogramo. P2 E IGO 2019 . .	53
5.4.1	Resolução	54
5.5	Ângulos, quadrilátero e congruência de triângulos. P4 E IGO 2019	57
5.5.1	Resolução	57
6	Outros	60
6.1	Triângulos isósceles, losango e paralelogramo. P2 N.E. IGO 2017	60
6.1.1	Resolução	60
6.2	Desigualdade triangular, triângulo equilátero. IMO 1973 P4	62
6.2.1	Resolução	62
6.3	Segmentos paralelos e ângulo excêntrico interior. IMO 2018 P1	66
6.3.1	Resolução	66
6.4	Reflexão, quadrilátero inscritível, projeção. P4 N.I. IGO 2017	72
6.4.1	Resolução	72
6.5	Área de triângulos, hexágono, trapézio. P2 N.E. IGO 2018	74
6.5.1	Resolução	74
7	Referências	77

Capítulo 1

Introdução

Este livro faz parte de um projeto de longo prazo de resolução de problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemáticas. Nossas publicações anteriores são [1], [2], [3], [4] e [5].

Nesta oportunidade são apresentados 20 problemas de Geometria Plana Euclidiana. O texto conta com 37 figuras que facilitam acompanhar a resolução. Muitos dos desafios tem como complemento os gráficos interativos no site do Geogebra e a resolução em vídeo no YouTube.

A Geometria é muito ampla. Escolhemos discutir alguns assuntos, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os problemas aparecem organizados em cinco capítulos. Porém, tipicamente cada desafio usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática. Em várias seções apresentamos primeiro uma introdução aos conhecimentos chaves para a resolução do problema.

Embora úteis e proveitosas, muitas resoluções apresentadas nos fóruns de problemas de Olimpíadas não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos temos conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas soluções se encontram frequentemente somente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas neste texto usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

1.1 Enunciados dos problemas

Problema 1. Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Provar que existe um ponto D no lado AB tal que CD é a média geométrica de AD e BD se, e somente se,

$$\sqrt{\operatorname{sen}(\hat{A}) \operatorname{sen}(\hat{B})} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right).$$

Problema 2. Sejam $A = (1, 0)$ e M_i pontos no primeiro quadrante do círculo trigonométrico de centro $O = (0, 0)$. Considerar os arcos $AM_1 = \theta_1$, $AM_2 = \theta_2$, $AM_3 = \theta_3, \dots$, $AM_\nu = \theta_\nu$, tais que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_\nu$. Provar que

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) < \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}).$$

Problema 3. É possível colocar 1975 pontos em uma circunferência de raio 1 de tal forma que as distâncias entre quaisquer dois pontos (medida pela corda que os conecta) seja um número racional?

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo com ângulo em A de 60° . Sejam E e F os pés das alturas por B e C , respectivamente. Provar que

$$CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB).$$

Problema 5. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ e $\angle BCD = \angle EFA = \pi/3$ (isto é, 60°). Sejam G e H dois pontos no interior do hexágono, tais que os ângulos AGB e DHE são ambos $2\pi/3$ (isto é, 120°). Provar que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

Problema 6. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Provar que

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Quando acontece a igualdade?

Problema 7. Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo com $n \geq 4$. Prove que $A_1A_2\dots A_n$ é inscritível por uma circunferência se, e somente se, a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tal que

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j$$

para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

Problema 8. Duas circunferências tangentes em um plano, com raios r_1 e r_2 , são dadas.

Uma reta intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Encontrar o comprimento dos segmentos em função de r_1 e r_2 e as condições sobre as quais o problema tem solução.

Problema 9. Uma circunferência w é tangente a duas linhas paralelas l_1 e l_2 . Uma segunda circunferência w_1 é tangente a l_1 em A e a w externamente em C . Uma terceira circunferência w_2 é tangente a l_2 em B , externamente a w em D e a w_1 externamente em E . Os segmentos AD e BC se interceptam no ponto Q . Provar que Q é o circuncentro do triângulo CDE .

Problema 10. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BCA = 90^\circ$, e seja C_0 o pé da altura relativa a C . Seja X um ponto no interior do segmento CD . Seja K o ponto do segmento AX tal que $BK = BC$. Analogamente, seja L o ponto do segmento BX tal que $AL = AC$. Seja M o ponto de interseção de AL com BK . Provar que $MK = ML$.

Problema 11. Em um plano existem duas circunferências secantes. Seja A um dos pontos de interseção das duas circunferências. Dois pontos começam a mover-se simultaneamente com velocidade constante partindo do ponto A , cada ponto seguindo uma das circunferências. Os dois pontos completam no mesmo tempo a volta na sua circunferência até o ponto A novamente. Suponha que na circunferência da esquerda o movimento é no sentido anti-horário e na circunferência da direita, horário. Provar que existe um ponto P no plano tal que em cada momento de tempo as distâncias do ponto P aos pontos em movimento são iguais.

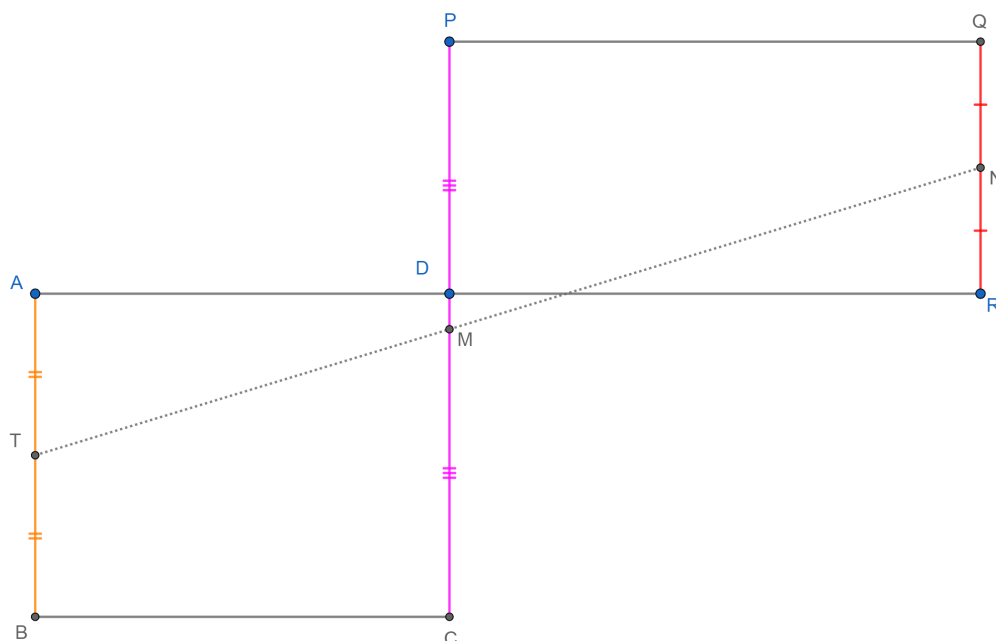
Problema 12. Em um pentágono regular $ABCDE$, a perpendicular em C a CD encontra AB em F . Provar que

$$AE + AF = BE.$$

Problema 13. No triângulo ABC , o incírculo, com centro I , toca o lado BC no ponto D . A linha DI encontra AC em X . A linha tangente de X com o incírculo (diferente de AC) intersecta AB em Y . Se YI e BC se intersectam no ponto Z , provar que $AB = BZ$.

Problema 14. Como mostrado a seguir, os retângulos $ABCD$ e $PQRD$ tem a mesma área e lados correspondentes paralelos. Sejam N , M e T pontos médios dos segmentos QR , PC e AB , respectivamente. Provar que N , M e T são colineares.

Figura 1.1.1: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

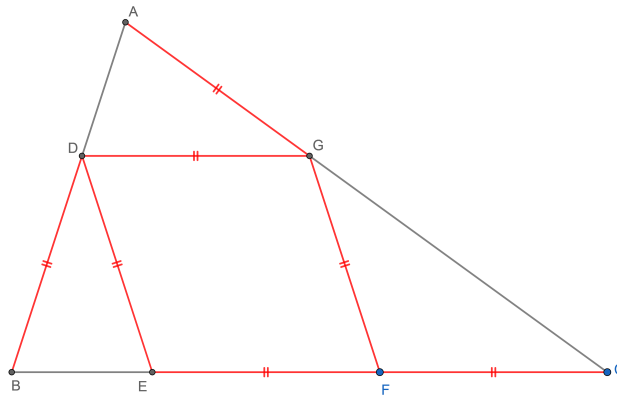
Problema 15. No quadrilátero $ABCD$ vale que

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ$$

e $AB = BD - AC$. As linhas AB e CD se intersectam no ponto E . Provar que $\angle ADB = 2\angle BEC$.

Problema 16. Na Figura os segmentos destacados (em vermelho) tem o mesmo comprimento. Determinar todos os ângulos no interior do triângulo ABC .

Figura 1.1.2: Ilustração do problema.



Fonte: O autor.

Problema 17. Um soldado tem que detectar minas em um área com a forma de um triângulo equilátero. O raio do seu detector é igual a metade da altura do triângulo. O soldado começa em um vértice do triângulo. Determinar o caminho mais curto que o soldado deve seguir que garanta que toda a região seja checada.

Problema 18. Seja Γ o circuncirculo do triângulo acutângulo ABC . Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC , respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G , respectivamente. Provar que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

Problema 19. No triângulo isósceles ABC ($AB = AC$), seja l uma linha paralela a BC que passa por A . Seja D um ponto arbitrário sobre l . Sejam E, F os pés das perpendiculares a BD, CD que passam por A , respectivamente. Suponha que P, Q são as imagens de E, F sobre l . Provar que

$$AP + AQ \leq AB.$$

Problema 20. O hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está contido no interior do hexágono convexo $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ de modo que $A_1A_2 \parallel B_1B_2, A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots, A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Provar que as áreas dos hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ e $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ são iguais. (Um hexágono simples é um hexágono que não intersecta ele mesmo.)

Capítulo 2

Trigonometria

Trigonometria (em grego “ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\sigma$ ” triângulo mais “ $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron$ ” medida) nasce no estudo do triângulo retângulo. Seno (Cosseno) de um ângulo é definido como a razão entre o cateto oposto (adjacente) ao ângulo e a hipotenusa. A semelhança de triângulos permite relacionar qualquer triângulo retângulo com outro em um círculo unitário (trigonométrico). Isto leva as definições das funções seno e cosseno para o domínio dos números reais [6].

2.1 Trigonometria e Média Geométrica em um triângulo arbitrário. IMO 1974 P2

Problema 1. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Provar que existe um ponto D no lado AB tal que CD é a média geométrica de AD e BD se, e somente se,*

$$\sqrt{\sin(\hat{A}) \sin(\hat{B})} \leq \sin\left(\frac{\hat{C}}{2}\right).$$

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, na Alemanha [7]. O problema acima foi proposto por Matti Lehtinen da delegação da Finlândia [8].

2.1.1 Considerações iniciais.

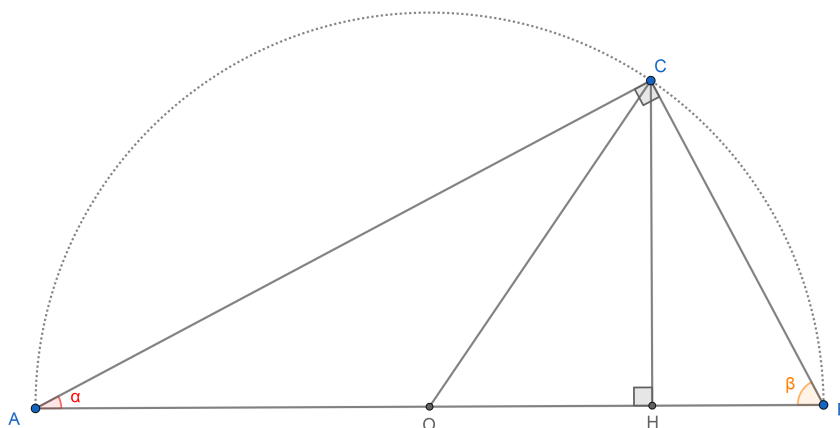
A Figura 2.1.1 mostra o caso em que o $\triangle ABC$ é retângulo em C . Sabemos que existem dois pontos D com a propriedade requerida: $D_1 = H$ está no pé da altura em relação ao vértice C e $D_2 = O$ está no ponto médio do segmento AB . Nos dois casos vale que

$$\frac{CD^2}{AD \cdot BD} = 1. \tag{2.1.1}$$

Em outras palavras, CD é a média geométrica de AD e BD . Para D_1 a equação (2.1.1)

é uma das relações métricas do triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa ao vértice com ângulo reto é o produto das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa [9]. Para D_2 vale que $CO = AO = BO$, a mediana relativa à hipotenusa mede a metade desta [10].

Figura 2.1.1: Em um triângulo retângulo existem dois pontos D com a propriedade requerida: $D_1 = H$ está no pé da altura em relação ao vértice C e $D_2 = O$ está no ponto médio do segmento AB . O ponto O é centro do semicírculo pontilhado.

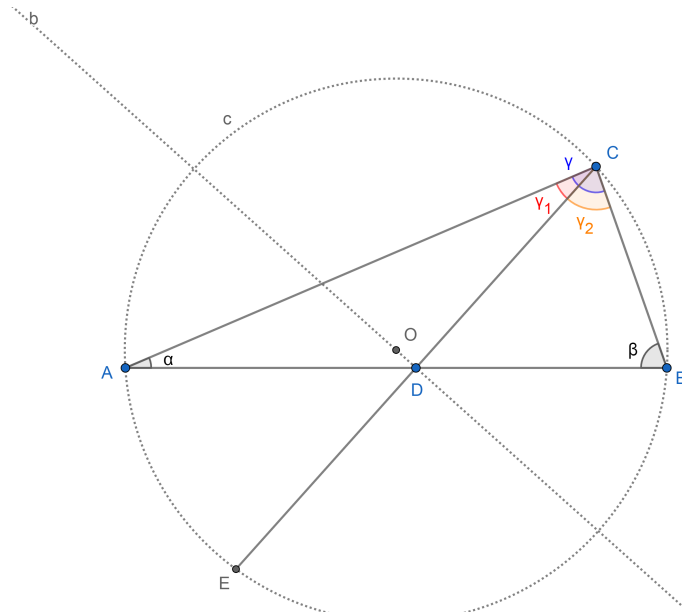


Fonte: O autor.

2.1.2 Resolução.

O problema proposto da uma condição necessária e suficiente para a existência de um ponto D^* com a propriedade referida em um triângulo arbitrário (não necessariamente retângulo). No que segue iremos nos referir à Figura 2.1.2.

Figura 2.1.2: Em um triângulo arbitrário o ponto $D = D^*$ que satisfaz que CD^* é a média geométrica de AD^* e BD^* existe se, e somente se, $\sqrt{\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)} \leq \text{sen}(\frac{\gamma}{2})$. Uma versão interativa desta figura pode ser consultada em [11].



Fonte: O autor.

Iniciamos definindo uma função do conjunto de todas as posições possíveis do ponto D no lado AB do triângulo arbitrário ABC para os números reais e dada pela equação

$$f(D) = \frac{CD^2}{AD \cdot BD}. \tag{2.1.2}$$

Sejam os ângulos $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$, $\hat{ACD} = \gamma_1$ e $\hat{BCD} = \gamma_2$. Temos que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Aplicando a lei dos senos no triângulo DCA encontramos:

$$\frac{CD}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{AD}{\text{sen}(\gamma_1)},$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\gamma_1)}. \tag{2.1.3}$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo DCB encontramos:

$$\frac{CD}{\text{sen}(\beta)} = \frac{BD}{\text{sen}(\gamma_2)},$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\gamma_2)}. \tag{2.1.4}$$

Com as equações (2.1.3) e (2.1.4) reescrevemos (2.1.2) como:

$$f(D) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2)}. \quad (2.1.5)$$

Movimentando o ponto D no lado AB do triângulo arbitrário ABC mudarão γ_1 e γ_2 e conseqüentemente $f(D)$.

Queremos encontrar o conjunto imagem dessa função, o que permitirá determinar a condição necessária e suficiente da existência do ponto D^* que satisfaz $f(D^*) = 1$. Para isso vamos procurar uma desigualdade que relacione $\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2)$ com $\operatorname{sen}(\gamma)$.

Convém neste ponto lembrar de duas identidades trigonométricas, provadas, por exemplo, em [12] e [13]:

$$\cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) + \operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2), \quad (2.1.6)$$

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) - \operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2). \quad (2.1.7)$$

Restando (2.1.7) de (2.1.6) encontramos que

$$\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2) = \frac{1}{2} [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)],$$

$$\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2) = \frac{1}{2} [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma)].$$

Como $\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \leq 1$, valendo a igualdade quando $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$, segue que

$$\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2) \leq \frac{1}{2} [1 - \cos(\gamma)]. \quad (2.1.8)$$

Partindo de (2.1.7) podemos escrever

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos(\gamma) = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos(\gamma) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2} [1 - \cos(\gamma)] = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (2.1.9)$$

Substituindo (2.1.9) em (2.1.8) encontramos

$$\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2) \leq \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (2.1.10)$$

Agora substituindo (2.1.10) em (2.1.5) chegamos a

$$f(D) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2)} \geq \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Isto é, a imagem da função f não pode ser menor que o valor mínimo dado por

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Por outro lado, como $\operatorname{sen}(\gamma_1) \operatorname{sen}(\gamma_2)$ tende a zero por valores positivos quando o ponto D tende ao ponto A (B), temos que a função f é ilimitada superiormente. Em outras palavras, vale que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \leq f(D) < \infty.$$

Como queremos que o valor $f(D^*) = 1$ esteja contido no intervalo acima concluímos que isto é possível se, e somente se

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} &\leq 1, \\ \sqrt{\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)} &\leq \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

A Figura 2.1.2 também permite outra interpretação geométrica. Seja E o ponto da segunda interseção da reta CD com a circunferência c , de centro O , circunscrita ao $\triangle ABC$. E seja b a bissetriz do ângulo $C\hat{O}E$.

Pelo Teorema das Cordas o produto das distâncias de um ponto as interseções da reta secante com uma circunferência é constante [14]. Para o ponto D em relação a circunferência c seguindo as cordas AB e CE temos:

$$AD \cdot BD = CD \cdot ED.$$

Usando a equação anterior junto a condição procurada no problema, $AD^* \cdot BD^* = (CD^*)^2$, encontramos que $ED^* = CD^*$. Isto é, quando CD é a média geométrica de AD e BD temos que os comprimentos de ED e CD são iguais.

