Cultura Acadêmica

Carlos Roberto Padovani

BIOESTATÍSTICA

CULTURA ACADÊMICA Editora

unesp

Pró-reitoria de Graduação / UNESP
prograd

BIOESTATÍSTICA

Cultura Acadêmica

Carlos Roberto Padovani

BIOESTATÍSTICA

CULTURA ACADÊMICA Editora

unesp

Pró-reitoria de Graduação / UNESP prograd

São Paulo
2012

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria Geral de Bibliotecas da Unesp

P124b

Padovani, Carlos Roberto
Bioestatística / Carlos Roberto Padovani. São Paulo : Cultura Acadêmica : Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2012.

112 p.
ISBN 978-85-7983-265-9

1. Bioestatística. I. Título. II. Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação.

CDD 570.15195

equipe Pró-reitoria de Graduação / UNESP prograd

Pró-reitora Sheila Zambello de Pinho

Secretária Joana Gabriela Vasconcelos Deconto
Silvia Regina Carão

Assessoria José Brás Barreto de Oliveira
Laurence Duarte Colvara
Maria de Lourdes Spazziani

Técnica Bambina Maria Migliori
Camila Gomes da Silva
Cecília Specian
Eduardo Luis Campos Lima
Gisleide Alves Anhesim Portes
Ivonette de Mattos
Maria Emília Araújo Gonçalves
Maria Selma Souza Santos
Renata Sampaio Alves de Souza
Sergio Henrique Carregari

Projeto gráfico Andrea Yanaguita

Diagramação Estela Mletchol

PROGRAMA DE APOIO
À PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

Considerando a importância da produção de material didático-pedagógico dedicado ao ensino de graduação e de pós-graduação, a Reitoria da UNESP, por meio da Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD) e em parceria com a Fundação Editora UNESP (FEU), mantém o Programa de Apoio à Produção de Material Didático de Docentes da UNESP, que contempla textos de apoio às aulas, material audiovisual, *homepages*, *softwares*, material artístico e outras mídias, sob o selo CULTURA ACADÊMICA da Editora da UNESP, disponibilizando aos alunos material didático de qualidade com baixo custo e editado sob demanda.

Assim, é com satisfação que colocamos à disposição da comunidade acadêmica mais esta obra, "Bioestatística", de autoria do Prof. Dr. Carlos Roberto Padovani, do Departamento de Bioestatística do Instituto de Biociências do Câmpus de Botucatu, esperando que ela traga contribuição não apenas para estudantes da UNESP, mas para todos aqueles interessados no assunto abordado.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O que é estatística? E a Bioestatística? Considerando o conceito de que a Ciência é o aprendizado adquirido por meio da experimentação e dos dados observados, segundo o qual a procura das causas, das leis, traduz-se num processo iterativo de observação do real, da realização de experimentos confirmatórios e da avaliação quantitativa dos fenômenos em estudo, o paradigma da Estatística, em particular a Estatística Aplicada às Ciências Biológicas – Bioestatística, consiste em construir o conjunto unificado de métodos e técnicas de planejamento e análise de dados experimentais e observacionais.

O grande desafio que se torna imperativo diz respeito a como desenvolver as atividades de ensino de Estatística, sob as exigências de um modelo referencial de conceitos matemáticos e probabilísticos no cotidiano da formação da estrutura lógica de raciocínio dos estudantes das áreas biológicas e da saúde, e qual linguagem e motivação devem ser colocadas em prática para ministrar o conteúdo programático?

Para abordar e entender os conteúdos dos textos, sem qualquer preconceito e posição premeditada, o iniciante deverá trabalhar sua atitude, a fim de evitar dois obstáculos preliminares: dramatizar as dificuldades e ter ilusões por causa de facilidades aparentes.

Prof. Dr. Carlos Roberto Padovani

Nenhum objeto de pensamento resiste à dúvida, mas o próprio ato de duvidar é indubitável.

(Descartes)

1

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

A elaboração deste material didático objetivou oferecer aos alunos um roteiro conceitual e prático que apresente a teoria, os procedimentos operacionais (ferramentas de cálculo), os métodos e técnicas estatísticas para que o usuário se torne um consumidor esclarecido da estatística aplicada às ciências da saúde e biológicas.

1.1. DEFINIÇÃO DE ESTATÍSTICA

A Estatística constitui-se em uma ciência destinada a:

I. Decidir o melhor plano (experimental ou observacional) para a execução de uma pesquisa ➔ metodologia científica.
II. Organizar e resumir dados de contagem, mensuração e classificação ➔ raciocínio dedutivo.
III. Inferir sobre populações de unidades (indivíduos, animais, objetos) quando uma parte (amostra) é considerada ➔ raciocínio indutivo.

A doutrina sobre o chegar a termo do tempo e da história da estatística matemática (escatologia) é tão complicada como a de qualquer religião, ou mais. Além disso, as conclusões da estatística matemática não são apenas verdadeiras, como, ao contrário das verdades da religião, podem ser provadas.

Os métodos da estatística matemática são universais (ubíquos), e o estatístico, assim como o especialista em modelagem matemática, é capaz de colaborar em, praticamente, qualquer área de conhecimento e atividade profissional.

Uma igualdade que pode sintetizar as considerações descritas anteriormente pode ser expressa como:

ESTATÍSTICA = CIÊNCIA + TECNOLOGIA + ARTE

1.2. DEFINIÇÃO DE BIOESTATÍSTICA

É a metodologia estatística aplicada às ciências biológicas, com a finalidade planejar, coletar, organizar, resumir, analisar e interpretar os dados, permitindo tirar conclusões biológicas sobre populações a partir do estudo de amostras.

Em 1829, Pierre Charles Alexandre Louis (1787-1872), afirmou: "Eu sei que a verdade está nos fatos e não na mente que os julga, e quanto menos eu introduzir da minha opinião nas conclusões, mais próximo estarei da verdade" (Louis é considerado o pai da bioestatística).

Considera-se que o olho humano é capaz de enxergar padrões em números puramente aleatórios, até que ponto um padrão aparente realmente significa alguma coisa?

John W. Tukey (1915-2000), nascido em New Bedford, Massachusetts afirmou: "É melhor ter uma resposta aproximada à pergunta certa do que ter a resposta exata à pergunta errada".

A força da estatística aplicada às diversas áreas do conhecimento está em sua capacidade de persuadir os pesquisadores a formular perguntas; de considerar se estas questões podem ser respondidas com as ferramentas disponíveis para o experimentador; de ajudá-lo a estabelecer hipóteses (nulas – H_0) adequadas; de aplicar rígidas disciplinas de planejamento aos experimentos.

De mesma forma, podem-se expressar os sentimentos descritos na igualdade:

BIOESTATÍSTICA = VIDA + ESTATÍSTICA

1.3. VARIÁVEL BIOLÓGICA (CONCEITO)

Quando se estuda uma variável biológica, o maior interesse do pesquisador é conhecer o comportamento dessa variável, analisando a ocorrência de suas possíveis realizações.

O resultado de medições de variáveis biológicas encontra-se, geralmente, dentro de intervalos determinados e bem definidos, mas não sujeitos à repetição exata. Uma variável biológica pode ser entendida como uma classificação, uma qualidade, ou como medida quantificada por magnitude, intensidade, traço, entre outras designações que varia tanto intra como inter indivíduos.

O estudo de bioestatística compreende o planejamento e a análise estatística (estatística descritiva e inferencial), mas voltado às informações biológicas contidas nas variáveis em consideração, transformadas em dados coletados para a operacionalização dos métodos estatísticos.

1.4. ANÁLISE DESCRITIVA

Organização dos dados coletados por meio de classificação, contagem ou mensuração. Os dados devem ser apresentados de forma clara por meio tabelas, gráficos e medidas resumo (posição e variabilidade), não permitindo, no entanto, conclusões analíticas.

1.5. ANÁLISE INFERENCIAL

Permite realizar inferências (conclusões e analíticas) a respeito de populações a partir de amostras pela aplicação de testes de hipóteses e/ou construção de intervalos de confiança. Deve ser considerado que está utilizando-se amostras para inferir aos dados reais da população (parâmetros), portanto existindo nestas estatísticas (dados obtidos de amostras) uma margem de erro. A exceção é o censo, quando toda a população é pesquisada.

1.6. PLANEJAMENTO EXPERIMENTAL

Consiste em estabelecer o desenho amostral com poder adequado para os testes de hipóteses e estimações sem vieses (distorções). Deve ser considerado o cálculo do tamanho da amostra (tamanho ético e estatístico) e a definição da forma de coleta de dados (técnicas de amostragem).

1.7. TIPOS DE VARIÁVEL

Variáveis são características que podem assumir valores diferentes de um indivíduo para outro ou no mesmo indivíduo ao longo do tempo.