Segue que o ponto D^* pertence a interseção de três retas: AB , CE e a bissetriz b . Esta última observação permite localizar rapidamente em um gráfico interativo [11] que podem existir dois pontos D^* (um próximo de A e outro de B , na troca de γ_1 e γ_2).

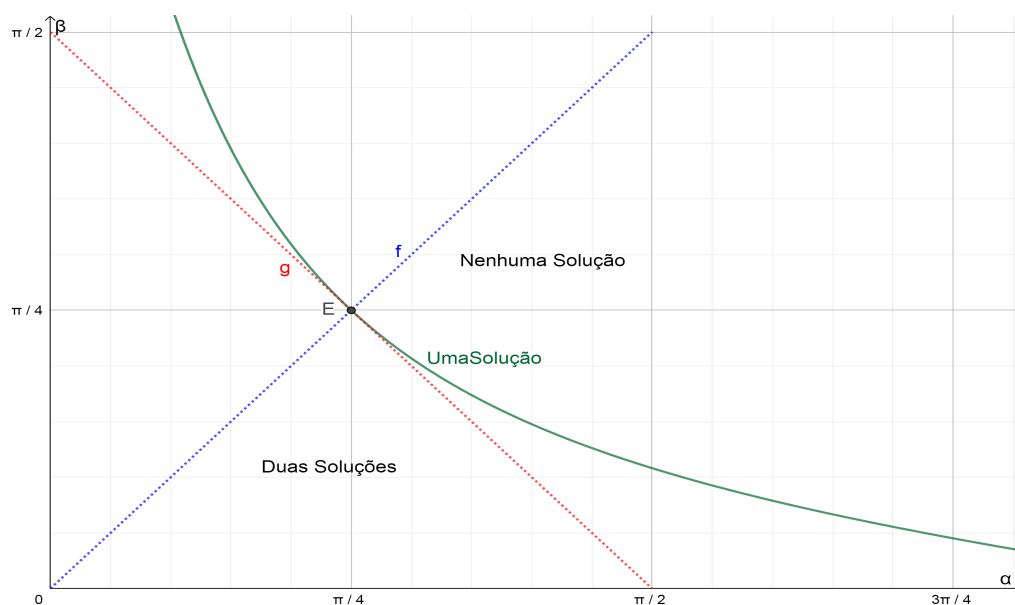
Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° escrevemos $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ em (2.1.11):

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \leq \operatorname{sen}^2\left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \leq \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (2.1.12)$$

A Figura 2.1.3 mostra um diagrama de fases determinado pela desigualdade (2.1.12).

Figura 2.1.3: Diagrama de fases determinado pela desigualdade (2.1.12). Os eixos das abscissas e das ordenadas correspondem a aos ângulos α e β , respectivamente. A curva “UmaSolução”, em verde, segue da igualdade em (2.1.12). Abaixo da curva em verde existem dois pontos D^* que satisfazem as condições do problema e acima nenhum. Cada ponto nos segmentos de reta f , h e i , pontilhado em azul, é um triângulo isósceles, $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ e $\alpha = \gamma$, respectivamente. Cada ponto no segmento de reta g , pontilhado em vermelho, é um triângulo retângulo, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.



Fonte: O autor.

Os eixos das abscissas e das ordenadas correspondem a aos ângulos α e β , respectivamente. A curva “UmaSolução”, em verde, segue da igualdade em (2.1.12). Neste caso o ponto D^* que satisfaz a condição do problema somente existe quando $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$. Isto é, na interseção da mediatriz do ângulo γ com o lado AB . Abaixo da curva em verde existem dois pontos D^* que satisfazem as condições do problema e acima nenhum. Cada ponto nos segmentos de reta f , h e i , pontilhado em azul, é um triângulo isósceles, $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ e $\alpha = \gamma$, respectivamente. Cada ponto no segmento de reta g , pontilhado em vermelho, é um triângulo retângulo, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Abaixo do segmento g se encontram os triângulos obtusângulos e acima os acutângulos. O ponto E , triângulo isósceles e retângulo, está na interseção dos segmentos f , g e a curva “UmaSolução”.

2.2 Trigonometria e Soma de Áreas. SL da IMO 1975 P12

Problema 2. *Sejam $A = (1, 0)$ e M_i pontos no primeiro quadrante do círculo trigonométrico de centro $O = (0, 0)$. Considerar os arcos $AM_1 = \theta_1$, $AM_2 = \theta_2$, $AM_3 = \theta_3, \dots$, $AM_\nu = \theta_\nu$, tais que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_\nu$. Provar que*

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) < \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}). \quad (2.2.1)$$

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária [7]. O problema acima foi proposto pela delegação da Grécia [8].

2.2.1 Resolução.

Inicialmente vamos reescrever (2.2.1) como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}) &< \frac{\pi}{2}, \\ \sum_{i=1}^{\nu-1} [\operatorname{sen}(2\theta_i) - \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1})] &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Convém neste ponto lembrar de duas identidades trigonométricas, provadas, por exemplo, em [12] e [13]:

$$\operatorname{sen}(\theta + \beta) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha), \quad (2.2.3)$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \beta) = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha). \quad (2.2.4)$$

Quando $\theta = \beta$ em (2.2.3) temos

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \quad (2.2.5)$$

e somando (2.2.3) e (2.2.4) encontramos

$$\operatorname{sen}(\theta + \beta) + \operatorname{sen}(\theta - \beta) = 2\operatorname{sen}(\theta) \cos(\beta). \quad (2.2.6)$$

Usando (2.2.5) e (2.2.6) podemos reescrever o interior do somatório em (2.2.2):

$$\operatorname{sen}(2\theta_i) - \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}) = 2\operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\theta_i) - 2\operatorname{sen}(\theta_i) \cos(\theta_{i+1}),$$

$$\operatorname{sen}(2\theta_i) - \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_{i+1}) - \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_{i+1}) = 2\operatorname{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})].$$

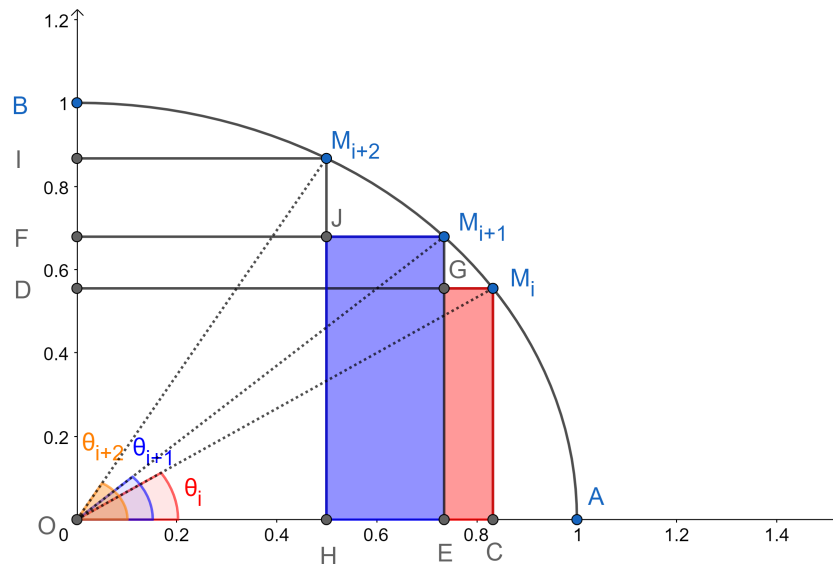
Segue que (2.2.2) se transforma em

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})] < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{sen}(\theta_1) [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] + \dots + \text{sen}(\theta_{\nu-1}) [\cos(\theta_{\nu-1}) - \cos(\theta_\nu)] < \frac{\pi}{4}. \quad (2.2.7)$$

Existe uma interpretação geométrica simples para cada um dos somandos da forma $\text{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})]$. A Figura 2.2.1 mostra o primeiro quadrante de um círculo trigonométrico (raio=1) e três pontos genéricos sobre o arco da circunferência: M_i , M_{i+1} e M_{i+2} . Lembramos que, por hipótese, temos $\theta_i < \theta_{i+1} < \theta_{i+2}$.

Figura 2.2.1: Interpretação geométrica de área para cada um dos somandos da forma $\text{sen}(\theta_i) [\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})]$. Uma versão interativa desta figura pode ser encontrada em [15].



Fonte: O autor.

Sejam os pontos C , E e H os pés das perpendiculares ao eixo x passando por M_i , M_{i+1} e M_{i+2} , respectivamente. Sejam os pontos D , F e I os pés das perpendiculares ao eixo y passando por M_i , M_{i+1} e M_{i+2} , respectivamente. Seja o ponto G a interseção dos segmentos DM_i e EM_{i+1} e seja o ponto J a interseção dos segmentos FM_{i+1} e HM_{i+2} .

Notamos que as coordenadas dos pontos M_i são $(\cos(\theta_i), \text{sen}(\theta_i))$ e os segmentos EC , HE , M_iC e $M_{i+1}E$ tem comprimentos $\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})$, $\cos(\theta_{i+1}) - \cos(\theta_{i+2})$, $\text{sen}(\theta_i)$ e $\text{sen}(\theta_{i+1})$, respectivamente. Logo, as áreas dos retângulos M_iGEC e $M_{i+1}JHE$ são $\text{sen}(\theta_i) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1}))$ e $\text{sen}(\theta_{i+1}) (\cos(\theta_{i+1}) - \cos(\theta_{i+2}))$, respectivamente. Como a área da interseção entre retângulos vizinhos é zero, as somas das suas áreas é sempre inferior a área de $\frac{1}{4}$ de círculo unitário, $\frac{\pi}{4}$.

Isto é, vale (2.2.7) e conseqüentemente (2.2.1).

2.3 Distância entre Pontos na Semicircunferência Trigonométrica. SL da IMO 1975 P15

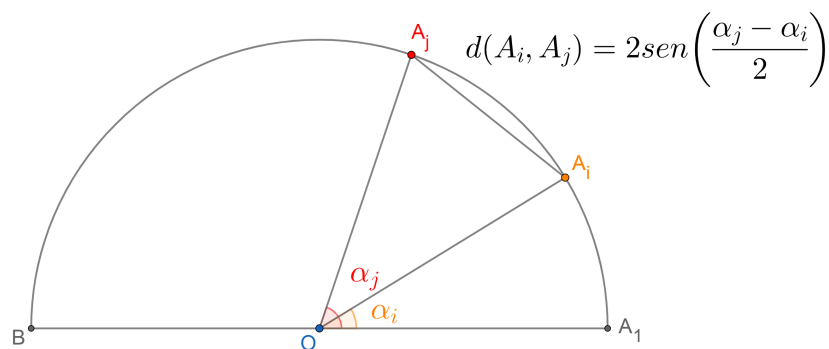
Problema 3. *É possível colocar 1975 pontos em uma circunferência de raio 1 de tal forma que as distâncias entre quaisquer dois pontos (medida pela corda que os conecta) seja um número racional?*

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária [7]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga União Soviética [8].

2.3.1 Considerações iniciais.

A Figura 2.3.1 mostra os pontos A_i e A_j em uma semicircunferência de raio 1 e centrada em $O = (0, 0)$. O segmento BA_1 representa a horizontal. Sejam os ângulos $\angle A_iOA_1 = \alpha_i$ e $\angle A_jOA_1 = \alpha_j$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha_j > \alpha_i$.

Figura 2.3.1: Distância entre dois pontos medida por uma corda na semicircunferência trigonométrica, que tem raio de medida 1.



Fonte: O autor.

Proposição 1 (Distância na circunferência trigonométrica). *A distância entre os pontos A_i e A_j pode ser calculada como*

$$d(A_i, A_j) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right). \quad (2.3.1)$$

Demonstração. As coordenadas dos pontos em um sistema cartesiano são $A_i = (\cos(\alpha_i), \sin(\alpha_i))$ e $A_j = (\cos(\alpha_j), \sin(\alpha_j))$. Logo, a distância será

$$d(A_i, A_j) = \sqrt{[\cos(\alpha_j) - \cos(\alpha_i)]^2 + [\sin(\alpha_j) - \sin(\alpha_i)]^2}.$$

Desenvolvendo os quadrados e usando a identidade trigonométrica fundamental, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, encontramos

$$d(A_i, A_j) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\alpha_j) \cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_j) \sin(\alpha_i)}. \quad (2.3.2)$$

No próximo passo usaremos as identidades trigonométricas da mudança de um produto de cossenos e senos em somas:

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2},$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.$$

Segue que (2.3.2) se transforma em

$$d(A_i, A_j) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\alpha_j - \alpha_i)}.$$

A partir da identidade do cosseno do ângulo duplo, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, encontramos que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ e $\cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1$.

Trocando x por $\alpha_j - \alpha_i$ na última igualdade encontramos

$$d(A_i, A_j) = \sqrt{2} \sqrt{2 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)}.$$

Usando mais uma vez a identidade trigonométrica fundamental

$$d(A_i, A_j) = 2 \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)} = 2 \left| \sin\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right) \right|.$$

Como $0 < \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2} \leq 90^\circ$ temos que $\sin\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right) \geq 0$ e $d(A_i, A_j) = 2\sin\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)$. \square

2.3.2 Resolução.

Assumir que o centro da circunferência está no ponto $O = (0, 0)$ e que os pontos $A_1, A_2, \dots, A_{1975}$ são colocados na semicircunferência superior. Denote os ângulos por $\angle A_i O A_1 = \alpha_i$ com $1 \leq i \leq 1975$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_i < \alpha_j$ para todo $i < j$.

De (2.3.1) a distância $A_i A_j$ é igual a $d(A_i, A_j) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right)$. Usando a identidade para o seno da diferença $\text{sen}(x - y) = \text{sen}(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\cos(x)$ podemos escrever

$$d(A_i, A_j) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) - 2\text{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\right). \quad (2.3.3)$$

A distância será um número racional se $\text{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ são racionais para todo $1 \leq i \leq 1975$.

Vamos lembrar de outras duas identidades trigonométricas

$$\text{sen}(2x) = \frac{2 \tan(x)}{\tan^2(x) + 1},$$

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{\tan^2(x) + 1}.$$

Notamos agora que é possível introduzir uma mudança de variáveis. Dado $t \in \mathbb{Q}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que sejam válidas simultaneamente as equações a seguir

$$\text{sen}(x) = \frac{2t}{t^2 + 1},$$

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1},$$

pois $-1 \leq \frac{2t}{t^2+1} \leq 1$ e $-1 \leq \frac{1-t^2}{t^2+1} \leq 1$. Adicionalmente

$$\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)^2 = 1.$$

Logo, existe um número infinito de valores de t racionais, e tão pequenos quanto se queira, para os quais $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são números racionais e por (2.3.3) a distância entre os pontos A_i e A_j será um número racional.

2.4 Cosseno e Seno de ângulos notáveis - Arco Capaz - Triângulo Acutângulo - P1 NI IGO 2017

Problema 4. *Seja ABC um triângulo acutângulo com ângulo em A de 60° . Sejam E e F os pés das alturas por B e C , respectivamente. Provar que*

$$CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB). \quad (2.4.1)$$

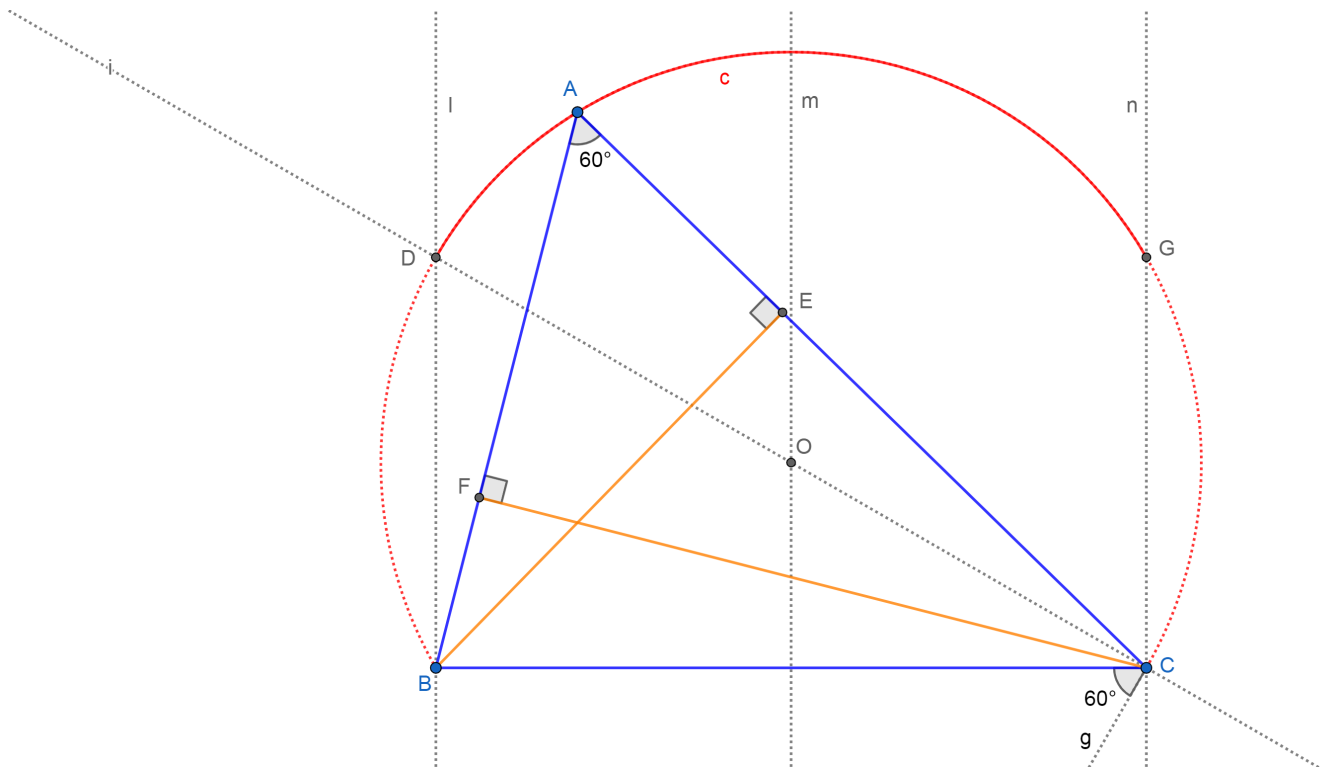
Problema 1 (Nível Intermediário) da 4 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian

Geometry Olympiad) de 2017 [16].