Em relação à participação no estudo, as variáveis podem ser classificadas em:

I. Independente, explicativa ou preditora: permite predizer uma resposta (causas).
II. Dependente ou resposta: evento ou característica que se pretende estudar (efeitos).
III. Variável de controle: deseja-se que esteja homogeneamente distribuída nos grupos, pois poderia interferir nos resultados (atuando, por exemplo, como uma variável de confusão). Não tem interesse para estudo.

Observações:

I. Dependo do objetivo do estudo, uma mesma variável pode ser preditora, resposta ou de controle.

II. As variáveis preditoras, resposta e de controle devem ser indicadas pelo pesquisador (biologia), nunca pelo estatístico.

III. O número excessivo de variáveis dificulta a análise estatística e torna menor o poder da amostra.

IV. O estatístico é capaz de coordenar o planejamento de uma pesquisa e realizar a análise.

Escala de Variáveis

Quanto à escala utilizada, têm-se variáveis:

Categóricas (Qualitativas)
- Nominal (classificação sem ordem definida)
- Ordinal (classificação com ordem definida)

Numéricas (Quantititivas ou Intervalar)
- Discreta (contagem, correspondendo a números inteiros)
- Contínua (mensuração, correspondendo a números reais)

Observações:

I. A unidade de medida mostra a diferença entre as numéricas discreta e contínua.

II. Escore não é contagem (não confundir variáveis categóricas nominais expressas por números com variáveis discretas).

III. Pode-se transformar uma variável numérica em categórica (lembrar que há perda de informações).

IV. Para variáveis categóricas a análise estatística é limitada. Se as variáveis dependentes e independentes forem todas categóricas, só será possível utilizar testes não paramétricos, que apresentam menor poder.

V. Eric Temple Bell (matemático norte-americano) afirmou: “Números não mentem, mas têm a propensão de dizer a verdade com intenção de enganar". O ser humano tem a tendência de ver padrões e costuma vê-los onde só existe ruído aleatório.

1.8. EXERCÍCIOS SOBRE VARIÁVEIS BIOLÓGICAS

1) Classifique o par de variáveis a seguir em qualitativa (nominal ou ordinal) ou quantitativa (discreta ou contínua).
   i) Intensidade de perda de peso de maratonistas na corrida de São Silvestre (leve, moderada, forte).
   ii) Total de perda de peso de maratonistas na corrida de São Silvestre (em kg).

2) Quanto maior a dispersão dos dados em torno da média, maior será:
   i) Amplitude interquartílica.
   ii) A amplitude total.
   iii) A variância.
   iv) Todas as alternativas anteriores.

3) Um editorial de um jornal de grande circulação criticou um anúncio que alegava que o novo creme dental de um laboratório "Reduz em mais de 500% as placas nos dentes". Pergunta-se:
   a) Removendo-se 100% de uma quantidade, quanto sobra?
   b) É correto dizer que houve uma redução de mais de 500% de uma quantidade? E dizer que houve um aumento ou acréscimo de 150%?

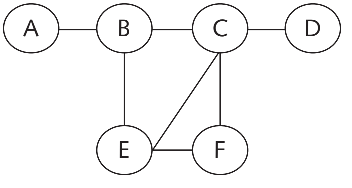
4) Responda se cada uma das afirmativas a seguir é verdadeira ou falsa. Se afirmativa for falsa, corrija a palavra sublinhada para que ela se torne verdadeira.
   a) Metade dos valores de uma variável quantitativa é sempre menor que a <u>média</u>.
   b) Quando a variável quantitativa tem distribuição unimodal e <u>simétrica</u>, a posição relativa das medidas de tendência central é: média < mediana < moda.
   c) Quando a variável quantitativa tem distribuição unimodal e <u>simétrica</u>, a posição relativa das medidas de tendência central é: média > mediana > moda.

d) Para alguns conjuntos de dados é possível encontrar valor de variância <u>menor</u> do que o valor do desvio padrão.

5) Suponha que um forno A está com uma temperatura de 90º C e um outro forno B está com 30º C. É correto afirmar que o forno A está três vezes mais quente que o forno B?

6) O jornal *Newport Chronicle* afirmou que mães grávidas podem aumentar suas chances de ter um bebê sadio comendo lagostas. A alegação se baseou em um estudo mostrando que as crianças nascidas de mães que comem lagostas têm menos problemas de saúde do que as nascidas de mães que não comem lagostas. Qual é o erro nesta alegação?

7) No diagrama seguinte A, B, ..., F representam ilhas e as linhas que ligam, pontes. Um biólogo começa em A e percorre ilha por ilha. Ele para a fim de almoçar quando não pode continuar a andar sem que cruze a mesma ponte duas vezes. Encontre o número de caminhos que ele pode percorrer antes de almoçar.



8) Numa pesquisa para avaliar a pressão arterial canina, foram selecionados ao acaso 10 animais para participar do estudo. Para cada animal foram realizadas três medidas da pressão (triplicata). O pesquisador pode considerar, para tratamento estatístico dos dados, uma amostra de tamanho 30 (30 pressões)?

9) Um pesquisador foi criticado certa vez por adulterar dados. Entre os seus dados estavam cifras obtidas de seis grupos de ratos, com 20 ratos em cada grupo. Foram dados os seguintes valores como porcentagens de sucesso: 58%, 65%, 47%, 33%, 50%, 47%. O que está errado?

10) Uma pesquisa patrocinada por uma grande cooperativa de produtos críticos concluiu que os níveis de colesterol podem ser reduzidos mediante ingestão de produtos críticos. Por que razão a conclusão poderia ser suspeita?

1.9. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) i) Qualitativa ordinal.
   ii) Quantitativa contínua.

2) iii) Variância.

3) a) nada.
   b) Não. Sim.

4) a) Falsa (Mediana).
   b) Falsa (Assimétrica à esquerda: média e mediana à esquerda da moda).
   c) Falsa (Assimétrica à direita: média e mediana à direita da moda).
   d) Verdade (Quando o valor da variância está entre 0 e 1).

5) Não (Não existe o zero absoluto em °C. A temperatura 90°C tem valor três vezes o valor 30°C).

6) O fator que leva, em tese, a degustação de lagostas é o poder aquisitivo das mães, recursos que asseguram maiores poderes para o acompanhamento pré-natal.

7) 5 caminhos {ABCD; ABCF; ABECD; ABECF; ABEFCD}.

8) Não são 10 repetições (amostras realizadas em triplicatas).

9) Todos os valores percentuais devem ser múltiplos de 5 (cada sucesso equivale a $5\% = 100 \times \frac{1}{20}$).

10) Muito suspeito, pois há interesse do patrocinador quanto a positividade do efeito redutor causado pelo produto cítrico.

2

ESTATÍSTICA DESCRITIVA

2.1. INTRODUÇÃO

A Estatística Descritiva fundamenta-se na organização dos dados obtidos por meio de classificação, contagem ou mensuração. Os dados são apresentados em medidas resumo, tabelas e gráficos, não permitindo, no entanto, conclusões analíticas.

A notação matemática, consistindo de um arranjo de letras, tanto romanas como gregas ou latinas, com linhas tortuosas e sobrescritos e subscritos, é um aspecto da matemática que intimida o não-matemático. Na realidade é um meio conveniente de relatar ideias complexas em espaço compacto. O "truque", ao não matemático, ao ler um texto matemático, é reconhecer que cada símbolo tem um significado próprio e procurar conhecer o significado quando ele é apresentado, acreditando com "convicção" que você "entende" o significado, e então, prestar atenção à forma como o símbolo é manipulado. A essência da elegância matemática é produzir uma notação de símbolos organizada de maneira tão simples o bastante que o leitor compreende as relações de imediato.

Em relação às necessidades de cálculos para encontrar os valores resultantes dos indicadores (medidas) de estatísticas, deve se ter que o computador não é um concorrente do cérebro humano. Ele é apenas um grande e paciente mastigador de números. Não se aborrece, não fica sonolento nem comete erros de cálculo, mesmo quando não reconhecido seu valor pelo usuário.

2.2. MEDIDAS DE POSIÇÃO

O organograma a seguir indica as principais e mais usuais medidas descritivas de posição (centralidade e separatrizes).

- Posição
  - Tendência Central
    - Média
    - Moda
    - Mediana
  - Separatrizes
    - Quartis
    - Percentis

2.2.1. Medidas de Tendência Central

2.2.1.1. *Média Aritmética*

A média aritmética, ou simplesmente média, é definida como a soma dos valores dividida pelo número de observações (centro de massa).

Observações sobre a média:

I. A média é afetada por valores extremos.
II. A média é bastante utilizada em distribuições simétricas.
III. Não utilizável em variáveis categóricas.
IV. A média pode ser utilizada para variáveis discretas, inclusive com decimais.