2.4.1 Resolução

A Figura 2.4.1 mostra os passos de uma construção possível e ajuda a entender a solução do problema.

Figura 2.4.1: Passos de uma construção possível para auxiliar na solução do problema. Versão interativa em [17].



Fonte: O autor.

Neste caso uma construção geométrica precisa não é estritamente necessária para resolver o problema, bastaria ter feito um esboço. Porém, aproveitamos a simplicidade da figura para lembrar da construção do Arco Capaz [18] e de triângulos acutângulos [19].

Primeiro, desenhamos um segmento BC de comprimento arbitrário e construímos um ângulo de 60° com BC um dos seus lados, vértice C e a semirreta g , no lado inferior direito. Segundo, construímos a reta i , perpendicular a g e passando por C e a mediatriz m dos pontos B e C . A interseção de m e g determina o ponto O , centro do Arco Capaz superior dos pontos B e C (linha vermelha tracejada). Terceiro, traçamos as perpendiculares l e n ao segmento BC passando por B e C , respectivamente. A interseção de l e n com o Arco Capaz determinam os pontos D e G . Para o triângulo ABC ser acutângulo o ponto A deve pertencer (extremos

excluídos) ao arco menor c com centro em O e que passa por D e G (curva contínua em vermelho). Caso contrário o ângulo em B ou C seria maior ou igual a 90° .

Lembramos que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, logo, no triângulo AEB (retângulo em E) podemos escrever:

$$\cos 60^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}. \quad (2.4.2)$$

Analogamente, no triângulo AFC (retângulo em F) escrevemos:

$$\cos 60^\circ = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}. \quad (2.4.3)$$

A seguir trocamos AE por $AC - CE$ e AF por $AB - BF$ em (2.4.2) e (2.4.3):

$$\frac{AC - CE}{AB} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{AB - BF}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Colocando em evidência CE e BF segue que

$$CE = AC - \frac{1}{2}AB,$$
$$BF = AB - \frac{1}{2}AC.$$

Fazendo a diferença das duas equações anteriores concluíse a validade de (2.4.1). Uma solução em vídeo está disponível em [20].

Capítulo 3

Teorema e Desigualdade de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C., Alexandria, Egito) publicou um tratado “Almagest” de treze livros em que defendia a teoria geocêntrica do movimento dos planetas, a Lua e o Sol, que prevaleceu por mais de 1400 anos, até que Nicolaus Copernicus revolucionou a Astronomia com o modelo heliocêntrico em 1543 [21]. No livro I do “Almagest” Ptolomeu enunciou seu teorema. A partir do qual conseguiu calcular a função comprimento de corda (análoga a função seno atual) com intervalo de meio grado e cinco casas decimais de precisão [22]. A fórmula do Teorema de Ptolomeu, quando aplicada a um retângulo, se transforma na fórmula do Teorema de Pitágoras.

O Teorema e a Desigualdade de Ptolomeu raramente são sequer citados para os estudantes de Ensino Médio no Brasil. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em Olimpíadas.

3.1 Teorema e Desigualdade de Ptolomeu

3.1.1 Teorema de Ptolomeu

Definição 1. Um quadrilátero é dito *inscritível* quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.

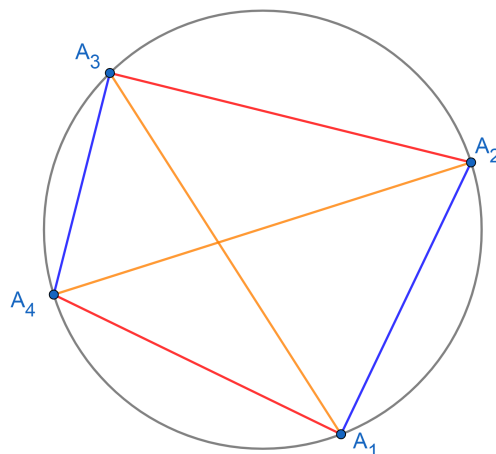
Teorema 2 (Teorema de Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscritível $A_1A_2A_3A_4$ o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos (Figura 3.1.1). Isto é, vale*

$$A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4. \quad (3.1.1)$$

A forma inversa também é verdadeira. Se (3.1.1) valer, então $A_1A_2A_3A_4$ é um quadrilátero inscritível.

Figura 3.1.1: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscrito o produto dos comprimentos das diagonais (em amarelo) deve ser igual a soma dos produtos dos lados opostos (azul e vermelho) e vice-versa.

Teorema de Ptolomeu: $A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4$

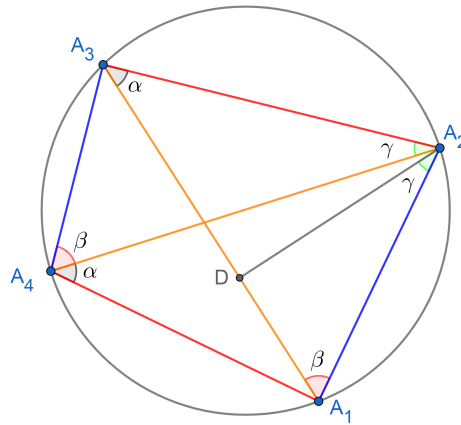


Fonte: O autor.

Demonstração. Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Suponhamos que $A_1A_2A_3A_4$ é um quadrilátero inscrito. Com referência a corda A_1A_2 os ângulos $A_1A_4A_2 = A_1A_3A_2 = \alpha$ enxergam o mesmo arco de circunferência. Analogamente, focando na corda A_2A_3 os ângulos $A_2A_4A_3 = A_2A_1A_3 = \beta$ enxergam o mesmo arco de circunferência. Posicione um ponto D no interior do segmento A_1A_3 de tal forma que os ângulos $A_3A_2A_4 = A_1A_2D = \gamma$ sejam iguais (Figura 3.1.2).

Figura 3.1.2: Demonstração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Posicione um ponto D no interior do segmento A_1A_3 de tal forma que os ângulos $A_3A_2A_4 = A_1A_2D = \gamma$ sejam iguais.

Teorema de Ptolomeu: $A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4$



Fonte: O autor.

Os triângulos A_1A_2D e $A_4A_2A_3$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Segue que

$$\frac{A_1A_2}{A_4A_2} = \frac{A_1D}{A_4A_3} = \frac{A_2D}{A_2A_3}. \tag{3.1.2}$$

Os triângulos A_3A_2D e $A_4A_2A_1$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Note que os ângulos $A_1A_2A_4 = A_3A_2D$ são iguais, pois o ângulo DA_2A_4 é uma parte comum. Segue que

$$\frac{A_3A_2}{A_4A_2} = \frac{A_3D}{A_4A_1} = \frac{A_2D}{A_2A_1}. \tag{3.1.3}$$

Note de (3.1.2) que $A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1D \cdot A_2A_4$ e de (3.1.3) temos $A_1A_4 \cdot A_2A_3 = A_3D \cdot A_2A_4$. Somando as duas equações anteriores

$$A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_3D \cdot A_2A_4 + A_1D \cdot A_2A_4$$

$$A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_4 = (A_3D + A_1D) \cdot A_2A_4$$

Mas $A_3D + A_1D = A_1A_3$, como queríamos provar. □

3.1.2 Desigualdade de Ptolomeu

A desigualdade de Ptolomeu generaliza o resultado anterior.

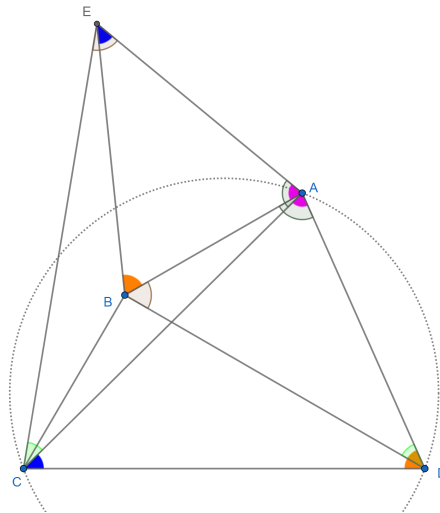
Teorema 3 (Desigualdade de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo (não necessariamente inscrito) o produto das diagonais é menor ou igual a soma dos produtos dos lados opostos. Isto é, vale*

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (3.1.4)$$

Ocorre a igualdade quando $ABCD$ é um quadrilátero inscrito, conforme o Teorema de Ptolomeu.

Demonstração. A Figura 3.1.3 permite acompanhar a explicação.

Figura 3.1.3: Construção geométrica para auxiliar na demonstração da desigualdade de Ptolomeu. Versão interativa em [23].



Fonte: O autor.

Seja $ABCD$ é um quadrilátero convexo (não necessariamente inscrito), com diagonais AC e BD . Iniciamos construindo o $\angle ADC$ sobre o lado AB com vértice em B . No segundo passo usamos a construção do Arco Capaz para construir o $\triangle ABE$ de tal forma que $\angle AEB = \angle ACD$.

Por construção, temos que $\angle ACD = \angle AEB$ e $\angle ADC = \angle ABE$. Logo, por ângulo-ângulo segue que $\triangle ACD \sim \triangle AEB$. Com o qual ganhamos a proporcionalidade dos lados

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{EB}{CD}. \quad (3.1.5)$$

Da segunda igualdade acima encontramos

$$EB = \frac{AB \cdot CD}{AD}. \quad (3.1.6)$$

Por outro lado, temos que $\angle BAD = \angle EAC$. Adicionalmente, da primeira igualdade em

(3.1.5) segue que

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}. \quad (3.1.7)$$

Pelo critério de lados proporcionais e ângulo compreendido entre os mesmos congruente pode-se afirmar que $\triangle BAD \sim \triangle EAC$. Segue que $\angle AEC = \angle ABD$ e $\angle ACE = \angle ADB$. Adicionalmente, além de (3.1.7) ganhamos outra proporcionalidade de lados

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}. \quad (3.1.8)$$

De (3.1.8) segue que

$$EC = \frac{AC \cdot BD}{AD}. \quad (3.1.9)$$

A seguir focaremos no triângulo EBC . Usando a desigualdade triangular temos

$$EC \leq EB + BC. \quad (3.1.10)$$

Substituindo (3.1.9) e (3.1.6) em (3.1.10) encontramos

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} \leq \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC. \quad (3.1.11)$$

Multiplicando (3.1.11) por AD concluímos a validade de (3.1.4).

No caso em que $ABCD$ é inscritível vale que

$$\angle CBA = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \angle ABE.$$

Logo, $\angle ABE + \angle CBA = 180^\circ$. Isto significa que C , B e E são colineares e vale a igualdade (Teorema de Ptolomeu) em (3.1.4). \square

Outra demonstração da desigualdade de Ptolomeu pode ser encontrada, por exemplo, em [24]. Uma versão em vídeo está disponível em [25].

3.2 Teorema de Ptolomeu, Arco Capaz, Triângulo Equilátero. IMO 1995 P5

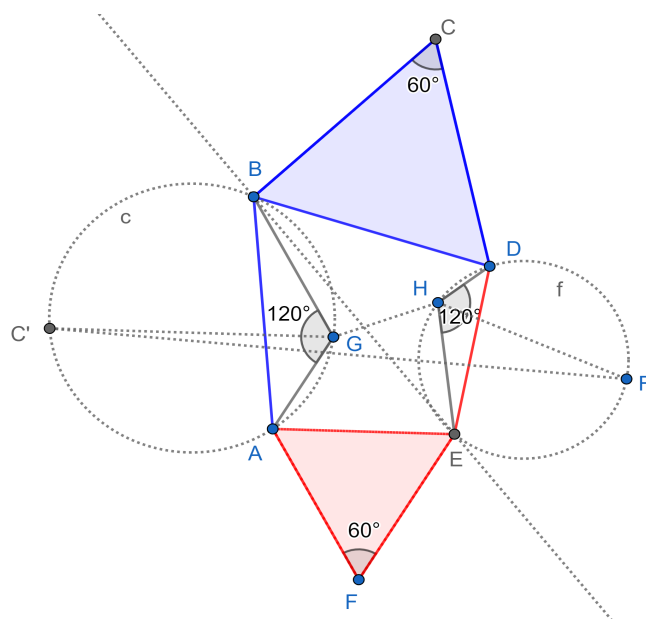
Problema 5. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ e $\angle BCD = \angle EFA = \pi/3$ (isto é, 60°). Sejam G e H dois pontos no interior do hexágono, tais que os ângulos AGB e DHE são ambos $2\pi/3$ (isto é, 120°). Provar que $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.*

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada [7]. O problema acima foi proposto por A. McNaughton da delegação da Nova Zelândia e escolhido como o quinto da competição [8].

3.2.1 Resolução

A Figura 3.2.1 mostra uma construção geométrica possível. Os triângulos BCD e EFA são equiláteros pelas hipóteses do problema. Para poder “encaixar” a parte superior ($ABCD$, em azul) com a parte inferior ($DEFA$, em vermelho) a linha BE deve ser a mediatriz dos pontos A e D . Isto é, os triângulos ABD e AED são isósceles de base AD . Para localizar as posições dos pontos G e H deve ser feita a construção do Arco Capaz (parte das circunferências c e f no interior do hexágono) sobre os segmentos AB e DE , respectivamente. Os passos para construção do Arco Capaz podem ser encontrados em [26].

Figura 3.2.1: Uma construção geométrica possível. Os triângulos BCD e EFA são equiláteros pelas hipóteses do problema. Os triângulos ABD e AED são isósceles de base AD . Para localizar as posições dos pontos G e H deve ser feita a construção do Arco Capaz (parte das circunferências c e f no interior do hexágono) sobre os segmentos AB e DE , respectivamente. Uma versão interativa desta figura está disponível em [27].



Fonte: O autor.

Para resolver o problema construímos os pontos C' e F' , simétricos de C e F respeito a reta BE , respectivamente. Notamos que $CF = C'F'$.

Pela simetria em relação a linha BE os triângulos ABC' e DEF' são equiláteros. Segue que os ângulos $BC'A$ e $DF'E$ medem 60° , com o qual os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ são

inscritíveis ($\angle AGB + \angle BC'A = 180^\circ$ e $\angle DHE + \angle EF'D = 180^\circ$).

Usando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível $AGBC'$ temos

$$\begin{aligned} AG \cdot BC' + BG \cdot AC' &= GC' \cdot AB, \\ AG + BG &= GC'. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Analogamente, usando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível $DHEF'$ temos

$$\begin{aligned} HE \cdot DF' + HD \cdot EF' &= HF' \cdot DE, \\ HE + HD &= HF'. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Somando (3.2.1) e (3.2.2) encontramos

$$AG + BG + HE + HD = GC' + HF'.$$

Adicionando GH nos dois lados da equação anterior temos

$$AG + BG + GH + HE + HD = GC' + GH + HF'. \tag{3.2.3}$$

Pela desigualdade triangular aplicada nos triângulos HGC' e $HC'F'$ segue que

$$(GC' + GH) + HF' \geq HC' + HF' \geq C'F' = CF. \tag{3.2.4}$$

A igualdade acontece quando os pontos G e H pertencem ao segmento $C'F'$.

De (3.2.3) e (3.2.4) encontramos o que queríamos demonstrar

$$AG + BG + GH + HE + HD \geq CF. \tag{3.2.5}$$

Pela desigualdade de Ptolomeu pode ser eliminada a restrição dos ângulos AGB e DHE serem 120° . Neste caso, os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ não serão necessariamente inscritíveis e as igualdades (3.2.1) e (3.2.2) serão substituídas por

$$AG + BG \geq GC',$$

$$HE + HD \geq HF'.$$

Repetindo o raciocínio feito anteriormente a desigualdade (3.2.5) continuará sendo válida.

3.3 Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritméticas e harmônica. IMO 1997 SL P7

Problema 6. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Provar que*

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

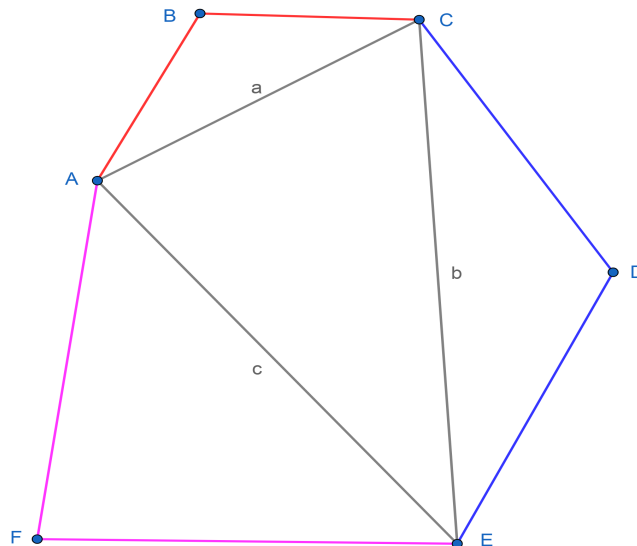
Quando acontece a igualdade?

A IMO 1997 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina [7]. O problema acima foi proposto por Valentina Kirichenko da delegação da Rússia [8].

3.3.1 Resolução

A Figura 3.3.1 mostra uma construção geométrica possível. Para facilitar a interpretação também foram construídos os segmentos $AC = a$, $CE = b$ e $AE = c$.

Figura 3.3.1: Uma construção geométrica possível. Uma versão interativa desta figura está disponível em [28].



Fonte: O autor.

Iniciamos aplicando a desigualdade de Ptolomeu no quadrilátero $ACEF$:

$$AC \cdot EF + FA \cdot CE \geq AE \cdot FC.$$

Como $FA = EF$ segue que

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}. \quad (3.3.1)$$

Aplicando a desigualdade de Ptolomeu no quadrilátero $AEDC$ temos

$$AE \cdot CD + AC \cdot DE \geq DA \cdot CE.$$

Mas $CD = DE$, logo

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{a+c}. \quad (3.3.2)$$

Analogamente, aplicando a desigualdade de Ptolomeu no quadrilátero $ABCE$ segue

$$AB \cdot CE + AE \cdot BC \geq AC \cdot BE.$$

Com $AB = BC$, encontramos

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}. \quad (3.3.3)$$

Somando (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) temos

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Com isto basta provar que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad (3.3.4)$$

Sejam

$$x = b + c, \quad (3.3.5)$$

$$y = a + c, \quad (3.3.6)$$

$$z = a + b, \quad (3.3.7)$$

$$p = a + b + c. \quad (3.3.8)$$

Das quatro equações anteriores podemos escrever a , b e c como função de x , y , z e p :

$$a = p - x, \quad (3.3.9)$$

$$b = p - y, \quad (3.3.10)$$

$$c = p - z. \quad (3.3.11)$$

Substituindo (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.9), (3.3.10) e (3.3.11) em (3.3.4) encontramos

$$p \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{2p}. \quad (3.3.12)$$

Da soma de (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) temos que o valor $2p$ pode ser escrito como

$$2p = x + y + z. \quad (3.3.13)$$

Agora substituindo (3.3.13) em (3.3.12) e reagrupando chegamos em

$$M.A. \{x, y, z\} = \frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = M.H. \{x, y, z\}. \quad (3.3.14)$$

Em (3.3.14) reconhecemos a desigualdade (verdadeira) entre as médias aritmética e harmônica do conjunto de valores positivos $\{x, y, z\}$.

A igualdade em (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) acontece, pelo Teorema de Ptolomeu, quando os quadriláteros $ACEF$, $AEDC$ e $ABCE$ são inscritíveis. Da igualdade em (3.3.4) segue que $a = b = c$, isto equivale a que $x = y = z$ (igualdade na desigualdade das médias). Neste caso o hexágono é regular.

3.4 Coordenadas de polígono inscritível. SL da IMO 2000

P4

Problema 7. *Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo com $n \geq 4$. Prove que $A_1A_2\dots A_n$ é inscritível por uma circunferência se, e somente se, a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tal que*

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j \quad (3.4.1)$$

para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

A IMO 2000 foi realizada na cidade Taejon, Coreia do Sul [7]. Problema proposto pela delegação da Rússia [8].

3.4.1 Resolução

Primeiro, suponhamos que a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, tal que $A_i A_j = b_j c_i - b_i c_j$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

Para provar que o polígono $A_1 A_2 \dots A_n$ é inscrito basta provar que os quadriláteros $A_1 A_2 A_3 A_i$ com $4 \leq i \leq n$ são inscritíveis. Ou pela forma inversa do Teorema de Ptolomeu que

$$A_1 A_3 \cdot A_2 A_i = A_1 A_i \cdot A_2 A_3 + A_1 A_2 \cdot A_3 A_i \quad (3.4.2)$$

Note de (3.4.1) que

$$A_1 A_3 = b_3 c_1 - b_1 c_3$$

$$A_2 A_i = b_1 c_2 - b_2 c_i$$

$$A_1 A_i = b_i c_1 - b_1 c_i$$

$$A_2 A_3 = b_3 c_2 - b_2 c_3$$

$$A_1 A_2 = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

$$A_3 A_i = b_1 c_3 - b_3 c_i.$$

Substituindo-se as 6 equações anteriores em (3.4.2)

$$(b_3 c_1 - b_1 c_3) \cdot (b_1 c_2 - b_2 c_i) = (b_i c_1 - b_1 c_i) \cdot (b_3 c_2 - b_2 c_3) + (b_2 c_1 - b_1 c_2) \cdot (b_1 c_3 - b_3 c_i)$$

verifica-se a igualdade.

Segundo, suponhamos que $A_1 A_2 \dots A_n$ seja inscrito. Logo, os quadriláteros $A_1 A_2 A_i A_j$ com $3 \leq i < j \leq n$ são inscritíveis. Pela forma direta do Teorema de Ptolomeu vale que

$$A_1 A_i \cdot A_2 A_j = A_1 A_j \cdot A_2 A_i + A_1 A_2 \cdot A_i A_j \quad (3.4.3)$$

Segue que

$$A_i A_j = \frac{A_1 A_i}{A_1 A_2} \cdot A_2 A_j - \frac{A_1 A_j}{A_1 A_2} \cdot A_2 A_i \quad (3.4.4)$$

Na equação anterior faça $c_i = \frac{A_1 A_i}{A_1 A_2} \forall i$, $b_i = A_2 A_i \forall i \geq 2$ e $b_1 = -A_1 A_2$.

$$A_i A_j = c_i \cdot b_j - c_j \cdot b_i \quad (3.4.5)$$

Isso conclui a prova do exercício para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$.

Capítulo 4

Potência de um ponto relativo a uma circunferência e Eixo Radical

4.1 Eixo Radical, Equação Quadrática. SL IMO 1971 P4

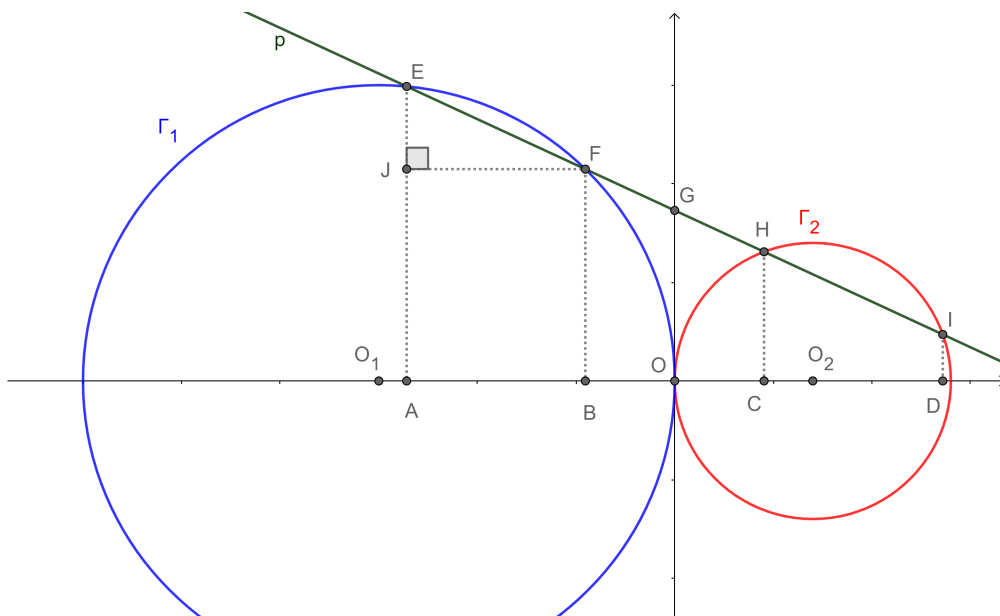
Problema 8. *Duas circunferências tangentes em um plano, com raios r_1 e r_2 , são dadas. Uma reta intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Encontrar o comprimento dos segmentos em função de r_1 e r_2 e as condições sobre as quais o problema tem solução.*

A IMO 1971 foi realizada nas cidade de Bratislava e Zilina, na Eslováquia [7]. O problema acima foi proposto pela delegação do Reino Unido [8].

4.1.1 Resolução

A Figura 4.1.1 ajuda entender a descrição que segue. Resolveremos o problema em um sistema cartesiano de coordenadas. Para tal colocamos o eixo x passando pelo centro das duas circunferências e o eixo y passando (perpendicularmente ao eixo x) pelo ponto de tangencia, O . Consideramos que as circunferências Γ_1 (azul) e Γ_2 (vermelha), com centro em O_1 e O_2 , tem raios r_1 e r_2 , respectivamente.

Figura 4.1.1: Uma solução do problema. Consideramos que as circunferências com centro em A (azul) e B (vermelha) tem raios r_1 e r_2 , respectivamente.



Fonte: O autor.

Seja p a reta (verde) de equação

$$y = ax + b, \tag{4.1.1}$$

com a e b números reais a serem determinados, que intercepta a Γ_1 em E e F e a Γ_2 em H e I , respectivamente. G é o ponto de interseção de p com o eixo y .

Por hipótese temos $EF = FH = HI = d$. Os pontos $A = (x_A, 0)$, $B = (x_B, 0)$, $C = (x_C, 0)$ e $D = (x_D, 0)$ são as projeções ortogonais dos pontos E , F , H e I sobre o eixo x , respectivamente. Segue pelo teorema de Tales que

$$AB = BC = CD = x_B - x_A = x_C - x_B = x_D - x_A = d_x.$$

O eixo radical de duas circunferências que se tocam em um único ponto passa por este e é perpendicular a linha que une os centros das mesmas. Isto é, o eixo y na figura acima é o conjunto de pontos com a mesma potência em relação a Γ_1 e Γ_2 . Em particular, para o ponto G podemos escrever

$$GE \cdot GF = GI \cdot GH.$$

Sejam $u = GF$ e $v = GH$ segue que

$$(d + u) \cdot u = (d + v) \cdot v,$$

$$u + v = d.$$

Resolvendo o sistema das duas equações anteriores se encontra que

$$u = v = \frac{d}{2}.$$

O resultado anterior implica que $GE = 3GF$ e $GI = 3GH$. Usando novamente o teorema de Tales temos que $OA = 3OB$ e $OD = 3OC$ ou

$$x_A = 3x_B, \tag{4.1.2}$$

$$x_D = 3x_C. \tag{4.1.3}$$

Por outro lado, a equação em cartesianas da circunferência Γ_1 é

$$\begin{aligned} (x + r_1)^2 + y^2 &= r_1^2, \\ x^2 + y^2 + 2xr_1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

A equação em cartesianas da circunferência Γ_2 é

$$\begin{aligned} (x - r_2)^2 + y^2 &= r_2^2, \\ x^2 + y^2 - 2xr_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Substituindo (4.1.1) em (4.1.4) encontramos que x_A e x_B satisfazem

$$\begin{aligned} x^2 + (ax + b)^2 + 2xr_1 &= 0, \\ (1 + a^2)x^2 + 2(ab + r_1)x + b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontramos

$$x_A = \frac{-(ab + r_1) - \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}, \tag{4.1.6}$$

$$x_B = \frac{-(ab + r_1) + \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \tag{4.1.7}$$

Segue que

$$d_x = x_B - x_A = \frac{2\sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \tag{4.1.8}$$

Usando as equações (4.1.2), (4.1.6) e (4.1.7) encontramos

$$ab + r_1 = 2\sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}. \quad (4.1.9)$$

Logo, substituindo (4.1.9) em (4.1.8) temos

$$d_x = x_B - x_A = \frac{ab + r_1}{1 + a^2}. \quad (4.1.10)$$

De forma análoga, substituindo (4.1.1) em (4.1.5) encontramos que x_C e x_D satisfazem

$$x^2 + (ax + b)^2 - 2xr_2 = 0,$$

$$(1 + a^2)x^2 + 2(ab - r_2)x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontramos

$$x_C = \frac{r_2 - ab - \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}, \quad (4.1.11)$$

$$x_D = \frac{r_2 - ab + \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.12)$$

Segue que

$$d_x = x_D - x_C = \frac{2\sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.13)$$

Usando as equações (4.1.3), (4.1.11) e (4.1.12) encontramos

$$r_2 - ab = 2\sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2}. \quad (4.1.14)$$

Logo, substituindo (4.1.14) em (4.1.13) temos

$$d_x = x_D - x_C = \frac{r_2 - ab}{1 + a^2}. \quad (4.1.15)$$

De (4.1.10) e (4.1.15) segue que

$$ab = \frac{r_2 - r_1}{2}. \quad (4.1.16)$$

Notamos também que

$$d_x = x_C - x_B = \frac{r_2 + r_1 - \sqrt{(ab - r_2)^2 - (1 + a^2)b^2} - \sqrt{(ab + r_1)^2 - (1 + a^2)b^2}}{1 + a^2}. \quad (4.1.17)$$

Agora usando (4.1.15), (4.1.17) e (4.1.16) encontramos

$$\frac{r_1 - r_2}{2} = r_1 - 2\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2},$$

$$b^2 = \frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{16}. \quad (4.1.18)$$

Elevando ao quadrado (4.1.16) e usando (4.1.18) encontramos

$$a^2 = \frac{4(r_2 - r_1)^2}{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}. \quad (4.1.19)$$

De (4.1.15), (4.1.16) e (4.1.19) segue que

$$d_x = \frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{6(r_1 + r_2)}.$$

Adicionalmente, aplicando o teorema de Pitágoras, por exemplo, no triângulo EFJ , temos $d = \sqrt{1 + a^2d_x}$. Segue que

$$d = \sqrt{\frac{14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2}{12}}.$$

Como r_1, r_2, a^2, b^2, d e d_x são números positivos devemos ter $14r_1r_2 - r_1^2 - r_2^2 > 0$, logo somente existe solução quando

$$\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1r_2} < 12.$$

Chamando $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$ a desigualdade anterior pode ser reescrita como

$$\lambda^2 - 14\lambda + 1 < 0.$$

A mesma se verifica quando

$$7 - 4\sqrt{3} < \lambda < 7 + 4\sqrt{3},$$

$$7 - 4\sqrt{3} < \frac{r_1}{r_2} < 7 + 4\sqrt{3}.$$

4.2 Eixo Radical, Circuncentro. SL IMO 1994 P15

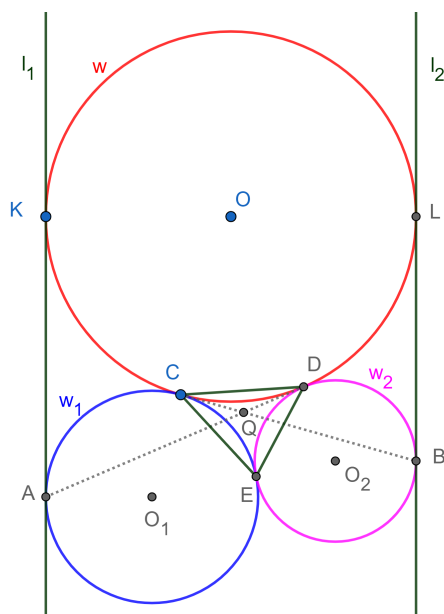
Problema 9. *Uma circunferência w é tangente a duas linhas paralelas l_1 e l_2 . Uma segunda circunferência w_1 é tangente a l_1 em A e a w externamente em C . Uma terceira circunferência w_2 é tangente a l_2 em B , externamente a w em D e a w_1 externamente em E . Os segmentos AD e BC se interceptam no ponto Q . Provar que Q é o circuncentro do triângulo CDE .*

A IMO 1994 foi realizada em Hong Kong, região administrativa especial chinesa [7]. O problema acima foi proposto pela delegação da Rússia [8].

4.2.1 Resolução

A Figura 4.2.1 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação.

Figura 4.2.1: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa das figuras desta seção pode ser consultada em [29].



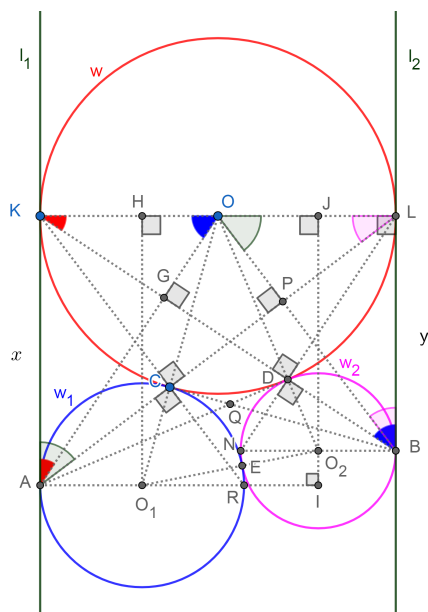
Fonte: O autor.

Sejam as circunferências w , w_1 e w_2 de centros O , O_1 e O_2 e raios r , r_1 e r_2 , respectivamente. Sejam os pontos K e L de tangencia de w com l_1 e l_2 , respectivamente.

A ideia da prova será mostrar que a reta AD é uma tangente comum as circunferências w e w_2 . Com isto, a reta AD é o eixo radical de w e w_2 . Analogamente, mostrando que a reta BC é uma tangente comum as circunferências w e w_1 , segue que a reta BC é o eixo radical de w e w_1 . Consequentemente, Q é o centro radical das três circunferências: w , w_1 e w_2 . O centro radical tem a mesma potência em relação as três circunferências, logo equidista dos pontos de tangencia C , D e E .

Iniciamos conetando os centros das circunferências e traçando o diâmetro KL . Como K e L são pontos de tangencia o diâmetro KL é perpendicular a l_1 e l_2 . Determinamos os pontos H e J como os pés das perpendiculares a KL que passam por O_1 e O_2 , respectivamente. O ponto I é encontrado na interseção da reta JO_2 com uma reta paralela a KL passando por O_1 (Figura 4.2.2).

Figura 4.2.2: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa das figuras desta seção pode ser consultada em [29].



Fonte: O autor.

Sejam $KA = HO_1 = x$ e $LB = JO_2 = y$. Temos que $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $HO = r - r_1$, $OJ = r - r_2$, $O_1I = 2r - r_1 - r_2$ e $O_2I = x - y$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_1HO , retângulo em H , temos

$$x^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2,$$

$$x^2 = 4rr_1. \tag{4.2.1}$$

Analogamente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_2JO , retângulo em J , temos

$$y^2 = (r + r_2)^2 - (r - r_2)^2,$$

$$y^2 = 4rr_2. \tag{4.2.2}$$

E aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_1IO_2 , retângulo em I , temos

$$(x - y)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (2r - r_1 - r_2)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4rr_1 + 4rr_2 - 4r^2. \tag{4.2.3}$$

Substituindo (4.2.1) e (4.2.2) em (4.2.3) encontramos

$$xy = 2r^2,$$

$$\frac{x}{r} = \frac{2r}{y}. \quad (4.2.4)$$

A equação (4.2.4) implica que os triângulos AKO e KLB são semelhantes pelo critério LAL, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ($\angle AKO = \angle BLK = 90^\circ$). Segue KB é perpendicular a AO , pois AK é paralelo a com BL e KO paralelo com KL . Seja $G = KB \cap AO$, temos $\angle OGD = 90^\circ$.

Seja $N \in w_2$ tal que NB é diâmetro. Temos que $\angle NDB = \angle KDL = 90^\circ$, logo $D = BK \cap NL$.

Como o triângulo OKD é isósceles de base KD ($OK = OD$) e OG é altura segue que OG também é bissetriz do ângulo KOD e $\angle KOG = \angle DOG$. Os triângulos AKO e ADO são congruentes por LAL (AO é comum e KO e DO são raios de w). Concluimos que $\angle AKO = \angle ADO = 90^\circ$ e a reta AD é tangente a w e w_2 .

Analogamente, a equação (4.2.4) também implica que os triângulos AKL e BLO são semelhantes pelo critério LAL, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ($\angle AKL = \angle BLO = 90^\circ$). Segue AL é perpendicular a BO , pois AK é paralelo a com BL e LK paralelo com LO . Seja $P = AL \cap BO$, temos $\angle OPC = 90^\circ$.