2.2.1.2. *Moda*

Consiste no valor mais frequente no conjunto de observações (valor típico, valor mais comum).

Observações sobre a moda:

I. Um conjunto pode apresentar mais de uma moda (plurimodal).
II. A moda pode ser calculada para variáveis numérica e categorizada.
III. Pode existir conjunto sem moda (amodal).

2.2.1.3. *Mediana*

Definida como o valor que divide as observações, ordenadas de forma crescente, em igual número de observações acima e abaixo.

Observações sobre a mediana:

I. Não é utilizável em variáveis categóricas.

II. Pouco afetada por valores muito discrepantes.

III. Indicada para distribuição assimétrica.

Finalizando, para decidir se a medida de tendência central apropriada deve ser média ou mediana, considere:

- Distribuição simétrica ➔ média.
- Distribuição assimétrica ➔ mediana.

No caso de distribuição simétrica, média, moda e mediana são equivalentes ($\overline{x} = Mo = Me$). Quando existe assimetria, a média e a mediana desviam-se na direção dos valores extremos ($Mo < Me < \overline{x}$ ou $\overline{x} < Me < Mo$).

2.3. SEPARATRIZES

2.3.1. Quartis

Considerados como valores que dividem a amostra em quatro partes com o mesmo número de observações (25% dos valores em cada parte).

Q1 ➔ Limita os 25% dos menores valores (ou 75% dos maiores valores).

Q2 ➔ Limita os 50% dos menores valores (ou 50% dos maiores valores).

Q3 ➔ Limita os 75% dos menores valores (ou 25% dos maiores valores).

2.3.2. Percentis

Considerados como valores que dividem a amostra em cem partes com 1% das observações em cada parte.

P23 ➔ Limita os 23% dos menores valores (ou 77% dos maiores valores).

P67 ➔ Limita os 67% dos menores valores (ou 33% dos maiores valores).

P92 ➔ Limita os 92% dos menores valores (ou 8% dos maiores valores).

2.4. MEDIDAS DE VARIABILIDADE

O organograma a seguir indica as principais medidas descritivas de variabilidade ou dispersão dos dados.

$$\text{Variabilidade}\begin{cases}\text{Individual}\begin{cases}\text{Amplitude Total}\\ \text{Amplitude Interquartil}\\ \text{Variância}\\ \text{Desvio Padrão}\\ \text{Coeficiente de Variação}\end{cases}\\ \\ \text{Amostral}\begin{cases}\text{Erro Padrão}\\ \\ \text{Erro Amostral}\end{cases}\end{cases}$$

2.4.1. Amplitude Total

Expressa a variação máxima encontrada no conjunto de dados, sendo obtida pela diferença entre o maior e o menor valor.

2.4.2. Amplitude Interquartil

Expressa a variação de 50% dos dados amostrais ao redor da mediana. Seu valor é dado pela diferença entre o terceiro e primeiro quartil.

2.4.3. Variância e Desvio Padrão

Consistem em medidas de dispersão absoluta e indicam como os valores variam entre si, por meio do afastamento destes valores em relação à média do conjunto de dados.

Observações sobre a variância e o desvio padrão:

I. A variância apresenta unidade quadrática.
II. Quanto mais afastado o valor se encontrar em relação à média, maior será sua contribuição para o valor da variância (desvio padrão).
III. Ambas as medidas (variância e desvio padrão) indicam a variação absoluta.

2.4.4. Coeficiente de Variação

Trata-se de uma medida de dispersão relativa e expressa a razão entre o desvio padrão e a média. Pode ser apresentado na forma de proporção ou porcentagem.

Observações sobre o coeficiente de variação:

I. Quanto menor o coeficiente de variação, mais homogêneo o conjunto de valores.
II. Trata-se de uma medida de variação relativa e adimensional.

2.4.5. Erro Padrão

Constitui-se em uma medida de variabilidade da média amostral (expressa como a média varia de uma amostra para outra).

Observações sobre o erro padrão:

I. A margem de erro que se comete em estimar a média populacional pela média de uma amostra é dada pelo erro padrão.
II. O valor do erro padrão é dado em função do tamanho amostral. Ou seja, inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho amostral.
III. Em um artigo científico, não raras vezes, o pesquisador fica em dúvida sobre indicar o desvio padrão ou o erro padrão (não há necessidade de fornecer as duas medidas, pois quando tamanho amostral é conhecido, basta saber o desvio padrão para calcular o erro padrão e vice-versa). Qualquer uma das medidas pode ser utilizada e a escolha deve ser feita a partir do enfoque que se pretende analisar os resultados. Se o objetivo consiste em descrever a casuística, o desvio padrão torna-se mais adequado, caso o objetivo seja fazer inferências (comparação de médias, intervalos de confiança, ...), o erro padrão deve ser escolhido.

2.4.6. Erro Amostral

Trata-se de uma medida do afastamento da média amostral em relação à média da população, associada a um nível de confiança.

Observações sobre o erro amostral:

I. O erro amostral é proporcional ao erro padrão.
II. A constante de proporcionalidade fica estabelecida pelo nível de confiança.

III. Erro amostral proporcional ao erro padrão equivale a $EA = k.EP$.

Se k= 1,00 ➔ Nível de confiança 68%.

Se k= 1,64 ➔ Nível de confiança 90%.

Se k= 1,96 ➔ Nível de confiança 95%.

Quanto maior o valor de k, maior o nível de confiança na estimação da média populacional.

2.5. OUTRAS MEDIDAS (ASSIMETRIA E CURTOSE)

2.5.1. Coeficiente de Assimetria

Utilizado para mensurar o grau de assimetria da distribuição em torno da média, sendo assimetria positiva quando existe desvio para a direita e negativa, quando há para a esquerda.

2.5.2. Coeficiente de Curtose

Utilizado para medir o grau da relação entre a altura e largura da curva, ou seja, o grau de achatamento da curva. O padrão de achatamento pode indicar curva: leptocúrtica, mesocúrtica ou platicúrtica.

2.6. TABELAS E GRÁFICOS

São constituídas por formas de apresentação do resumo dos dados, devendo ser autoexplicativas.

Observações sobre gráficos e tabelas:

I. A construção de gráficos e tabelas é estabelecida por meio de regras, sendo as mais comuns: IBGE e ABNT.

II. Um tipo especial de tabela consiste na tabela de contingência, onde as linhas e colunas são compostas por frequências de ocorrências dos atributos.

III. Os gráficos mais usuais para variáveis numéricas são histogramas, barras com haste e diagrama de caixas (*Box plot*).

IV. Para as variáveis categóricas os gráficos de setores circulares (do tipo *pizza*) e os gráficos em barras (vertical e horizontal).

V. Uma aplicação interessante do *box plot* consiste em identificar valor discrepante (*outlier*). A maioria dos programas de análise estatística define *outliers* como valores fora do intervalo (Q_1 – 1,5 Δ Q; Q_3 + 1,5 Δ Q), onde Δ Q= Q_3 – Q_1 denomina-se amplitude interquartil.

VI. São duas as fórmulas mais usuais para determinar o número K de classes de uma distribuição de frequências:

a) $K = \sqrt{n}$.

b) $K = 1 + 3,2\log n$ (Sturges).

2.7. QUANTIS

Chama-se quantil de ordem p ou p-quantil, a medida indicada por q(p), sendo p uma proporção qualquer (0<p<1), onde 100p% das observações sejam menores do que q(p). Os quantis são valores separatrizes importantes em várias áreas das ciências da saúde e alguns de seus nomes particulares bem conhecidos no cotidiano. Por exemplo:

q(0,05) = 5º Percentil (P_5)

q(0,10) = 10º Percentil (P_{10}) = 1º Decil (D_1)

q(0,25) = 25º Percentil (P_{25}) = 1º Quartil (Q_1)

q(0,50) = 50º Percentil (P_{50}) = 5º Decil (D_5) = 2º Quartil (Q_2) = Mediana (Me)

q(0,75) = 75º Percentil (P_{75}) = 3º Quartil (Q_3)

q(0,90) = 90º Percentil (P_{90}) = 9º Decil (D_9)

q(0,95) = 95º Percentil (P_{95})

Para calcular os quantis q(p), para qualquer p, 0<p<1, pode-se utilizar o seguinte procedimento para um conjunto de valores $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ (n valores ordenados em ordem crescente; ou seja, a estatística de ordem):

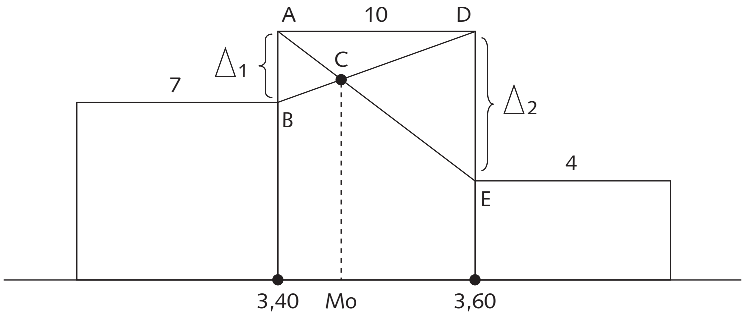
1. q(p) = $X_{(i)}$ Se $p = p_i = \dfrac{i - 0,5}{n}, i = 1,2,...,n$;

2. q(p) = $X_{(1)}$ Se $p < p_1$;

3. $q(p) = X_{(n)}$ Se $p > p_n$;

4. $q(p) = (1 - f_i)q(p_i) + f_i q(p_{i+1})$ Se $p_i < p < p_{i+1}$, onde $fi = \dfrac{p - p_i}{p_{i+1} - p_i}$.