Seja $R \in w_1$ tal que AR é diâmetro. Temos que $\angle ACR = \angle KCL = 90^\circ$, logo $C = AL \cap KR$.

Como o triângulo OCL é isósceles de base CL ($OL = OC$) e OP é altura segue que OP também é bissetriz do ângulo COL e $\angle COP = \angle LOP$. Os triângulos COB e LOB são congruentes por LAL (OB é comum e CO e LO são raios de w). Concluimos que $\angle OLB = \angle OCB = 90^\circ$ e a reta BC é tangente a w e w_1 . Este problema também está resolvido na vídeo aula [30].

4.3 Potência de um ponto e eixo radical. P5 IMO 2012.

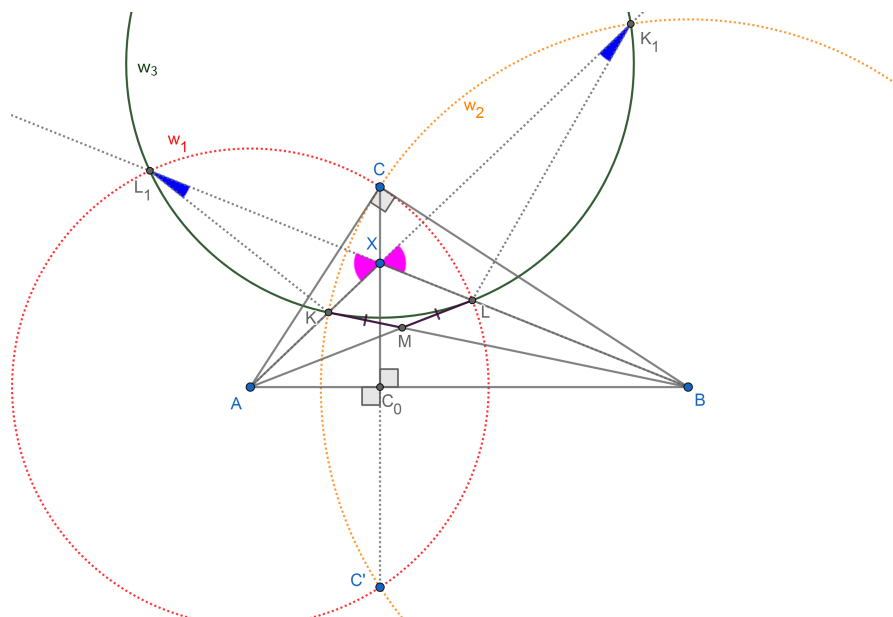
Problema 10. *Seja ABC um triângulo tal que $\angle BCA = 90^\circ$, e seja C_0 o pé da altura relativa a C . Seja X um ponto no interior do segmento CD . Seja K o ponto do segmento AX tal que $BK = BC$. Analogamente, seja L o ponto do segmento BX tal que $AL = AC$. Seja M o ponto de interseção de AL com BK . Provar que $MK = ML$.*

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina [7].

4.3.1 Resolução

A Figura 4.3.1 ajuda entender a descrição que segue.

Figura 4.3.1: Uma solução possível do problema. Gráfico interativo disponível em [31].



Fonte: O autor.

Seja C' a reflexão do ponto C na linha AB , e ω_1 e ω_2 circunferências com centros A e B , que passam por L e K , respectivamente. Devido a $AC' = AC = AL$ e $BC' = BC = BK$, tanto ω_1 como ω_2 passam por C e C' . De $\angle BCA = 90^\circ$ temos que AC é tangente a ω_2 em C , e BC é tangente a ω_1 em C . Seja $K_1 \neq K$ a segunda interseção de AX e ω_2 , e $L_1 \neq L$ a segunda interseção de BX e ω_1 .

Calculando a potência do ponto X com relação a ω_2 e ω_1 temos:

$$Pot_{\omega_2}(X) = XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC' = XL \cdot XL_1 = Pot_{\omega_1}(X). \quad (4.3.1)$$

Notamos que X é um ponto do eixo radical das circunferências ω_1 e ω_2 que passa por C e C' . Da equação (4.3.1) segue que

$$\frac{XK}{XL} = \frac{XL_1}{XK_1}.$$

O resultado anterior e o fato que $\angle L_1XK = \angle K_1XL$ indicam que $\triangle L_1XK \sim \triangle K_1XL$. Como consequência temos que $\angle KL_1X = \angle LK_1X$, o qual leva a que o quadrilátero K_1LKL_1 é inscritível (circunferência ω_3).

A potência de A com relação a ω_2 pode ser calculada de duas formas:

$$AC^2 = Pot_{\omega_2}(A) = AK \cdot AK_1.$$

Como $AC = AL$ por hipótese temos que:

$$AL^2 = AK \cdot AK_1 = Pot_{w_3}(A).$$

Isto é, AL é tangente a w_3 .

Analogamente, a potência de B com relação a ω_1 pode ser calculada de duas formas:

$$BC^2 = Pot_{w_1}B = BL \cdot BL_1.$$

Como $BC = BK$ por hipótese temos que:

$$BK^2 = BL \cdot BL_1 = Pot_{w_3}B.$$

Isto é, BK é tangente a w_3 . Segue que MK e ML são duas tangentes de M a ω_3 e $MK = ML$. Uma solução em vídeo está disponível em [32].

Capítulo 5

Congruência e Semelhança de Triângulos

5.1 Congruência de triângulos e duas circunferências secantes. IMO 1979 P3

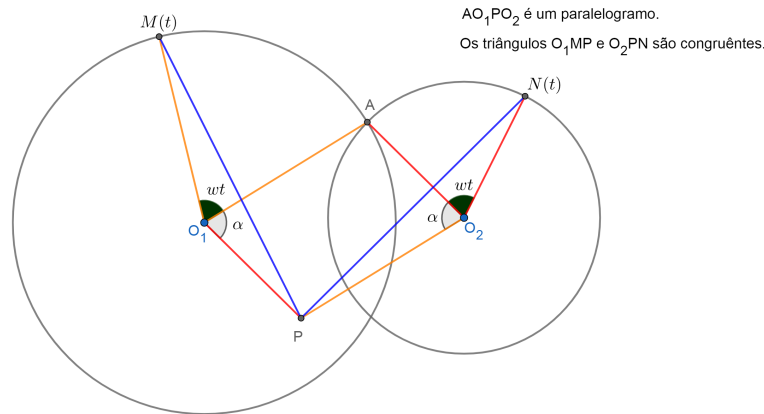
Problema 11. *Em um plano existem duas circunferências secantes. Seja A um dos pontos de interseção das duas circunferências. Dois pontos começam a mover-se simultaneamente com velocidade constante partindo do ponto A , cada ponto seguindo uma das circunferências. Os dois pontos completam no mesmo tempo a volta na sua circunferência até o ponto A novamente. Suponha que na circunferência da esquerda o movimento é no sentido anti-horário e na circunferência da direita, horário. Provar que existe um ponto P no plano tal que em cada momento de tempo as distâncias do ponto P aos pontos em movimento são iguais.*

A IMO 1979 foi realizada em Londres, Inglaterra [7]. O problema acima foi proposto por N. Vasilyev e I. F. Sharygin da delegação da antiga União Soviética para IMO de 1979 [8].

5.1.1 Resolução

Sejam O_1 e O_2 os centros das duas circunferências e $M(t)$ e $N(t)$ os pontos em movimento no instante de tempo t . A Figura 5.1.1 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação.

Figura 5.1.1: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação.



Fonte: O autor.

Considere P o ponto tal que o quadrilátero AO_1PO_2 seja um paralelogramo. Isto é, $PO_1 = AO_2$ (em vermelho) e $AO_1 = PO_2$ (em amarelo).

Temos também que $NO_2 = AO_2$ (em vermelho) e $AO_1 = MO_1$ (em amarelo) pois são, respectivamente, raios da mesma circunferência. Segue que $NO_2 = PO_1$ (em vermelho) e $PO_2 = MO_1$ (em amarelo).

Como AO_1PO_2 é um paralelogramo temos que os ângulos opostos são iguais, em particular $AO_1P = AO_2P = \alpha$.

Adicionalmente, como os dois pontos, M e N , completam no mesmo tempo a volta na sua circunferência com velocidade instantânea linear constante (embora $v_M \neq v_N$ quando os raios diferem) suas velocidades angulares são iguais ($w_M = w_N = w$) o tempo todo. Isto é, os ângulos $AO_1M = AO_2N = wt$ (em verde) para todo t .

Segue que os ângulos $PO_1M = PO_2N = \alpha + wt$ para todo t . Pelo critério lado-ângulo-lado (LAL) os triângulos PO_1M e NO_2P são congruentes.

Conclui-se que $PM = NP$ (em azul) para todo t , como queríamos provar. Este problema também está resolvido na vídeo aula [33].

5.2 Pentágono regular, razão áurea e semelhança. P3 N.E. IGO 2017

Problema 12. *Em um pentágono regular $ABCDE$, a perpendicular em C a CD encontra AB em F . Provar que*

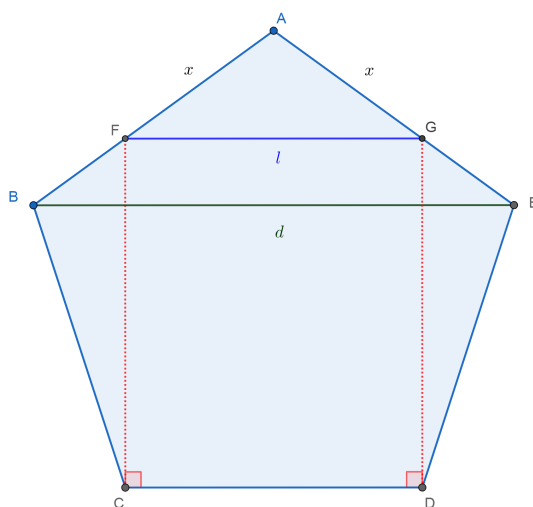
$$AE + AF = BE. \quad (5.2.1)$$

Problema 3 (Nível Elementar) da 4 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017 [16].

5.2.1 Resolução

A Figura 5.2.1 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.

Figura 5.2.1: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação.



Fonte: O autor.

Seja l o comprimento dos lados do pentágono regular. Em particular, $AE = CD = l$. Traçamos o segmento $BE = d$, um dos diâmetros.

Esboçamos a perpendicular em D a CD , que encontra AE em G . Temos que o segmento FG é paralelo aos segmentos CD e BE pela simetria do pentágono regular. Como o quadrilátero $CDGF$ é um retângulo temos que $FG = l$. Denotamos $AF = AG = x$.

Os triângulos ABE e AFG são isósceles de base BE e FG , respetivamente, e semelhantes.

Segue que os lados são proporcionais:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{x} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Sabemos [34] que a razão diâmetro lado, $\frac{d}{l}$, no pentágono regular é igual a razão áurea maior, $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Com isto, podemos reescrever (5.2.1) como:

$$AE + AF = BE,$$

$$l + x = d,$$

$$1 + \frac{x}{l} = \frac{d}{l},$$

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi,$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Nesta última equação quadrática em ϕ a única solução positiva é $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, o que prova (5.2.1). Uma resolução em vídeo está disponível em [35].

5.3 Circunferência inscrita, linha tangente, congruência de triângulos. P1 NA IGO 2017

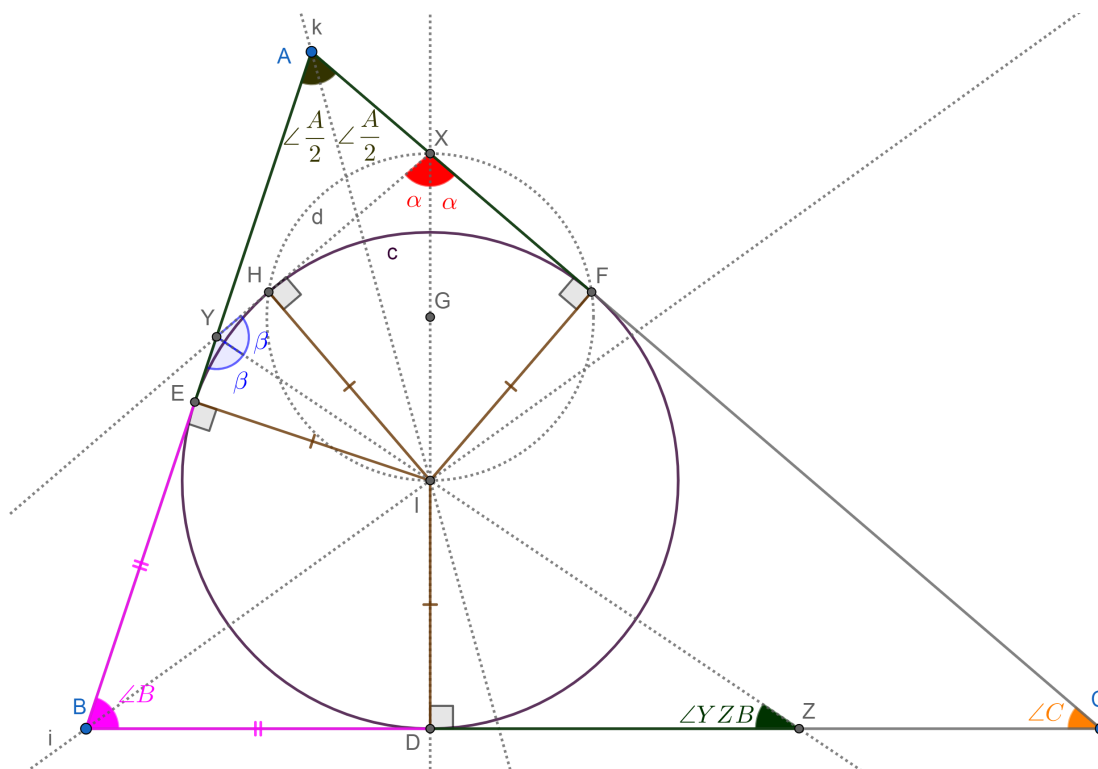
Problema 13. *No triângulo ABC , o incírculo, com centro I , toca o lado BC no ponto D . A linha DI encontra AC em X . A linha tangente de X com o incírculo (diferente de AC) intersecta AB em Y . Se YI e BC se intersectam no ponto Z , provar que $AB = BZ$.*

Problema 1 (Nível Avançado) da 4 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017 [16].

5.3.1 Resolução

Discutiremos somente o caso em que $AC > AB$. A Figura 5.3.1 mostra os passos de uma construção possível.

Figura 5.3.1: Passos de uma construção possível para auxiliar na solução do problema. Versão interativa em [36].



Fonte: O autor.

Se encontra o ponto I , centro da circunferência inscrita c no triângulo ABC , na interseção de pelo menos duas bissetrizes (retas i no vértice B e k em A). Para traçar a semirreta XY é preciso marcar o ponto médio do segmento XI (ponto G) e com centro em G e raio GI esboçar a circunferência d . Se destacam os pontos de interseção entre as circunferências c e d (H e F). A semirreta XH se intersecta com AB no ponto Y . O resto da construção é feita como descrita no enunciado do problema.

Os triângulos retângulos XHI e XFI são congruentes pelo critério cateto ($HI = FI$) hipotenusa (XI , comum). Segue que $HX = XF$ e $\angle HXI = \angle FXI = \angle CXD = \alpha$. Do triângulo retângulo XDC temos $\alpha = 90^\circ - \angle C$.

De forma análoga, os triângulos retângulos YHI e YEI são congruentes pelo critério cateto ($HI = EI$) hipotenusa (YI , comum). Segue que $HY = YE$ e $\angle HYI = \angle EYI = \beta$. No quadrilátero $BYXD$ a soma dos ângulos internos é $\angle B + 2\beta + (90^\circ - \angle C) + 90^\circ = 360^\circ$. Logo,
$$\beta = 90^\circ + \frac{\angle C - \angle B}{2}.$$

Do triângulo BYZ temos que $\angle YZB = 180^\circ - \angle B - \beta$. Segue que

$$\angle YZB = 90^\circ - \angle B - \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2}.$$

Usando agora o triângulo ABC temos que $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$. Logo, $\angle YZB = \frac{\angle A}{2}$.

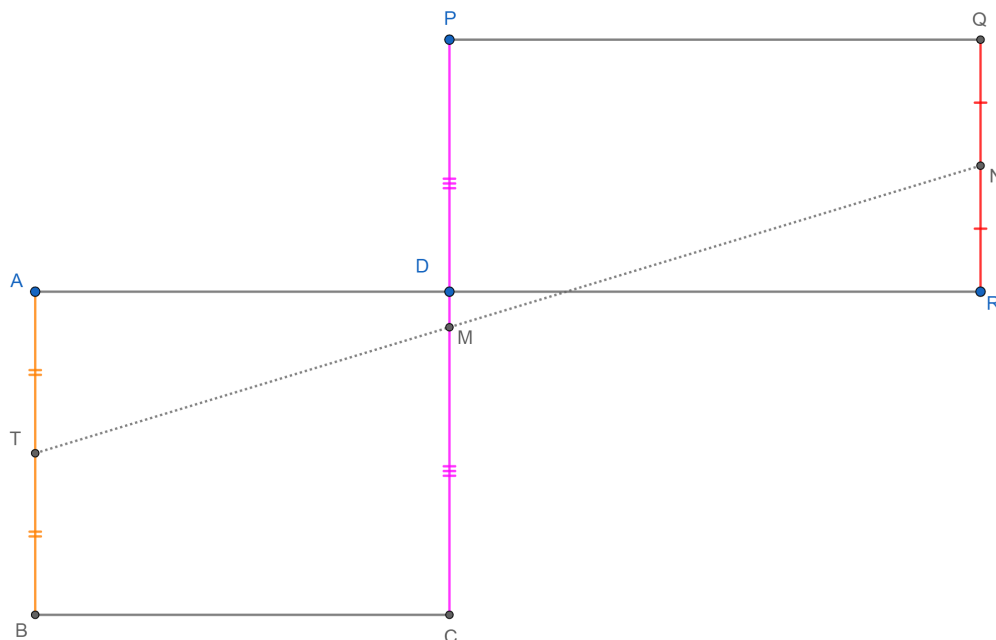
Podemos afirmar que os triângulos AIF e ZID são congruentes pelo critério lado-ângulo-ângulo oposto (LAAo). De fato, $IF = ID$, $\angle IFA = \angle IDZ = 90^\circ$ e $\angle IAF = \angle IZD = \angle YZB = \frac{\angle A}{2}$. Segue que $DZ = FA$.