2.8. MODA DE CZUBER

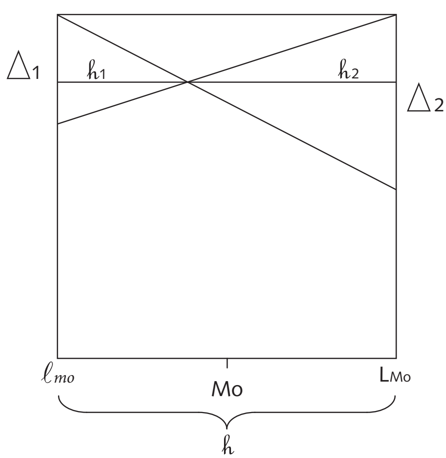


Utilizando a semelhança entre triângulos, tem-se:

$$\Delta ABC \approx \Delta DEC \Leftrightarrow \frac{Mo - 3{,}40}{\Delta_1(3)} = \frac{3{,}60 - Mo}{\Delta_2(6)};$$

$$6Mo - 20{,}40 = 10{,}80 - 3Mo \Rightarrow Mo = \frac{31{,}2}{9} = 3{,}47.$$

Neste sentido, tem-se de maneira geral:



$$h_1 = Mo - l_{Mo}$$
$$h_2 = l_{Mo} - Mo$$
$$h_1 + h_2 = l_{Mo} - l_{Mo} = h$$
$$\frac{h_1}{\Delta_1} = \frac{h_2}{\Delta_2} \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$
$$\frac{h_1 + h_2}{h_1} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_1} \Rightarrow \frac{h}{Mo - l_{Mo}} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_1} \Leftrightarrow Mo - l_{mo} = \frac{\Delta_1 h}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

Para entendimento do cálculo dos quantis e algumas medidas descritivas a partir de uma distribuição de frequências, considere os exemplos apresentados a seguir.

1) A partir dos seguintes valores de HDL colesterol (mg/dL); 26, 54, 35, 37 e 36 determinar:

a) Os quantis correspondentes aos valores observados.

$X_{(1)} = 26$; $X_{(2)} = 35$; $X_{(3)} = 36$; $X_{(4)} = 37$; $X_{(5)} = 54$ (n=5)

$$p = p_i = \frac{i - 0,5}{5} \text{ se i = 1,2,3,4,5}$$

$p = p_1 = 0,10 \rightarrow q(0,10) = X_{(1)} \rightarrow P_{10} = 26$

$p = p_2 = 0,30 \rightarrow q(0,30) = X_{(2)} \rightarrow P_{30} = 35$

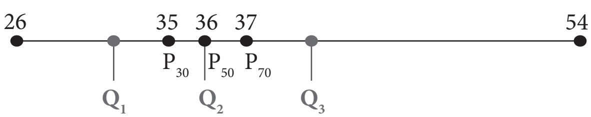
$p = p_3 = 0,50 \rightarrow q(0,50) = X_{(3)} \rightarrow P_{50} = Me = 36$

$p = p_4 = 0,70 \rightarrow q(0,70) = X_{(4)} \rightarrow P_{70} = 37$

$p = p_5 = 0,90 \rightarrow q(0,90) = X_{(5)} \rightarrow P_{90} = 54$

b) Os quantis correspondentes aos quartis (Q_1,Q_2,Q_3).

$Q_{(1)} = q(0,25)$; $Q_{(2)} = q(0,50)$; $Q_{(3)} = q(0,75)$



$Q_{(1)} = q(0,25) = (1 - f_1)q(p_1) + f_1 q(p_2)$ onde $f_1 = \frac{0,25 - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{0,15}{0,20} = 0,75$

$Q_{(1)} = (1 - 0,75)\ (26) + 0,75\ (35) = 32,75$

$Q_{(2)} = q(0,50) = P_{50} = 36$

$$Q_{(3)} = q(0{,}75) = (1 - f_4)\, q(p_4) + f_4 q(p_5) \text{ onde } f_4 = \frac{0{,}75 - p_4}{p_5 - p_4} = \frac{0{,}05}{0{,}20} = 0{,}25$$

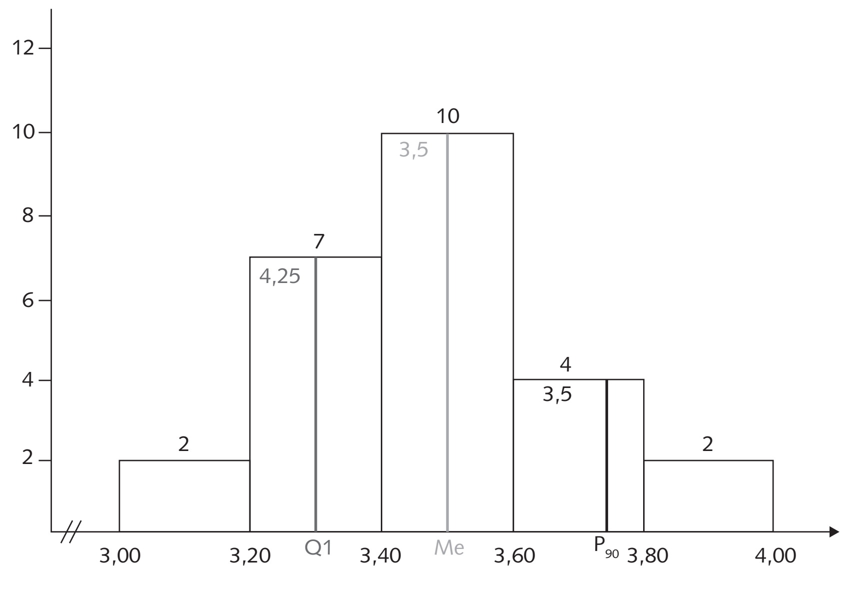
$$Q_{(3)} = (1 - 0{,}25)\,(37) + 0{,}25\,(54) = 41{,}25$$

2) Considere a distribuição do peso (Tabela 2.1) e determine as seguintes medidas descritivas: $\overline{x}$; s; Q_1; Me e P_{90}.

Tabela 2.1 Distribuição de frequências do peso (kg) de recém-nascidos

Classes	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i(x_i - \overline{x})$	$f_i x_i^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
3,00 $\mapsto$ 3,20	3,10	2	6,20	-0,752	19,22	0,282752
3,20 $\mapsto$ 3,40	3,30	7	23,10	-1,232	76,23	0,216832
3,40 $\mapsto$ 3,60	3,50	10	35,00	0,240	122,50	0,005760
3,60 $\mapsto$ 3,80	3,70	4	14,80	0,896	54,76	0,200704
3,80 $\mapsto$ 4,00	3,90	2	7,80	0,848	30,42	0,359552
Total		25	86,90	0,000	303,13	1,065600

$$\overline{x} = 3{,}476 \qquad s^2 = \frac{303{,}13 - 25 * 3{,}476^2}{24} = \frac{1{,}0656}{24} = 0{,}0444 \rightarrow s = 0{,}211$$



$$n = 25 \qquad \theta(Q_1) = \theta(25/4) = \theta(6,25) \Rightarrow \frac{3,40 - 3,20}{7} = \frac{Q_1 - 3,20}{4,25}$$

$$Q_1 = 3,20 + \frac{0,20 * 4,25}{7} = 3,321$$

$$n = 25 \qquad \theta(Q_2) = \theta(Me) = \theta(25/2) = \theta(12,5) \Rightarrow \frac{3,60 - 3,40}{10} = \frac{Me - 3,40}{3,50}$$

$$Me = 3,40 + \frac{0,20 * 3,50}{10} = 3,47$$

$$n = 25 \qquad \theta(P_{90}) = \theta(90 * 25/100) = \theta(22,5) \Rightarrow \frac{3,80 - 3,60}{4} = \frac{P_{90} - 3,60}{3,50}$$

$$P_{90} = 3,60 + \frac{0,20 * 3,50}{4} = 3,775$$

3) Tomando os níveis do colesterol total, apresentado na Tabela 2.2, calcular: Mo; valor mínimo; valor máximo; $\overline{x}$; s; Q_1; Me e Q_3.

Tabela 2.2 Colesterol total de indivíduos sadios (mg/dL) e indicativos de referência

180	182	184	190	186	192	188	186	186

Colesterol Total	Desejável	< 200 mg/dL		
Glicose	Normal	70 a 110 mg/dL		
HDL Colesterol	Desejável	40 a 60 mg/dL		
LDL Colesterol	Ótimo	< 100mg/dL	Desejável	100 a 129 mg/dL
Triglicérides	TG/5 = COLTOT – HDL – LDL			

X(1) = 180 X(2) = 182 X(3) = 184 X(4) = 186 X(5) = 186 X(6) = 186
X(7) = 188 X(8) = 190 X(9) = 192

n = 9 (ímpar)

Valor mínimo = $X_{(1)}$ = 180
Valor máximo = $X_{(9)}$ = 192

$$1^{\text{o}}\ \text{Quartil} = Q_1 = X\left(\frac{n+1}{4}\right) = X(2,50) = 183$$

$$\text{Mediana} = Q_2 = X\left(\frac{n+1}{2}\right) = X(5) = 186$$

$$3^{\text{o}}\ \text{Quartil} = Q_3 = X\left(\frac{3(n+1)}{4}\right) = X(7,5) = 189$$

Moda = Mo = 186

$$\text{Média} = \overline{x} = \frac{1674}{9} = 186$$

$$\text{Variância} = s^2 = \frac{311476 - 9 * 186^2}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

$$\text{Desvio padrão} = s = +\sqrt{14} = 3{,}74$$

4) Considere o seguinte rol da massa corpórea de *Rattus norvegicus* (Wistar): 0,300; 0,317; 0,320; 0,322; 0,324; 0,325; 0,328; 0,337; 0,339; 0,340; 0,344; 0,346; 0,347; 0,350; 0,352; 0,352; 0,358; 0,358; 0,359; 0,361; 0,367; 0,369; 0,377; 0,384; 0,400 e construa a distribuição de frequências dos dados, calculando a média, mediana, moda, variância, desvio padrão e coeficiente de variação.

Classes (kg)	x_i	f_i	$fr_i(\%)$	$facr_i(\%)$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0,300 $\mapsto$ 0,320	0,310	2	8,00	8,00	0,62	0,1922
0,320 $\mapsto$ 0,340	0,330	7	28,00	36,00	2,31	0,7623
0,340 $\mapsto$ 0,360	0,350	10	40,00	76,00	3,50	1,2250
0,360 $\mapsto$ 0,380	0,370	4	16,00	92,00	1,48	0,5476
0,380 $\mapsto$ 0,400	0,390	2	8,00	100,00	0,78	0,3042
Total		25	100,00		8,69	3,0313

k = 1+3,2 log 25 = 5,47 $\approx$ 5; h = 0,100/5 = 0,020 kg;

$\bar{x}$ = 0,3476 kg; Me = 0,347 kg; Mo = 0,347 kg;

s^2 = 0,00045 kg^2; s = 0,022 kg; CV(%)=6,32 %.

2.9. EXERCÍCIOS: ESTATÍSTICA DESCRITIVA

1) Resultados de três alunos da 8ª série da rede pública municipal submetidos a cinco testes de aptidão física.

Teste	**Média ("Gold")**	**Desvio padrão ("Gold")**	**Pedro**	**João**	**Manuel**
Nº abdominais em 2 min.	30	6	32	40	20
Salto em extensão (cm)	150	25	146	140	125
Suspensão braços flexionados (seg.)	50	10	35	70	75
Distância percorrida 12 min. (m)	1850	200	2256	1700	1650
Tempo para nadar 50m (seg.)	30	5	35	28	26

a) Para cada aluno, indicar o teste de melhor desempenho.
b) Estabelecer um índice (valor único) que expresse o desempenho global do aluno.
c) Classificar os três alunos segundo índice global estabelecido.

2) Em uma maternidade foi observada a distribuição do peso dos nascituros, conforme descrita a seguir:

Peso (kg)	Freq. Absoluta	Freq. Relativa (%)
1,2 $\mapsto$ 1,6	2	4,0
1,6 $\mapsto$ 2,0	10	20,0
2,0 $\mapsto$ 2,4	12	24,0
2,4 $\mapsto$ 2,8	14	28,0
2,8 $\mapsto$ 3,2	8	16,0
3,2 $\mapsto$ 3,6	4	8,0
Total	50	100,0

a) Qual a média da distribuição?
b) Construir o histograma.
c) Dividir os pesos em quatro categorias, de modo que:
   - os 30% mais leves sejam da categoria A;
   - os 25% seguintes sejam da categoria B;
   - os 25% seguintes sejam da categoria C;
   - os 20% restantes (ou seja, os 20% mais pesados) sejam da categoria D.
d) Quais os limites de peso entre as categorias A, B, C e D.

3) Considerando informações sobre o estado civil, grau de instrução, número de filhos, salário (expresso como fração do salário mínimo), idade (medida em anos e meses) e procedência de técnicos de laboratório clínico, responda as indagações que serão descritas a seguir.

Nº	Estado Civil	Grau de instrução	Salário (X sal. mín.)	Idade		Região de procedência
				anos	meses	
1	solteiro	ensino fundamental	1,25	26	03	interior
2	casado	ensino fundamental	1,50	32	10	capital

continuação

Nº	Estado Civil	Grau de instrução	Salário (X sal. mín.)	Idade		Região de procedência
				anos	meses	
3	casado	ensino fundamental	1,50	36	05	capital
4	solteiro	ensino médio	1,60	20	10	interior
5	solteiro	ensino fundamental	1,80	40	07	interior
6	casado	ensino fundamental	1,30	28	00	interior
7	solteiro	ensino fundamental	1,40	41	00	interior
8	solteiro	ensino fundamental	1,50	43	04	capital
9	casado	ensino médio	1,65	34	10	capital
10	solteiro	ensino médio	1,35	23	06	interior
11	casado	ensino médio	1,95	33	06	interior
12	solteiro	ensino fundamental	1,30	27	11	capital
13	solteiro	ensino médio	1,65	37	05	interior
14	casado	ensino fundamental	1,85	44	02	interior
15	casado	ensino médio	1,95	30	05	interior
16	solteiro	ensino médio	2,05	38	08	capital

a) Qual a porcentagem de empregados solteiros?

b) Como o grau de instrução está associado com o estado civil? E com a região de procedência?

c) Qual o salário médio de cada grau de instrução?

d) Qual a idade média de cada região de procedência?

e) Faça o gráfico de barras para a média de salário segundo o grau de instrução?

f) Em qual estado civil o salário é mais homogêneo?

g) A maioria dos casados situa-se acima da idade média dos empregados?

h) Construa a distribuição conjunta de frequências das variáveis: estado civil e região de procedência.

i) Se for concedido um abono de meio salário mínimo para todos os 16 empregados, qual a alteração que haverá na média? E na variância? E no desvio padrão? E na mediana? E no coeficiente de variação? Justifique sua resposta.

j) Em qual estado civil a variação máxima de salários é maior?

2.10. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) a)

Teste	Pedro	João	Manuel
Nº abdominais	0,33	1,67	-1,67
Salto extensão	-0,16	-0,40	-1,00
Suspensão braços	-1,50	2,00	2,50
Distância	2,03	-0,75	-1,00
Tempo	1,00	-0,40	-0,80
Melhor Desempenho	Distância	Suspensão	Suspensão

b) Desempenho médio

$\overline{z}_{Pedro} = -0,060;$ $\overline{z}_{João} = 0,584;$ $\overline{z}_{Manuel} = -0,074.$

c) João > Pedro > Manuel.