Como $FA = AE$ ($\triangle AEI \equiv \triangle AFI$) temos que $DZ = EA$. Adicionalmente, $BE = BD$ pois $\triangle EBI \equiv \triangle DBI$. Isto conclui a prova no caso $AC > AB$: $AB = AE + EB = BD + DZ = BZ$. Uma solução em vídeo está disponível em [37].

5.4 Pontos colineares, semelhança de triângulos e paralelogramo. P2 E IGO 2019

Problema 14. *Como mostrado na Figura 5.4.1, os retângulos $ABCD$ e $PQRD$ tem a mesma área e lados correspondentes paralelos. Sejam N , M e T pontos médios dos segmentos QR , PC e AB , respectivamente. Provar que N , M e T são colineares.*

Figura 5.4.1: Versão interativa em [38].

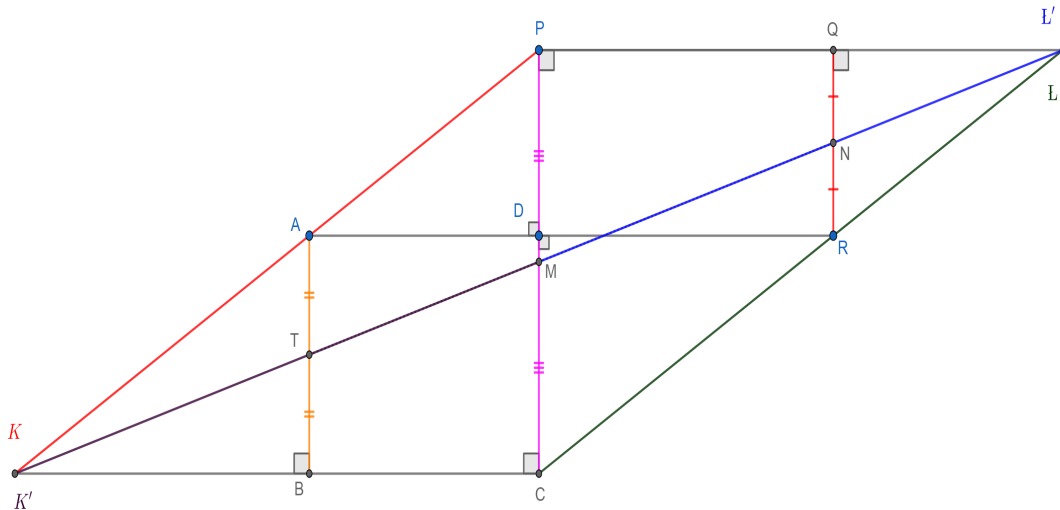


Fonte: Problema 2 (Nível Elemental) da 6 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2019. Proposto por Morteza Saghafian [39].

5.4.1 Resolução

A Figura 5.4.2 ajuda a entender a explicação a seguir.

Figura 5.4.2: Uma solução do problema. Versão interativa em [38].



Fonte: O autor.

Sejam L e L' os pontos de interseção das retas CR e MN com PQ , respectivamente. Iremos mostrar que $L = L'$ e conseqüentemente M , N e L são colineares.

Como $PQRD$ é um retângulo temos que $\angle CPL = \angle RQL = 90^\circ$. Adicionalmente, $\angle CLP = \angle RLQ$ é comum aos triângulos CPL e RQL . Por AA segue que $\triangle CPL \sim \triangle RQL$. Logo,

$$\frac{CP}{RQ} = \frac{PL}{QL}.$$

Também temos que $\angle MPL' = \angle NQL' = 90^\circ$. Adicionalmente, $\angle ML'P = \angle NL'Q$ é comum aos triângulos MPL' e NQL' . Por AA segue que $\triangle MPL' \sim \triangle NQL'$. Logo,

$$\frac{MP}{NQ} = \frac{PL'}{QL'}.$$

Sendo N e M pontos médios dos segmentos QR e PC temos que

$$\frac{CP}{RQ} = \frac{MP}{NQ}.$$

Consequentemente,

$$\frac{PL}{QL} = \frac{PL'}{QL'}.$$

Isto é, mostramos que $L = L'$ e M , N e L são colineares.

Analogamente, sejam K e K' os pontos de interseção das retas PA e MT com CB , respetivamente. Iremos mostrar que $K = K'$ e consequentemente K , T e M são colineares.

Como $ABCD$ é um retângulo temos que $\angle PCK = \angle ABK = 90^\circ$. Adicionalmente, $\angle PKC = \angle AKB$ é comum aos triângulos PCK e ABK . Por AA segue que $\triangle PCK \sim \triangle ABK$. Logo,

$$\frac{PC}{AB} = \frac{CK}{BK}.$$

Também temos que $\angle MCK' = \angle TBK' = 90^\circ$. Adicionalmente, $\angle MK'C = \angle TK'B$ é comum aos triângulos MCK' e TBK' . Por AA segue que $\triangle MCK' \sim \triangle TBK'$. Logo,

$$\frac{MC}{TB} = \frac{CK'}{BK'}.$$

Sendo T e M pontos médios dos segmentos AB e PC temos que

$$\frac{PC}{AB} = \frac{MC}{TB}.$$

Consequentemente,

$$\frac{CK}{BK} = \frac{CK'}{BK'}.$$

Isto é, mostramos que $K = K'$ e K , T e M são colineares.

Notamos agora que, como $ABCD$ e $PQRD$ são retângulos, temos:

$$BC \parallel PQ \Rightarrow KC \parallel PL.$$

Neste ponto usamos que os retângulos $ABCD$ e $PQRD$ tem a mesma área:

$$AD \cdot DC = DP \cdot RD \Rightarrow \frac{AD}{RD} = \frac{DP}{DC}.$$

Juntando a última relação ao fato $\angle ADP = \angle RDC = 90^\circ$, temos $\triangle ADP \sim \triangle RDC$. Segue que

$$AP \parallel RC \Rightarrow KP \parallel CL.$$

Logo, $PKCL$ é um paralelogramo e KL é uma diagonal. Com isto concluímos que os pontos T , M e N são colineares, como queríamos provar. Uma solução em vídeo está disponível em [40].

5.5 Ângulos, quadrilátero e congruência de triângulos. P4 E IGO 2019

Problema 15. *No quadrilátero $ABCD$ vale que*

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ$$

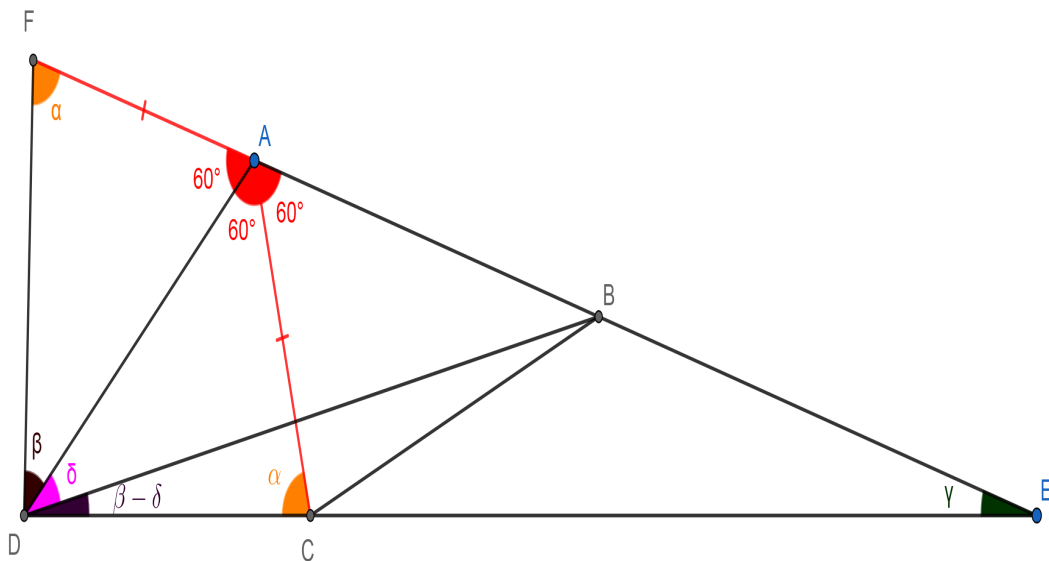
e $AB = BD - AC$. As linhas AB e CD se intersectam no ponto E . Provar que $\angle ADB = 2\angle BEC$.

Problema 4 (Nível Elemental) da 6 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2019. Proposto por Iman Maghsoudi [39].

5.5.1 Resolução

A Figura 5.5.1 ajuda a entender a explicação a seguir.

Figura 5.5.1: Uma solução do problema. Versão interativa em [41].



Fonte: O autor.

A igualdade $AB = BD - AC$ pode ser reescrita como $AB + AC = BD$. Isto sugere estender a linha AB e marcar o ponto F sobre a mesma, com A entre F e B , de tal forma que $AF = AC$. Completamos o desenho da figura acima com o segmento FD .

Por hipóteses e pela construção temos que $\angle DAF = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Como $BF = AB + AF = AB + AC = BD$, então o triângulo BDF é isósceles de base DF e $\angle BDF = \angle BFD = \alpha$.

Os triângulos ADF e ADC são congruentes pelo critério lado-ângulo-lado ($AC = AF$, $\angle DAF = \angle DAC = 60^\circ$ e AD lado comum). Segue que $\angle ADC = \angle ADF = \beta$ e $\angle ACD = \angle AFD = \alpha$.

Queremos provar que $\delta = \angle ADB = 2\angle BEC = 2\gamma$. Primeiro, notamos que $\alpha = \beta + \delta$ ou $\delta = \alpha - \beta$.

Segundo, no triângulo ADF usamos que a soma dos ângulos internos é 180° . Isto é, $\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Logo, $\alpha = 120^\circ - \beta$ e segue que $\delta = 120^\circ - 2\beta = 2(60^\circ - \beta)$.

Terceiro, o ângulo DAF é externo em A ao triângulo ADE . Segue que $\beta + \gamma = 60^\circ$ ou $\gamma = 60^\circ - \beta$. Concluimos que $\delta = 2\gamma$, como queríamos provar. Uma solução em vídeo está disponível em [42].

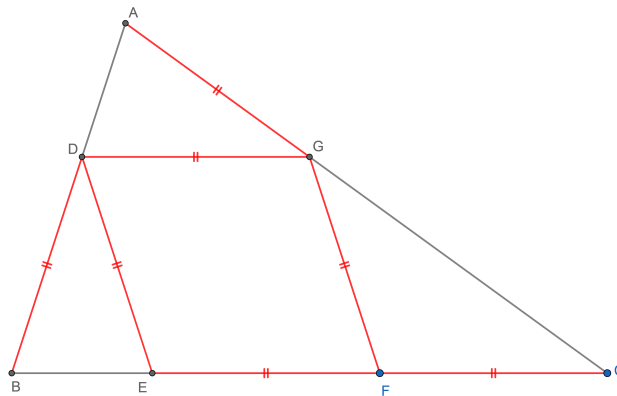
Capítulo 6

Outros

6.1 Triângulos isósceles, losango e paralelogramo. P2 N.E. IGO 2017

Problema 16. Na Figura 6.1.1 os segmentos destacados (em vermelho) tem o mesmo comprimento. Determinar todos os ângulos no interior do triângulo ABC .

Figura 6.1.1: Ilustração do problema.

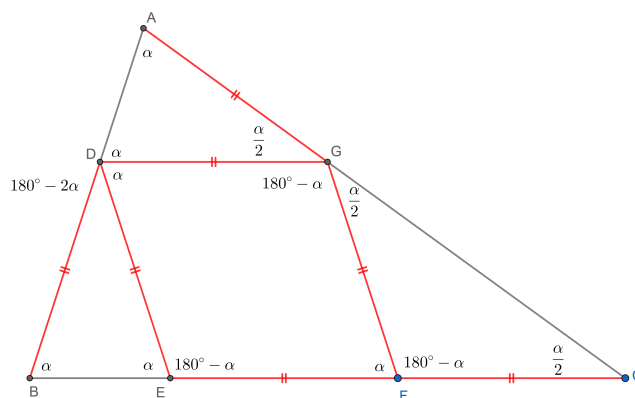


Fonte: Problema 2 (Nível Elemental) da 4 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017 [16].

6.1.1 Resolução

A Figura 6.1.2 ajuda a entender a solução do problema.

Figura 6.1.2: Ilustração da resolução do problema.



Fonte: O autor.

Como o triângulo DBE é isósceles de base BE os ângulos $\angle DBE = \angle DEB = \alpha$. O ângulo $\angle DEF = 180^\circ - \alpha$, por ser suplementar com o ângulo $\angle DEB$.

O quadrilátero $EFGD$ é um losango (quatro lados de igual medida). Todo losango é um paralelogramo. Logo, os pares de segmentos DE e GF e DG e EF são paralelos, respetivamente. Os ângulos $\angle DBE = \angle ADG = \alpha$, $\angle DEB = \angle GFE = \alpha$ e $\angle DEF = \angle GFC = 180^\circ - \alpha$ são correspondentes entre paralelas.

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes. Segue que $\angle GFE = \angle EDG = \alpha$ e $\angle DEF = \angle DGF = 180^\circ - \alpha$. Como os triângulos FCG e GAD são isósceles de base CG e AD , respetivamente, temos que $\angle FCG = \angle FGC = \beta$ e $\angle GAD = \angle GDA = \alpha$.

O $\angle GFE$ é externo no vértice F ao triângulo FCG , logo $2\beta = \alpha$. Como a soma dos ângulos internos em um triângulo é 180° temos também que $\angle AGD = \angle BDE = 180^\circ - 2\alpha$.

Por outro lado, o $\angle AGC = 180^\circ$, logo devemos ter $\angle AGD = \frac{\alpha}{2}$. Segue que:

$$180^\circ - 2\alpha = \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{5\alpha}{2} = 180^\circ.$$

Concluimos que $\alpha = 72^\circ$.

6.2 Desigualdade triangular, triângulo equilátero. IMO 1973 P4

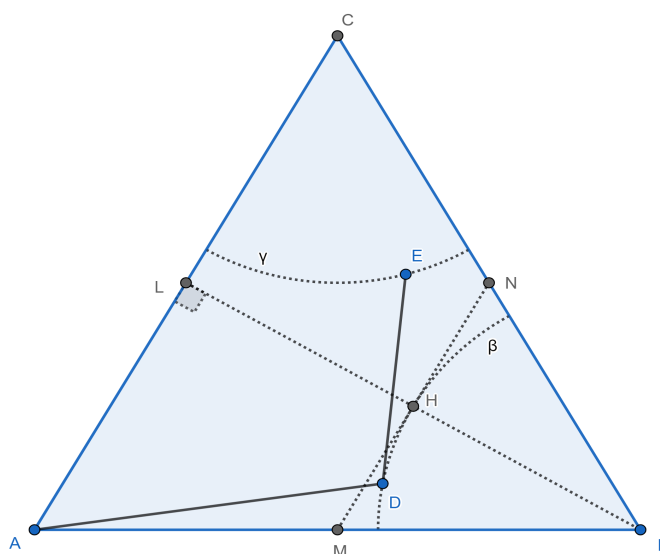
Problema 17. *Um soldado tem que detectar minas em um área com a forma de um triângulo equilátero. O raio do seu detector é igual a metade da altura do triângulo. O soldado começa em um vértice do triângulo. Determinar o caminho mais curto que o soldado deve seguir que garanta que toda a região seja checada.*

A IMO 1973 foi realizada na cidade de Moscou, capital da Rússia [7]. O problema acima foi proposto por Dorde Dugosija da delegação da Iugoslávia [8].

6.2.1 Resolução

A Figura 6.2.1 mostra um triângulo equilátero ABC . M , N e L são pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente. Os arcos de circunferência β e γ tem raios iguais a metade da altura do triângulo ABC e estão centrados em C e B , respectivamente. H é o ponto de interseção da altura (LB) em relação ao vértice B , a base média (MN) e o arco de circunferência β . MN é paralela com AC e tangente a β .

Figura 6.2.1: Triângulo equilátero ABC . M , N e L são pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente. Os arcos de circunferência β e γ tem raios iguais a metade da altura do triângulo ABC e estão centrados em C e B , respectivamente. H é o ponto de interseção da altura (LB) em relação ao vértice B , a base média (MN) e o arco de circunferência β . MN é tangente a β . Uma versão interativa das figuras desta seção pode ser consultada em [43].



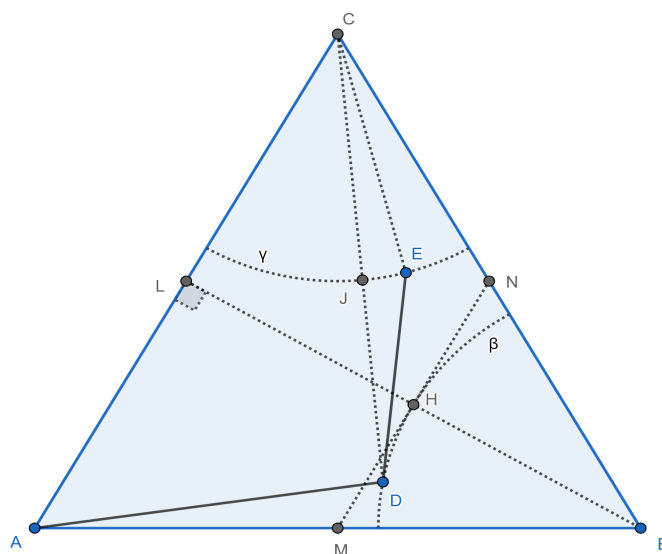
Fonte: O autor.

Supondo que o soldado parta do vértice A ele deve chegar no mínimo a um ponto $D \in \beta$ para verificar toda a área dentro do triângulo perto do vértice B . Da mesma forma, o soldado deve alcançar um ponto $E \in \gamma$ para verificar toda a área dentro do triângulo perto do vértice C . Logo, precisamos minimizar a soma dos comprimentos dos segmentos AD e DE .

Seja l a medida dos lados do triângulo ABC , usando o Teorema de Pitágoras se prova que $LB = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ e os raios de β e γ são $\frac{\sqrt{3}}{4}l$.

Na Figura 6.2.2 adicionamos os segmentos CE , CD e o ponto J , interseção de γ com CD .

Figura 6.2.2: A figura anterior adicionamos os segmentos CE , CD e o ponto J , interseção de γ com CD . Uma versão interativa das figuras desta seção pode ser consultada em [43].



Fonte: O autor.