2) a) $\overline{x} = 2,424kg.$

c) $P_{30} = 2,1kg;$ $P_{55} = 2,7kg;$ $P_{80} = 3,1kg.$

d) $1,2 \leq A < 2,1;$ $2,1 \leq B < 2,7;$ $2,7 \leq C < 3,1;$ $3,1 \leq D < 3,6.$

3) a) 56,25%.

b)

Escolaridade	Solteiro	Casado	Total	Interior	Capital	Total
E. Fundamental	5	4	9	5	4	9
E. Médio	4	3	7	5	2	7
Total	9	7	16	10	6	16

c) $\overline{x}(\text{Fundamental}) = 1,49sm;$ $\overline{x}(\text{Médio}) = 1,74sm.$

d) $\overline{x}(\text{Interior}) = 390,80$ meses; $\overline{x}(\text{Capital}) = 428,00$ meses.

e) $\text{Fundamental} = 1,49 \pm 0,21.$

$\text{Médio} = 1,74 \pm 0,25.$

f) $CV(\text{solteiro}) = 16,88\%;$ $CV(\text{casado}) = 14,97\%.$ O salário é mais homogêneo nos casados.

g) $\overline{x}(\text{Geral}) = 404,75$ meses; dos 7 empregados casados, 3(42,86%) estão acima da média geral (minoria).

h)

Estado civil e Procedência	Freq. Absoluta	Freq. Relativa (%)
Solteiro Interior	6	37,50
Solteiro Capital	3	18,75
Casado Interior	4	25,00
Casado Capital	3	18,75
Total	16	100,00

i)

Estatística	Valor Original	Valor Abonado	Situação
Média	1,60	2,10	Aumenta 0,5 sm
Variância	0,0676	0,0676	Inalterada
Desvio padrão	0,26	0,26	Inalterada
Mediana	1,55	2,05	Aumenta 0,5 sm
Coef. Variação (%)	16,25%	12,38%	Diminui (Média Aumentada)

j) Solteiro $\Rightarrow$ "range" = 2,05-1,25=0,80 sm

Casado $\Rightarrow$ "range" = 1,95-1,30=0,65 sm.

A maior variação de salários ocorre nos solteiros.

3

PROBABILIDADES

3.1. INTRODUÇÃO

Acredita-se que todo mundo gosta de ter certeza, de estar sempre certo, de acertar. Para muitos, principalmente os mais teimosos, incertezas e dúvidas refletem uma espécie de fraqueza de firmeza de atitudes. Infelizmente, saber aceitar que é perfeitamente razoável não saber tudo e que nem sempre estamos certos, requer uma boa dose de modéstia para as incertezas e imprecisões. Neste sentido, a noção de um determinismo absoluto deve ser desconsiderada, em favor das probabilidades. Estas sim são as que contam, nas certezas. Pode-se dizer que a teoria da probabilidade começa no século XVII com os matemáticos franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). Antoine Gambaud (1607-1684), um importante cavalheiro e também um jogador entusiasmado, discutia com Pascal temas relacionados com a possibilidade de sucesso em jogos que envolviam cartas. Pascal, interessado no assunto, correspondeu-se com Fermat. Nessas cartas, escritas em 1654 encontram-se o desenvolvimento do que hoje é chamado probabilidade finita. Pode-se dizer que a teoria de probabilidade contou em sua origem com o estímulo de questões levantadas pela observação e prática dos jogos de azar, cuja participação científica acontece com o objetivo de medir o acaso e, com isso, exercer maior controle sobre os fenômenos naturais. Outras contribuições importantes para o desenvolvimento da teoria da probabilidade acontecem com o matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754) a partir da publicação da obra Doutrina do acaso *(Doctrine of chances)* e com o matemático suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) na obra Arte da conjectura *(Ars conjectandi)*. Na sequência do desenvolvimento têm-se os matemáticos franceses Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) e Siméon Poisson (1781-1840); o matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) e o matemático russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).

Kolmogorov pensou sobre a natureza dos cálculos de probabilidade e finalmente compreendeu que encontrar a probabilidade de um evento era exatamente igual a encontrar a área de uma figura irregular. Adotou a recém surgida matemática da teoria de medição (Teoria de Henri Lebesgue) para os cálculos de probabilidade e, com essas ferramentas, foi capaz de identificar um pequeno conjunto de axiomas sobre os quais pôde construir todo o corpo da teoria de probabilidade (Axiomatização da Teoria de Probabilidades). Essa teoria é ensinada hoje como a única forma de ver a probabilidade e que resolve para sempre todas as questões sobre a validade dos cálculos.

Deve ser destacado que a própria palavra probabilidade foi criada para lidar com o sentido da incerteza pessoal. Não se deve referir-se à probabilidade tanto como um número preciso, mas como método de ordenar idéias (probabilidade de chover a manhã é maior que a probabilidade de nevar).

Alguns conceitos tornam-se necessários para o aprofundamento do conhecimento de probabilidade:

I. Fenômeno Aleatório (Casual): refere-se à situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

   Exemplos: – Alteração do ritmo cardíaco de indivíduos submetidos à prova de exaustão.
   – Configuração do gênero de casais com quatro filhos.

II. Experimento: qualquer processo que permite ao pesquisador fazer observações.

III. Evento: uma coleção de resultados de um experimento.

IV. Evento Simples ou Elementar (A): é um resultado, ou um evento, que não comporta mais qualquer decomposição.

V. Espaço Amostral (Ω): consiste de todos os possíveis eventos simples de um experimento.

3.2. DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Uma função P(.) é denominada probabilidade se satisfaz as condições:

I. $O \leq P(A) \leq 1,\ AC\Omega.$

II. $P(\Omega) = 1.$

III. $P(\bigcup_{j=1}^{n} Aj) = \sum_{j=1}^{n} P(Aj)$, com os A_j´s mutuamente exclusivos.

Espaço Amostral Equiprovável: todos os pontos (eventos) têm a mesma probabilidade $\left(P(.)=\frac{1}{n}\right)$. Se um evento A tem m pontos amostrais, então $P(A)=\frac{m}{n}$, ou seja, $P\left(A\right)=$ número de casos favoráveis/número total. Essa é a definição que aproxima a probabilidade à frequência relativa (definição frequentista de probabilidade).

Um conceito interessante sobre a convergência assintótica em probabilidade trata-se da LGN (Lei dos Grandes Números).

Lei dos Grandes Números: Quando se repete um experimento um grande número de vezes, a probabilidade pela frequência relativa de um evento tende a probabilidade teórica.

3.3. PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Em muitas situações práticas, os fenômenos aleatórios considerados podem ser separados em etapas consecutivas. A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das próximas etapas. Com este ganho de informação pode-se "recalcular" as probabilidades de interesse, cujos resultados recebem o nome de probabilidade condicional. Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é obtida por $P\left(A/B\right)=P(A\cap B)\,/\,P(B)$, com $P(B)>0$.

A regra do produto de probabilidades pode ser deduzida da expressão anterior, ou seja, $P(A\cap B)=P(A/B)P(B)$, com $P(B)>0$. Se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A, deve acontecer que $P(A/B)=P(A)$, ou equivalentemente, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, com $P(B)>0$, mostrando a independência probabilística entre os eventos A e B.

Para melhor entendimento da inferência que o conhecimento prévio pode modificar as probabilidades, considere o seguinte exemplo didático: Numa família com duas crianças, qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? O espaço amostral com as possíveis ordens de nascimento é formado por $\Omega=\left\{\left(M,M\right);\left(M,F\right);\left(F,M\right);\left(F,F\right)\right\}$. O evento favorável para a questão formulada constitui-se do par $\left(F,F\right)$, ou melhor, tem-se um sucesso em quatro possibilidades. Neste contexto, a probabilidade procurada é $1/4=0,25$. Porém, se existe a união condicional a probabilidade dada na informação adicional de que há um feminino, o espaço amostral fica modificado como $\Omega = \{(M,F);(F,M);(F,F)\}$ e, portanto, existindo um sucesso em três possibilidades. Isto é, a probabilidade procurada é $1/3 = 0,33$ (praticamente um aumento de 33% no recálculo da probabilidade). Não esquecer que para o exemplo didático considerou-se que as probabilidades de ocorrência para M e F são iguais e fixas.

3.4. TEOREMA DE BAYES

Uma das aplicações mais importantes das probabilidades condicionais consiste no Teorema de Bayes, que envolve as probabilidades "a priori" $(P(C_i))$; "a posteriori" $(P(C_i/A))$ e de verossimilhanças $(P(A/C_i))$.

Seja a participação $C_1, C_2, \ldots, C_n$ do espaço amostral Ω

$$\left(C_i \cap C_{i'} = \varnothing, i \neq i'; \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega \right)$$

e as seguintes probabilidades conhecidas $P(C_i)$ e $P(A/C_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Então para qualquer $j = 1, \ldots, n$, tem-se:

$$P(C_j / A) = \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A / C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A / C_i)P(C_i)}.$$

3.5. EXEMPLOS APLICADOS

1) Um teste de proficiência "in loco", avaliou a competência dos técnicos que analisavam o teste Papanicolau para anormalidades. Os técnicos de 306 laboratórios de citologia foram avaliados e revelaram:

   - P(Câncer feminino no colo do útero) = 0,000083;
   - P(Teste negativo/câncer) = 0,1625 (falso negativo);
   - P(Teste positivo/câncer) = 0,8375 (sensibilidade);
   - P(Teste positivo/sem câncer) = 0,1864 (falso positivo);
   - P(Teste negativo/sem câncer) = 0,8136 (especificidade).

Qual a probabilidade de uma mulher com Papanicolau positivo para o câncer ter realmente a doença?

$$P\left(Câncer/Teste\ positivo\right)=$$

$$=\frac{P\left(Teste\ Pos/Câncer\right)P\left(Câncer\right)}{P\left(Teste\ Pos/Câncer\right)P\left(Câncer\right)+P\left(Teste\ Pos/Sem\ Câncer\right)P\left(Sem\ Câncer\right)}=$$

$$=\frac{0{,}000083\times 0{,}8375}{0{,}000083\times 0{,}8375+0{,}999917\times 0{,}1864}=0{,}000373$$ (Valor preditivo de um teste positivo).

$$P(Sem\,Câncer\ /\ Teste\ negativo)=0{,}999983$$ (Valor preditivo de um teste negativo).

2) Levantamento Nacional de Entrevistas de Saúde (MS).
O quadro a seguir apresenta os resultados do levantamento realizado pelo Ministério da Saúde.

Condição de Emprego (Evento)	Amostra	Debilidade Auditiva (Lesão)
Atualmente Empregado (E_1)	400000	60000
Atualmente Desempregado (E_2)	38000	950
Fora de Força de Trabalho (E_3)	227000	2270
Total ($E_1 \cup E_2 \cup E_3$)	665000	63220

As probabilidades dos eventos são apresentadas no quadro abaixo.

Evento	$P\left(\text{Evento}\right)=P\left(E\right)$	$P\left(\text{Deb}/\text{Evento}\right)=P\left(D/E\right)$	$P(D\cap E)=P\left(E\right)\times P\left(D/E\right)$
E_1	0,6015037	0,150	0,0902255
E_2	0,0571428	0,025	0,00142857
E_3	0,3413533	0,010	0,00341353
D(debilidade)	0,0950676		0,0950675

A probabilidade de Debilidade Auditiva pode ser determinada por:
$P(D)=P(D\cap E_1)+P(D\cap E_2)+P(D\cap E_3)=0{,}0950675$ ou ainda,
$P(D)=63220\ /\ 665000=0{,}0950675$.

3) Sensibilidade e Especificidade
Sensibilidade(S) e Especificidade (E) são características fixas dos testes diagnósticos. Os valores preditivos do teste, porém, dependem da prevalência da doença.

Teste	Doença		Probabilidade
	Presente (D)	Ausente ($\overline{D}$)	
Positivo (T+)	$P(D \cap T_+)$	$P(\overline{D} \cap T_+)$	$P(T_+)$
Negativo (T-)	$P(D \cap T_-)$	$P(\overline{D} \cap T_-)$	$P(T_-)$
Probabilidade	$P(D)$	$P(\overline{D})$	

Falso Positivo = $P(T_+ / \overline{D}) = P(\overline{D} \cap T_+) / P(\overline{D})$

Falso Negativo = $P(T_- / D) = P(D \cap T_-) / P(D)$

Correto Positivo = $P(T_+ / D) = P(D \cap T_+) / P(D)$ = Sensibilidade

Correto Negativo = $P(T_- / \overline{D}) = P(\overline{D} \cap T_-) / P(\overline{D})$ = Especificidade

Valor Preditivo Positivo = $P(D / T_+) = P(D \cap T_+) / P(T_+)$

Valor Preditivo Negativo = $P(\overline{D} / T_-) = P(\overline{D} \cap T_-) / P(T_-)$

Considerando os resultados do exemplo 1:

$P(D / T_+) = 0{,}000373$ (VPP) ➔ Para cada 1 milhão (1000000) de Papanicolau positivos, somente 373 representam casos verdadeiros (corretos) de câncer no colo(cólon) uterino.

$P(\overline{D} / T_-) = 0{,}999987$ (VPN) ➔ Para cada milhão de Papanicolau negativos, 999987 representam casos verdadeiros de ausência de câncer no colo uterino.

4) Dois equipamentos, A e B, para processamento de dosagens bioquímicas são colocados para teste de controle de qualidade por 120 horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um equipamento do tipo A é de 1/30; no tipo B, 1/80 e em ambos, 1/1000. Qual a probabilidade de que:

   a) Pelo menos um dos equipamentos tenha apresentado erro?

   $$P(A \cup B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000} = (800 + 300 - 24) / 24000 = 0{,}04483.$$

   b) Nenhum equipamento tenha apresentado erro?

   $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}95517.$$

c) Apenas o equipamento A tenha apresentado erro?

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{30} - \frac{1}{1000} = (100-3)/3000 = 0{,}03233.$$

Observação: $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

3.6. PROBABILIDADE NA VIDA REAL

Considere um ensaio clínico para examinar a eficácia de um novo tratamento para AIDS. O resultado da análise estatística aponta que a diferença entre o antigo tratamento e o novo é "significante". Isso mostra que a comunidade médica pode estar certa de que o novo tratamento funcionará no próximo paciente com AIDS? Significa que ele funcionará para certa porcentagem de pacientes com AIDS? Ou apenas que, na população altamente selecionada do estudo, parece haver vantagem do novo tratamento (mais provável para a reposta desejada da cura) em relação ao antigo tratamento?

3.7. EXERCÍCIOS: PROBABILIDADES

1) Um estudante acredita que sua chance de passar no vestibular de biomedicina é de 2:23. Qual sua estimativa subjetiva da probabilidade de ser aprovado?
2) A experiência indica que 15% dos inscritos para a prova de seleção do aprimoramento nunca aparecem. Se o anfiteatro para a realização da prova tem 60 lugares e são aceitas 62 inscrições, qual a probabilidade de poder acomodar no anfiteatro todos os que comparecerem?
3) Qual o número mínimo de filhos de um casal para assegurar uma probabilidade superior a 0,79 de obter ao menos um filho do gênero feminino?
4) De acordo com certa tábua de mortalidade, a probabilidade de José estar vivo daqui a 28 anos é 0,6; e a mesma probabilidade para João é 0,9. Determinar:
   a) P(ambos estarem vivos daqui a 28 anos).
   b) P(nenhum estar vivo daqui a 28 anos).
   c) P(um estar vivo e outro estar morto daqui a 28 anos).

5) Determinar a probabilidade de n pessoas ($n \leq 365$) fazerem aniversário em datas diferentes.

6) As probabilidades de um aluno ser aprovado em Fisiologia, Morfologia e ambas são 0,75; 0,84 e 0,63, respectivamente. Qual a probabilidade de ser aprovado em Fisiologia, sabendo-se que foi aprovado em Morfologia?

7) Suponha um teste diagnóstico para câncer em que 95% dos que têm a doença reagem positivamente, enquanto 3% dos que não têm a doença também reagem positivamente. Suponha ainda que 2% da população sejam portadores da doença. Qual a probabilidade de um indivíduo sorteado da população que respondeu positivamente ao teste diagnóstico, ter de fato câncer?

8) Um grupo de pessoas foi classificado quanto a peso e pressão arterial de acordo com as proporções do quadro a seguir:

Pressão	**Peso**			**Total**
	Excesso	**Normal**	**Deficiente**	
Elevada	0,10	0,08	0,02	0,20
Normal	0,15	0,45	0,20	0,80
Total	0,25	0,53	0,22	1,00

a) Qual a probabilidade de uma pessoa deste grupo, escolhida ao acaso, ter pressão elevada?
b) Verifica-se que a pessoa escolhida tem excesso de peso, qual a probabilidade de ter também pressão elevada?
c) Os eventos "excesso de peso" e "pressão elevada" são independentes?

9) Considere o seguinte quadro de informação do Ministério da Saúde (Manual de Qualificação do Captador – Brasília / 1997)

Rh	**Sistema ABO**			
	O	**A**	**B**	**AB**
+	36%	34%	8%	2,5%
-	9%	8%	2%	0,5%

Calcular as seguintes probabilidades:

a) P(Rh+ ou O). b) P(Rh– / O). c) P(Rh-).
d) P(AB). e) P(O+ ou AB+). f) P(O+ ou A– ou B+).

10) Num teste com duas marcas que lhe são apresentadas em ordem aleatória, um experimentador de vinhos faz três identificações corretas em três tentativas.
    a) Qual a probabilidade de isso ocorrer, se na realidade ele não possuir habilidade alguma para distingui-los?
    b) E se a probabilidade de distinguir corretamente é de 90% em cada tentativa?

11) Sabendo-se que 8% de um lote de ratos tem peso superior a 296g e 16% entre 280 e 296g, qual a probabilidade de um rato com peso superior a 280g pesar mais que 296g?

12) Num lote de animais, 50% são machos e 20% da raça Wistar. Dentre os que são machos, 30% são Wistar. Qual a porcentagem de animais que não são machos e nem Wistar?

13) Em uma gaiola metálica 4% dos coelhos machos e 1% das fêmeas têm mais que 1,8 kg de peso. Por outro lado, 60 % dos coelhos são fêmeas. Se um coelho escolhido casualmente tem mais que 1,8kg de peso, qual a probabilidade de ser fêmea?