Pela desigualdade triangular aplicada no triângulo CDE temos:

$$CD < CE + DE.$$

Segue que independentemente da posição do ponto E teremos:

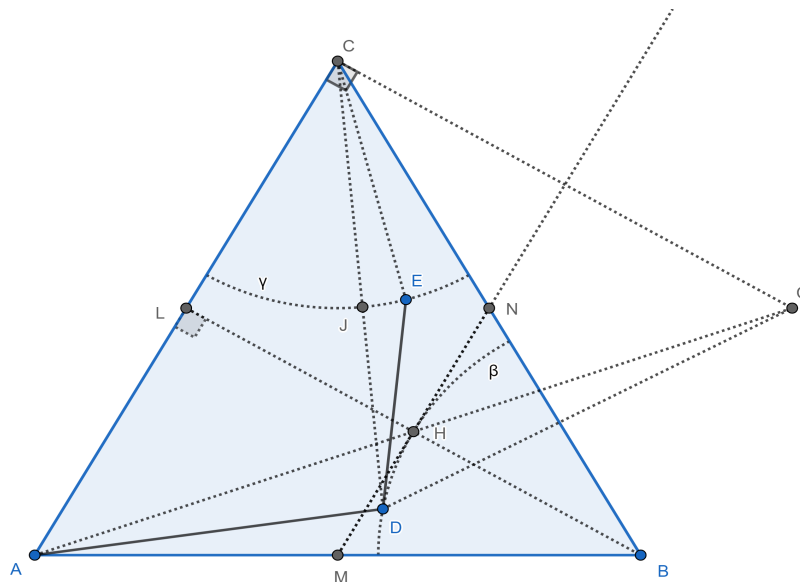
$$DE \geq CD - CE,$$

$$DE \geq CD - \frac{\sqrt{3}}{4}l. \tag{6.2.1}$$

Fixado D , a igualdade em (6.2.1) acontece quando o ponto E coincide com o ponto J .

Na Figura 6.2.3 adicionamos o ponto C' , reflexão do ponto C em relação a semirreta MN . Notamos que $CC' = LB$. Também construímos os segmentos AC' e $C'D$.

Figura 6.2.3: A figura anterior adicionamos o ponto C' , reflexão do ponto C em relação a semirreta MN . Notamos que $CC' = LB$. Também construímos os segmentos AC' e $C'D$. Uma versão interativa das figuras desta seção pode ser consultada em [43].



Fonte: O autor.

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ACC' , retângulo em C , encontramos que:

$$AC' = \sqrt{AC^2 + (CC')^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2},$$

$$AC' = \frac{\sqrt{7}}{2}l.$$

Agora usaremos a desigualdade triangular no triângulo ADC' :

$$AC' < AD + DC'.$$

Segue que independentemente da posição do ponto D teremos:

$$AD \geq AC' - DC',$$

$$AD \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC'.$$

Sendo o ponto P a interseção das retas CD e MN (não mostrado) segue que $CP = PC'$, pois P está na reta de reflexão.

Pela desigualdade triangular aplicada no triângulo DPC' temos que

$$DC' \leq DP + PC' = DP + PC = DC.$$

Logo

$$AD \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC' \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC. \quad (6.2.2)$$

A igualdade em (6.2.2) acontece quando o ponto D coincide com o ponto H .

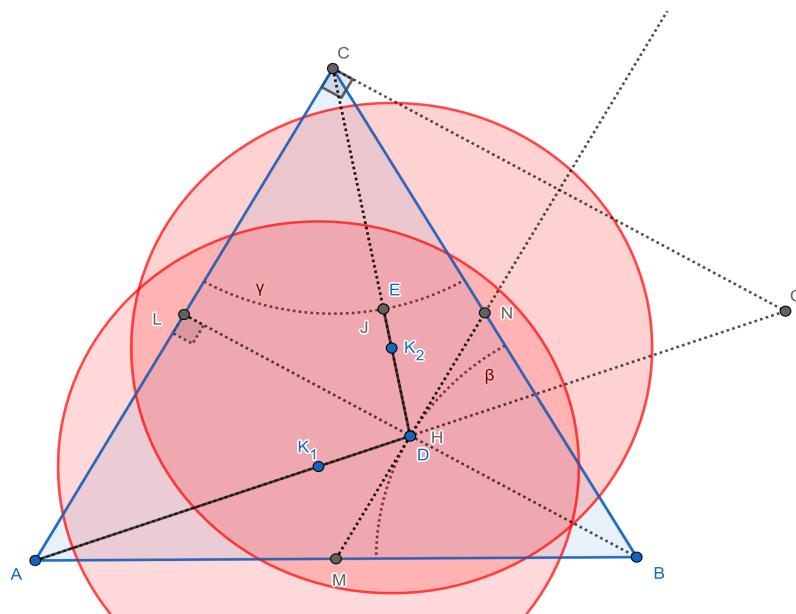
Somando as desigualdades (6.2.1) e (6.2.2) chegamos a:

$$AD + DE \geq \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) l. \quad (6.2.3)$$

Logo, o valor mínimo da soma $AD + DE$, igualdade em (6.2.3), acontece quando os pontos E e D coincidem com os pontos J e H , respectivamente.

Na Figura 6.2.4 está ilustrada a configuração que minimiza $AD + DE$. Além disso, são mostrados dois instantes de tempo, quando o soldado está em $K_1 \in AD = AH$ e em $K_2 \in DE = HJ$, e as áreas de cobertura, círculos de raio $\frac{\sqrt{3}}{4}l$, do detector de minas em cada caso. Seguindo o caminho indicado o soldado consegue verificar todo o interior e fronteira do triângulo ABC no menor tempo possível.

Figura 6.2.4: Configuração que minimiza $AD + DE$. Além disso, são mostrados dois instantes de tempo, quando o soldado está em $K_1 \in AD = AH$ e em $K_2 \in DE = HJ$, e as áreas de cobertura, círculos de raio $\frac{\sqrt{3}}{4}l$, do detector de minas em cada caso. Uma versão interativa das figuras desta seção pode ser consultada em [43].



Fonte: O autor.

6.3 Segmentos paralelos e ângulo excêntrico interior. IMO 2018 P1

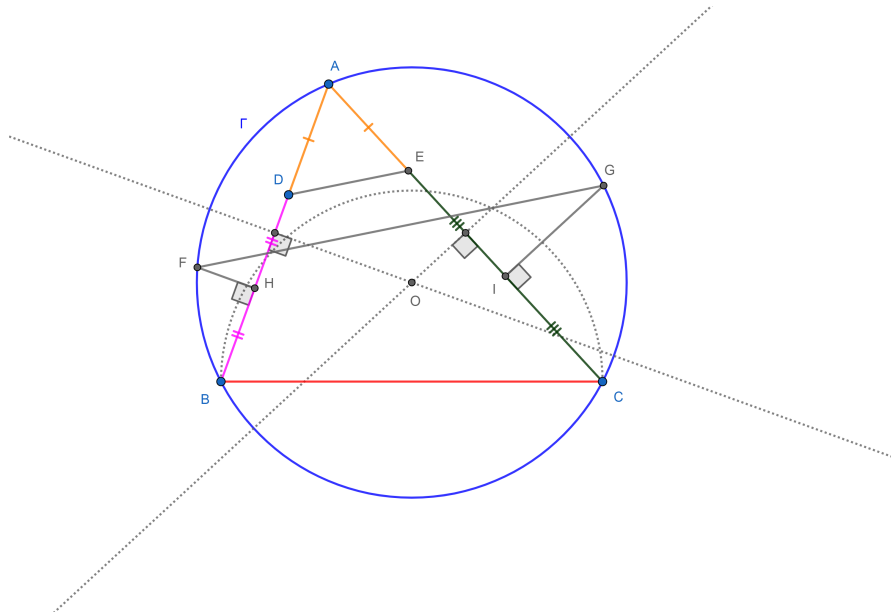
Problema 18. *Seja Γ o circuncirculo do triângulo acutângulo ABC . Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC , respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G , respectivamente. Provar que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).*

A IMO 2018 foi realizada na cidade de Cluj-Napoca, Romania. O problema acima foi proposto pela delegação da Grécia [7].

6.3.1 Resolução

A Figura 6.3.1 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema. O ponto O é o circuncentro do triângulo ABC e os pontos H e I as interseções de BD e CE com suas mediatrizes.

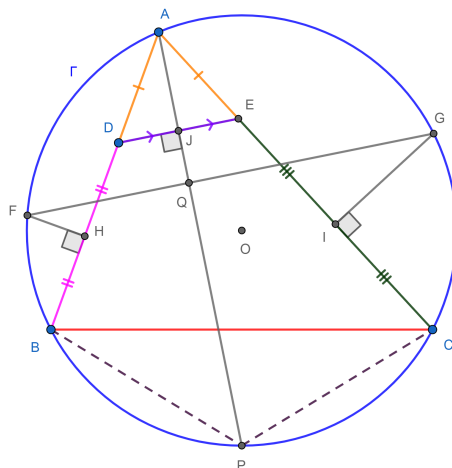
Figura 6.3.1: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa desta figura pode ser consultada em [44].



Fonte: O autor.

Traçamos uma bissetriz ao ângulo BAC e identificamos com as letras J , Q e P as interseções desta com os segmentos DE , FG e a circunferência Γ . Como $AD = AE$ o triângulo ADE é isósceles de base DE , $DJ = JE$ e a bissetriz AJ também é altura, logo o ângulo AJD é de 90° . Para mostrar que os segmentos DE e FG são paralelos bastará provar que o ângulo AQF é de 90° . Notamos também que a bissetriz AP do ângulo BAC divide ao arco menor de \widehat{BC} nos arcos menores de \widehat{BP} e \widehat{PC} de igual medida e $BP = PC$ (Figura 6.3.2).

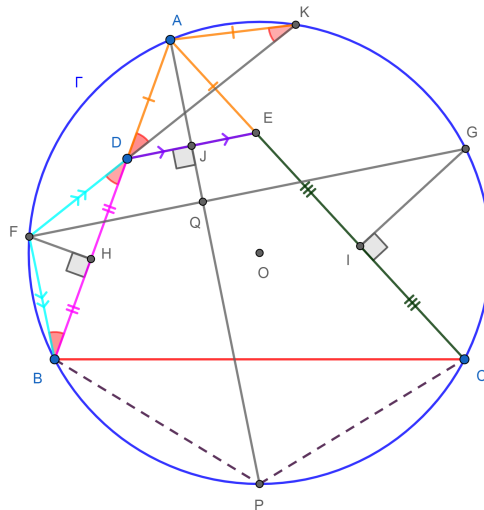
Figura 6.3.2: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa desta figura pode ser consultada em [44].



Fonte: O autor.

Traçamos a semirreta FD que intercepta à circunferência Γ no ponto K e o segmento FB . O triângulo FDB é isósceles pois FH é mediatriz de BD . Logo, os ângulos FBD e FDB são congruentes. Os ângulos AKF e ABF são congruentes por serem inscritos na circunferência Γ e ambos enxergarem o arco menor de \widehat{AF} . Os ângulos FDB e ADK são congruentes por serem opostos pelo vértice. Segue que o triângulo AKD é isósceles de base DK (Figura 6.3.3).

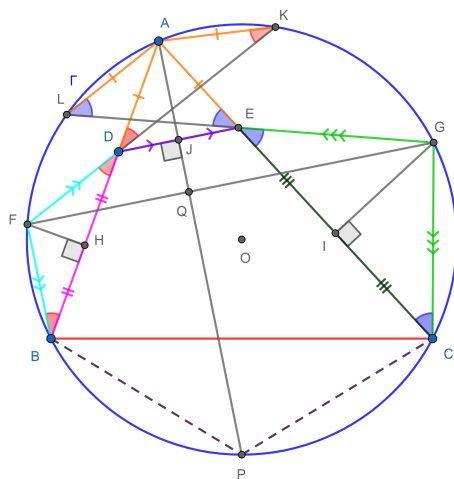
Figura 6.3.3: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa desta figura pode ser consultada em [44].



Fonte: O autor.

Analogamente, traçamos a semirreta GE que intercepta à circunferência Γ no ponto L e o segmento CG . O triângulo GEC é isósceles pois GI é mediatriz de EC . Logo, os ângulos GCE e GEC são congruentes. Os ângulos ALG e ACG são congruentes por serem inscritos na circunferência Γ e ambos enxergarem o arco menor de \widehat{AG} . Os ângulos GEC e AEL são congruentes por serem opostos pelo vértice. Segue que o triângulo AEL é isósceles de base EL (Figura 6.3.4).

Figura 6.3.4: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa desta figura pode ser consultada em [44].



Fonte: O autor.

Como o ângulo FBA é inscrito na circunferência Γ ele é metade do ângulo central indicado pela soma dos arcos menores de \widehat{FL} e \widehat{LA} :

$$\angle FBA = \frac{\widehat{FL} + \widehat{LA}}{2}. \tag{6.3.1}$$

Como o ângulo FDB é excêntrico interior ele é metade da soma dos arcos menores de \widehat{BF} e \widehat{AK} :

$$\angle FDB = \frac{\widehat{BF} + \widehat{AK}}{2}. \tag{6.3.2}$$

Como os ângulos FBD e FDB e os arcos menores de \widehat{AK} e \widehat{LA} (pois $AK = LA$) são congruentes segue de (6.3.1) e (6.3.2) que os arcos menores de \widehat{BF} e \widehat{FL} são congruentes e $BF = FL$.

Analogamente, como o ângulo ACG é inscrito na circunferência Γ ele é metade do ângulo central indicado pela soma dos arcos menores de \widehat{AK} e \widehat{KG} :

$$\angle ACG = \frac{\widehat{AK} + \widehat{KG}}{2}. \tag{6.3.3}$$

Como o ângulo GEC é excêntrico interior ele é metade da soma dos arcos menores de \widehat{AL}

e \widehat{CG} :

$$\angle GEC = \frac{\widehat{AL} + \widehat{CG}}{2}. \tag{6.3.4}$$

Como os ângulos ACG e GEC e os arcos menores de \widehat{AK} e \widehat{AL} (pois $AK = AL$) são congruentes segue de (6.3.3) e (6.3.4) que os arcos menores de \widehat{KG} e \widehat{GC} são congruentes e $KG = GC$.

Notamos agora que o ângulo AQF é excêntrico interior logo:

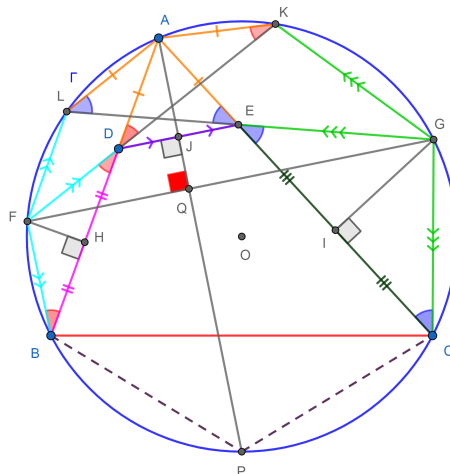
$$\angle AQF = \frac{\widehat{AF} + \widehat{PG}}{2} = \frac{\widehat{AL} + \widehat{LF} + \widehat{PC} + \widehat{CG}}{2}.$$

Como $AL = AK$, $LF = FB$, $PC = PB$ e $CG = GK$ temos que $\widehat{AL} = \frac{\widehat{KL}}{2}$, $\widehat{LF} = \frac{\widehat{LB}}{2}$, $\widehat{PC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ e $\widehat{CG} = \frac{\widehat{CK}}{2}$. Segue que

$$\angle AQF = \frac{\widehat{KL} + \widehat{LB} + \widehat{BC} + \widehat{CK}}{4} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

A Figura 6.3.5 incorpora todos os detalhes apresentados.

Figura 6.3.5: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão interativa desta figura pode ser consultada em [44].



Fonte: O autor.

Este problema também é discutido em duas vídeo aulas [45], [46].

6.4 Reflexão, quadrilátero inscritível, projeção. P4 N.I. IGO 2017

Problema 19. No triângulo isósceles ABC ($AB = AC$), seja l uma linha paralela a BC que passa por A . Seja D um ponto arbitrário sobre l . Sejam E, F os pés das perpendiculares a BD, CD que passam por A , respectivamente. Suponha que P, Q são as imagens de E, F sobre l . Provar que

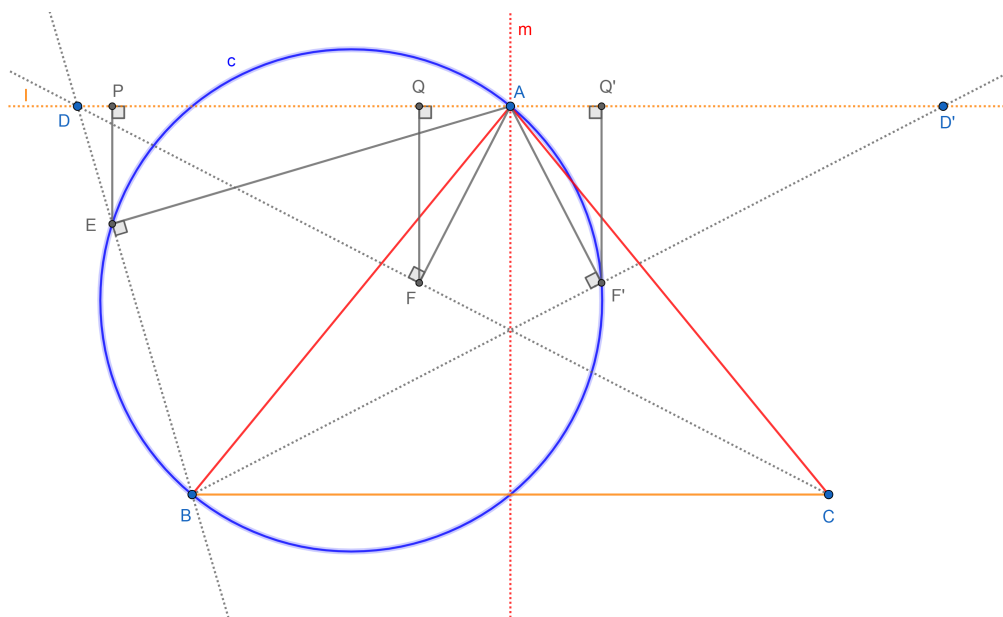
$$AP + AQ \leq AB.$$

Problema 4 (Nível Intermediário) da 4 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017 [16].

6.4.1 Resolução

A Figura 6.4.1 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.

Figura 6.4.1: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão dinâmica está disponível em [47].



Fonte: O autor.

A reta m é mediatriz dos pontos B e C . O ponto A pertence a m , o que garante que o triângulo ABC é isósceles como descrito no enunciado.

Devemos comparar a soma dos segmentos AP e AQ com o segmento AB . Primeiro, a ideia será mostrar que o ponto Q' é a reflexão do ponto Q em relação a mediatriz m . Isto é,

$AP + AQ = PQ'$ e bastará provar que $PQ' \leq AB$.

Seja D' a reflexão do ponto D em relação a mediatriz m . Temos que $DA = D'A$ e $DC = D'B$. Traçamos a semirreta BD' e construímos uma perpendicular a esta que passe por A , chamando F' à interseção. A seguir construímos o ponto Q' projeção do ponto F' sobre a reta l .

Os triângulos DAC e $D'AB$ são congruentes pelo critério LAL ($\angle DAC = \angle D'AB$). A reta m também é bissetriz do ângulo BAC . Segue que $DC = D'B$ e as alturas respectivas são iguais. Isto é, $FA = F'A$.

Notamos também que os triângulos DFA e $D'F'A$ são congruentes pelo critério CH, segue que as alturas respeito aos lados DA e $D'A$ são iguais. Ou seja, $FQ = F'Q'$.

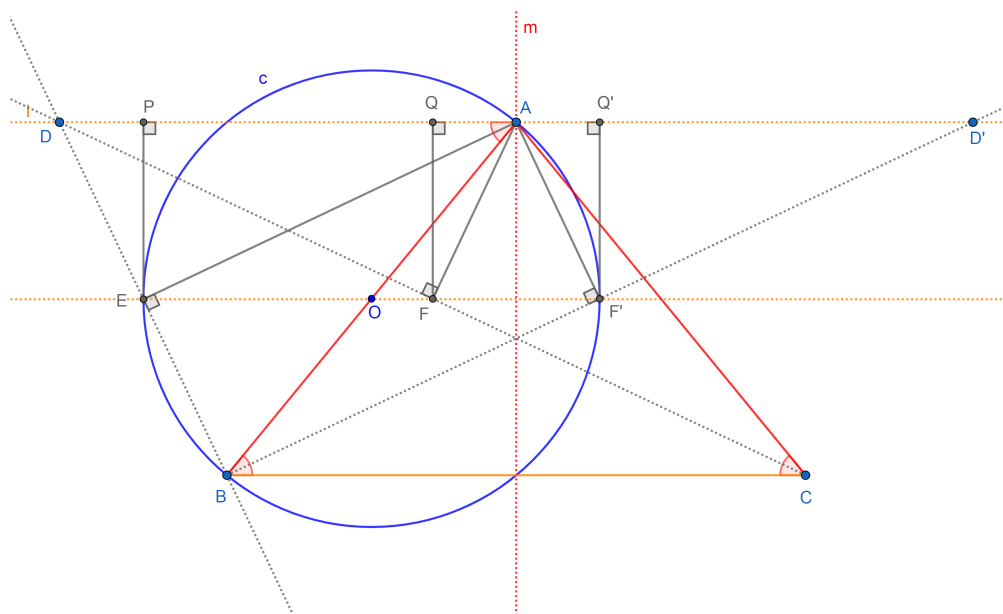
Concluimos que os triângulos FQA e $F'Q'A$ são congruentes pelo critério CH, o que mostra que o ponto Q' é a reflexão do ponto Q em relação a mediatriz m .

Segundo, como $\angle AEB = \angle AF'B = 90^\circ$ o quadrilátero $AEBF'$ é inscritível e AB é um diâmetro da circunferência c circunscrita a ele. Segue que EF' é uma corda de c e conseqüentemente $EF' \leq AB$.

Terceiro, PQ' é a projeção sobre l do segmento EF' . Logo, $AP + AQ = PQ' \leq EF' \leq AB$, como queríamos demonstrar.

Ocorre a igualdade quando EF' é diâmetro de c ($AB = EF'$) e a linha EF' é paralela com l ($EF' = PQ'$). A Figura 6.4.2 ilustra esta situação.

Figura 6.4.2: Caso de igualdade na desigualdade do problema.



Fonte: O autor.

O quadrilátero $AEBF'$ é um retângulo, suas diagonais são iguais e se cortam no ponto

médio O (também centro de c). Segue que $EO = OB$ e o triângulo EOB é isósceles de base EB . Neste caso, $\angle ABC = \angle BAD = \angle BOE = \alpha$ (alternos entre paralelas) e $\angle OBE = \angle OEB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (soma dos ângulos internos de um triângulo). Logo, $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$ e AE é bissetriz e altura do triângulo DAB . Concluímos que o triângulo DAB é isósceles de base DB e $AD = AB$. Uma solução em vídeo do autor está disponível em [48].

6.5 Área de triângulos, hexágono, trapézio. P2 N.E. IGO 2018

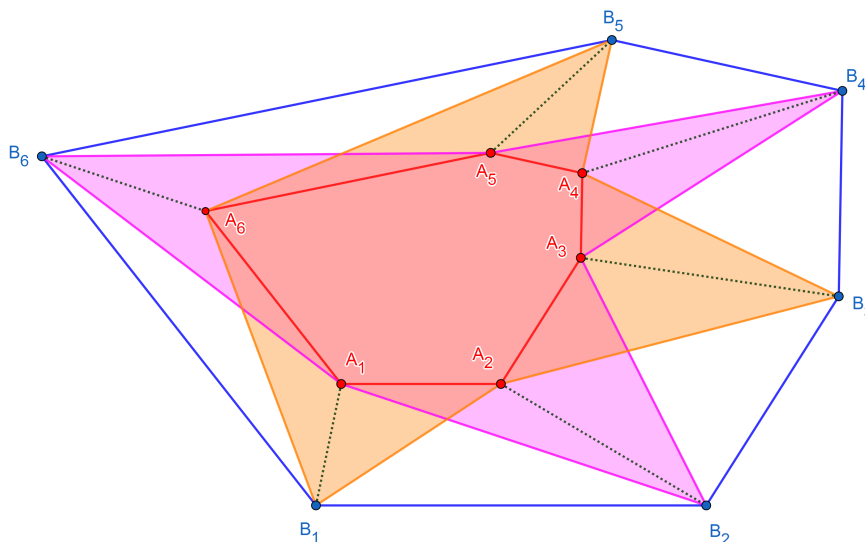
Problema 20. *O hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está contido no interior do hexágono convexo $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ de modo que $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots$, $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Provar que as áreas dos hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ e $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ são iguais. (Um hexágono simples é um hexágono que não intersecta ele mesmo.)*

Problema 2 (Nível Elemental) da 5 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2018 [49].

6.5.1 Resolução

A Figura 6.5.1 ilustra uma construção geométrica possível para auxiliar na interpretação do problema.

Figura 6.5.1: Construção geométrica possível partindo do texto do problema para auxiliar na interpretação. Uma versão dinâmica está disponível em [50].



Fonte: O autor.

Notamos primeiro que o hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está completamente no interior dos dois hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ e $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$.

Segundo, para facilitar a visualização traçamos os segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_6B_6$.

Terceiro, como $A_1A_2 \parallel B_1B_2, A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots, A_6A_1 \parallel B_6B_1$, então os quadriláteros $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \dots, A_6B_6B_1A_1$ são trapézios.

Quarto, por terem a mesma altura e base os pares de triângulos a seguir tem a mesma área:

$$A(\triangle A_1B_1A_2) = A(\triangle A_1B_2A_2),$$

$$A(\triangle A_2B_2A_3) = A(\triangle A_2B_3A_3),$$

\vdots

$$A(\triangle A_6B_6A_1) = A(\triangle A_6B_1A_1).$$

Finalmente, notamos que:

$$A(\square A_1B_2A_3B_4A_5B_6) = A(\square A_1A_2A_3A_4A_5A_6) + A(\triangle A_1B_2A_2) + A(\triangle A_2B_2A_3) + \dots + A(\triangle A_6B_6A_1),$$

$$\begin{aligned} A(\square A_1 B_2 A_3 B_4 A_5 B_6) &= A(\square A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) + A(\triangle A_1 B_1 A_2) + A(\triangle A_2 B_3 A_3) + \cdots + \\ &+ A(\triangle A_6 B_1 A_1) = A(\square B_1 A_2 B_3 A_4 B_5 A_6). \end{aligned}$$

Capítulo 7

Referências

- [1] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881>. Acesso em: 15 set. 2020. 1
- [2] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO)**, v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715>. Acesso em: 15 set. 2020. 1
- [3] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 15 set. 2020. 1
- [4] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 15 set. 2020. 1

- [5] LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: <https://doi.org/10.11606/9786587023045>. Acesso em: 15 set. 2020. 1
- [6] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção ProfMat). 2
- [7] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Problems**. 2019. Disponível em: <http://www.imo-official.org/problems.aspx>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1, 2.2, 2.3, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 6.2, 6.3
- [8] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: <http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1, 2.2, 2.3, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 5.1, 6.2
- [9] PELLEGRINO A. O. **Relações Métricas no Triângulo Retângulo I -V69-POTI-Pira-Geometria**. [*S. l.: s. n.*], 2017. 1 vídeo (18 min 13 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: https://youtu.be/n_AMTXcM0s0. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1.1
- [10] LÓPEZ LINARES, J. **Mediana em um triângulo retângulo**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qayftggf>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1.1
- [11] LÓPEZ LINARES, J. **IMO 1974 P2**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/p6dk4rdy>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1.2, 2.1.2
- [12] BARROS, H. G. **Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de arcos**. 2014, p. 29-33. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Programa de PósGraduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=700. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1.2, 2.2.1
- [13] LÓPEZ LINARES, J. **Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rj4shfhm>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1.2, 2.2.1
- [14] PELLEGRINO A. O. **Teorema das Cordas I -V58-POTI-Pira-Geometria**. [*S. l.: s. n.*], 2017. 1 vídeo (11 min 18 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: <https://youtu.be/PwJ7FnqEeuo>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.1.2

- [15] LÓPEZ LINARES, J. **IMO-SL-12-1975**. 2020. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/mqkxtrse>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.2.1
- [16] **Problems of 4th Iranian Geometry Olympiad 2017**. Disponível em:
https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/11/IGO_2017.pdf. Acesso em: 15 set. 2020. 2.4, 5.2, 5.3, 6.1.1, 6.4
- [17] LÓPEZ LINARES, J. **P1 NI IGO 2017-Figura**. 2020. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/vqxgyuqv>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.4.1
- [18] LÓPEZ LINARES, J. **V18 CONSTRUÇÃO DO ARCO CAPAZ, ÂNGULO INSCRITO, DE SEGMENTO E CENTRAL EM UMA CIRCUNFERÊNCIA - USP**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (12 min 53 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: <https://youtu.be/TXJfJS2aCzA>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.4.1
- [19] LÓPEZ LINARES, J. **V3-CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS ACUTÂNGULOS, RETÂNGULOS, OBTUSÂNGULOS, ISÓSCELES E EQUILÁTEROS-FZEA-USP**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (10 min 51 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: https://youtu.be/21g2h_WUaTU. Acesso em: 15 set. 2020. 2.4.1
- [20] LÓPEZ LINARES, J. **V50 P1 NI IGO 2017 COSSENO E SENO DE ÂNGULOS NOTÁVEIS - ARCO CAPAZ - TRIÂNGULO ACUTÂNGULO - FZEA USP**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (9 min 34 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: <https://youtu.be/4Tar1BnyaBc>. Acesso em: 15 set. 2020. 2.4.1
- [21] CONNOR, J. J. O.; ROBERTSON, E. F., **Claudius Ptolemy**, 2020. Disponível em:
<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy.html>. Acesso em: 15 set. 2020. 3
- [22] APOSTOL, T. M.; **Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric**, Mathematics Magazine, 40:5, 233-235, 1967. DOI: 10.1080/0025570X.1967.11975804. 3
- [23] LÓPEZ LINARES, J. **Demonstração da Desigualdade de Ptolomeu**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/rdgpa5sd>. Acesso em: 15 set. 2020. 3.1.3
- [24] NETO, A. C. M. **Geometria**, Coleção ProfMat, SBM, Primeira Edição, ISBN: 9788585818937, 2013. 3.1.2
- [25] LÓPEZ LINARES, J. **V43 Demonstração da Desigualdade de Ptolomeu - Teorema de Ptolomeu como caso particular-FZEA-USP**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (14 min 32 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [\[https://youtu.be/qgWUPol3-YI\]](https://youtu.be/qgWUPol3-YI). Acesso em: 15 set. 2020. 3.1.2

- [26] LÓPEZ LINARES, J. **CGP-Arco Capaz**. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/g3zrpnfs>. Acesso em: 15 set. 2020. 3.2.1
- [27] LÓPEZ LINARES, J. **IMO 1995 SL P11**. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/tdjeys6y>. Acesso em: 15 set. 2020. 3.2.1
- [28] LÓPEZ LINARES, J. **IMO 1997 SL P7**. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/akxjugua>. Acesso em: 15 set. 2020. 3.3.1
- [29] LÓPEZ LINARES, J. **IMO 1994 SL P15**. 2020. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/g2nsqpxh>. Acesso em: 15 set. 2020. 4.2.1, 4.2.2
- [30] LÓPEZ LINARES, J. **V59 P15 SL IMO 1994 Circuncentro, tangências dois a dois de três circunferências e duas paralelas**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (16 min 26 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:
[<https://youtu.be/C7ezR0FeFfM>]. Acesso em: 15 set. 2020. 4.2.1
- [31] LÓPEZ LINARES, J. **P5 IMO 2012**. 2020. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/gnwjjeex>. Acesso em: 15 set. 2020. 4.3.1
- [32] LÓPEZ LINARES, J. **V55 P1 NA IGO 2017 CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA OU INCÍRCULO, LINHA TANGENTE E CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (17 min 02 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/Xz-LmBcHTsU>]. Acesso em: 15 set. 2020. 4.3.1
- [33] LÓPEZ LINARES, J. **V17 P3 IMO 1979 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS LAL PARALELOGRAMO E VELOCIDADE ANGULAR - FZEA USP**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (8 min 55 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em:
[<https://youtu.be/4bb5EXjRHlo>]. Acesso em: 15 set. 2020. 5.1.1
- [34] LÓPEZ LINARES, J. **V25 DIVISÃO DE UM SEGMENTO NA RAZÃO OU PROPORÇÃO ÁUREA. PENTÁGONO REGULAR E ESTRELA DE CINCO PONTAS**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (18 min 46 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/-stzct3o00>]. Acesso em: 15 set. 2020. 5.2.1
- [35] LÓPEZ LINARES, J. **V48 P3 IGO 2017 E DESAFIO SOBRE PENTÁGONO REGULAR E RAZÃO ÁUREA MAIOR - GEOMETRIA COM GEOGEBRA - USP**. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (9 min 59 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/-stzct3o00>]. Acesso em: 15 set. 2020. 5.2.1
- [36] LÓPEZ LINARES, J. **P1 NA IGO 2017-Caso-II**. 2020. Disponível em:
<https://www.geogebra.org/m/ggptv6cn>. Acesso em: 15 set. 2020. 5.3.1

- [37] LÓPEZ LINARES, J. **V51 P1 NA IGO 2017 CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA OU INCÍRCULO, LINHA TANGENTE E CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS.** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (17 min 02 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/PdlYN1oR4Vk>]. Acesso em: 15 set. 2020. 5.3.1
- [38] LÓPEZ LINARES, J. **P2 E IGO 2019.** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/nuecqa5w>. Acesso em: 15 set. 2020. 5.4.1, 5.4.2
- [39] CONTEST PROBLEMS WITH SOLUTIONS OF 6TH IRANIAN GEOMETRY OLYMPIAD, 2019. Disponível em: https://igo-official.ir/media/IGO_2019_Booklet_en.pdf. Acesso em: 15 set. 2020. 5.4.1, 5.5
- [40] LÓPEZ LINARES, J. **V62 P2 E IGO 2019 PONTOS COLINEARES, SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS, PARALELOGRAMO. GEOMETRIA COM GEOGEBRA.** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (14 min 30 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/iodjqFOgZDI>]. Acesso em: 15 set. 2020. 5.4.1
- [41] LÓPEZ LINARES, J. **P4 E IGO 2019.** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qa2sghst>. Acesso em: 15 set. 2020. 5.5.1
- [42] LÓPEZ LINARES, J. **V65 ESTICANDO A CORDA - ÂNGULOS, QUADRILÁTERO E CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS - P4 E IGO 2019 - FZEA-USP.** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (11 min 40 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/j9qNYLjNsl4>]. Acesso em: 15 set. 2020. 5.5.1
- [43] LÓPEZ LINARES, J. **IMO 1973 P4** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ztjvxywq>. Acesso em: 15 set. 2020. 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4
- [44] LÓPEZ LINARES, J. **P1 IMO 2018** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uc59xuxy>. Acesso em: 15 set. 2020. 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3, 6.3.4, 6.3.5
- [45] LÓPEZ LINARES, J. **V36 P1 IMO 2018 SEGMENTOS PARALELOS E ÂNGULOS EXCÊNTRICOS INTERIORES, CENTRAIS E INSCRITOS SOLUÇÃO 1.** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (18 min 16 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/4hIX-xATt8Q>]. Acesso em: 15 set. 2020. 6.3.1

- [46] LÓPEZ LINARES, J. **V40 P1 IMO 2018 (SOLUÇÃO 2) QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS, PARALELOGRAMOS E TRIÂNGULOS ISÓSCELES - USP.** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (12 min 0 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [https://youtu.be/cmjKvHsIv_w]. Acesso em: 15 set. 2020. 6.3.1
- [47] LÓPEZ LINARES, J. **IGO 2017 P4 NI-Caso II.** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/t7ryxr9c>. Acesso em: 15 set. 2020. 6.4.1
- [48] LÓPEZ LINARES, J. **V49 P4 NI IGO 2017 - REFLEXÃO - QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL - DESIGUALDADE - CONGRUÊNCIAS DE TRIÂNGULOS.** [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (14 min 46 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: [<https://youtu.be/Gt4SXS2IsbE>]. Acesso em: 15 set. 2020. 6.4.1
- [49] **Problems of 5th Iranian Geometry Olympiad 2018.** Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/09/IGO_2018.pdf. Acesso em: 15 set. 2020. 6.5
- [50] LÓPEZ LINARES, J. **P2 NE IGO 2018.** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/jn3j8exh>. Acesso em: 15 set. 2020. 6.5.1