14) Sabendo-se que 2% dos exames clínicos feitos por um laboratório apresentam falha humana, 1% falha técnica e 2,5% pelo menos uma das duas falhas, qual a probabilidade de um exame ter as duas falhas?

15) São dadas as seguintes informações a respeito dos animais de um biotério: 2% é macho e WKY; 10% é WKY e 50% macho. Qual a probabilidade de um animal não sendo macho ser WKY?

3.8. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) 0,08.

2) 0,999498.

3) n=3.

4) a) 0,54. b) 0,04. c) 0,42.

5) $\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$.

6) 0,75.

7) 0,396.

8) a) 0,20. b) 0,40. c) Não.

9) a) 0,895. b) 0,20. c) 0,195.
d) 0,03. e) 0,385. f) 0,52.

10) a) 0,125. b) 0,729.

11) 0,333.

12) 0,45.

13) 0,20.

14) 0,005.

15) 0,16.

4

MODELOS PROBABILÍSTICOS

No enfoque determinista original, sempre havia a crença de que medições mais refinadas levariam a uma definição melhor da realidade física examinada. No enfoque estatístico, os parâmetros de uma distribuição algumas vezes não exigem realidade física e só podem ser estimados pelo erro, não importa quão preciso seja o sistema de medição. Por exemplo, no enfoque determinista, existe um número fixo, a constante gravitacional, que descreve como as coisas caem em direção à Terra. Na abordagem estatística, as medições da constante gravitacional serão sempre diferentes, e a dispersão de sua distribuição é o que se procura estabelecer para "entender" os corpos que caem.

Os números que identificam a função de distribuição não são os números medidos experimentalmente. Eles não podem ser observados, embora possam ser inferidos pelo modo como as medições se dispersam, e posteriormente foram chamados de parâmetros (do grego – "quase-medições"). Os quatro parâmetros que descrevem completamente um membro do sistema de Pearson são:

a) a média (o valor central a partir do qual as medições se dispersam);
b) o desvio padrão (o quanto a maioria das medições se dispersa em torno da média);
c) simetria (o grau em que as medições se acumulam em apenas um lado da média);
d) curtose (o quanto as medições raras se afastam da média).

4.1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Uma quantidade X associada a cada possível resultado do espaço amostral é denominada de Variável Aleatória Discreta (VAD) se assume valores num conjunto enumerável com certa probabilidade.

Exemplos:

– Número de filhos em famílias.
– Número de gestações.

A função de probabilidade atribui a cada valor da VAD sua probabilidade. A notação para a função é feita como: $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i \quad i = 1,\ldots,n$; onde $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

4.2. MODELOS DISCRETOS MAIS COMUNS

4.2.1. Modelo Uniforme

Todos os valores ocorrem com a mesma probabilidade.

$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, para $i = 1,\ldots,n$.

4.2.2. Modelo (Ensaio) de Bernoulli

Uma VAD segue o modelo Bernoulli quando o espaço amostral tem alternativas dicotômicas, que genericamente podem ser representadas por respostas tipo sucesso-fracasso.

$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$ para x=0,1, com 0<p<1, sendo x = 0 (fracasso) e x = 1 (sucesso).

4.2.3. Modelo Binomial

Constitui-se pela repetição de n ensaios independentes de Bernoulli, sendo todos com a mesma probabilidade de sucesso(p). A variável aleatória X que conta o número total de sucessos é denominada Binomial com parâmetros n e p $(X \sim B(n; p))$.

A função de probabilidade é dada por:

$$P(X = \kappa) = \binom{n}{\kappa} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ com } k = 0, 1, \ldots, n;\ 0 < p < 1 \text{ e } \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1.$$

Duas considerações para a variável X com distribuição binomial:

I. $E(X) = np$.

II. $Var(X) = np(1-p)$.

4.2.4. Exemplos

1) Sabe-se que a eficiência de uma vacina é 80%. Um grupo de três indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e submetido a testes para verificar se a imunização foi efetiva. Construa as probabilidades para o número de indivíduos imunizados no sorteio.

X	0	1	2	3
P(X=x)	0,008	0,096	0,384	0,512

2) Certa doença pode ser curada por meio de procedimento cirúrgico em 96% dos casos. Dentre os que têm a doença, sorteamos 10 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Qual a probabilidade de:

   I. Todos serem curados?

   $P(X=10)=0,6648.$

   II. Pelo menos 8 curados?

   $P(X\geq 8)=0,0519+0,2770+0,6648;\ P(X\geq 8)=0,9937.$

3) Para casal com três filhos construa a função de probabilidades para o gênero feminino,

X(F)	Nenhum	Um	Dois	Três
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

onde X representa o número de filhos do gênero feminino.

4.3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

São variáveis cujos possíveis valores ocorrem aleatoriamente e pertencem a um intervalo dos números reais (a resposta observada está associada a um procedimento de mensuração).

Exemplos:

- Nível de colesterol total (mg/dL) ➔ método química seca.
- Peso (kg) ➔ método balança.
- Existência de um grande lençol de água no subsolo de uma região cuja profundidade não foi determinada; porém, sabe-se que está situada entre

25 a 160 metros. Dispõe-se de uma sonda que, ao fazer a perfuração, detecta com precisão a profundidade do reservatório de água (X: profundidade; $25 \leq x \leq 160$) ➔ método perfuração.

4.4. FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

A função $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade (FDP) ou uma função contínua de probabilidade para uma variável aleatória contínua X (VAC), se satisfaz as condições:

I. $f(x) \geq 0$ para todo x $\in \Re$.

II. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Observação:

Para calcular as probabilidades utiliza-se a área sob a curva, ou seja, se $a \leq b$ então $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$. Lembrar que sendo a área no ponto igual a zero, tem-se $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$.

Exemplo: Arqueólogos estudaram uma certa região e estabeleceram um modelo teórico para o comprimento (C) de fósseis da região (cm). Sendo C uma VAC com a seguinte FDP:

$$f(c) = \left\{ \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10} + 1\right) \right\}, \text{ se } 0 \leq c \leq 20 \text{ e } 0, \text{ caso contrário.}$$

Determinar:

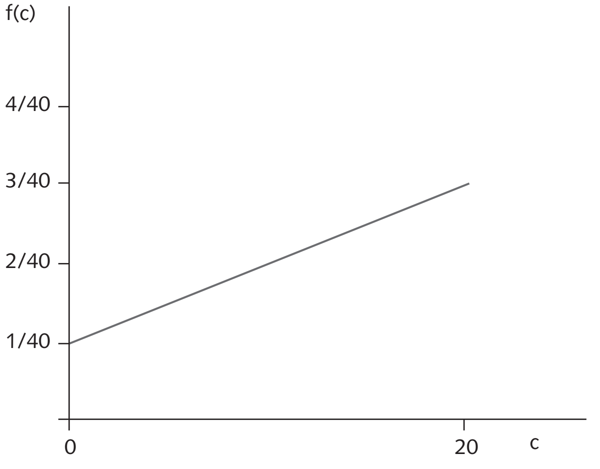
I. O gráfico de $f(c)$.

II. $P(C < 8)$.

III. $\mu = E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f(c)dc.$

IV. $\sigma^2 = \mathrm{Vac}(C) = \int_{-\infty}^{\infty} (c - \mu)^2 f(c)dc.$

I.



II. $P(C<8)=\int_0^8 f(c)dc=7/25.$

III. $\mu=35/3\ cm.$

IV. $\sigma^2=275/9\,cm^2.$

4.5. MODELO GAUSSIANO OU MODELO NORMAL

A variável X tem distribuição normal ou gaussiana com parâmetros μ e σ^2, se sua FDP é dada por $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2(\frac{x-u}{\sigma})^2}, -\infty<x<\infty; -\infty<u<\infty$ e $\sigma>0.$

Características da distribuição normal:

I. $f(x)$ é simétrica em relação à média.

II. $f(x)\rightarrow 0$ quando $x\rightarrow\pm\infty$.

III. O valor máximo de $f(x)$ se dá para $x=\mu$.

IV. $\mu=E(X)$: média de X.
$\sigma^2=Var(X)$: variância de X.

V. Média = Moda = Mediana.

VI. O coeficiente de assimetria varia de -2 a +2.

VII. O coeficiente de curtose varia de 1 a 5 (mede a relação entre altura e a largura da curva).

Observações interessantes:

1) Por convenção, na prática laboratorial, costuma-se considerar que os indivíduos que representam os 5% extremos de uma distribuição (2,5% para cada extremidade) podem ser espúrios. Lembre-se que esta afirmação (2,5% nas extremidades) só pode ser assegurada quando a distribuição de uma variável numérica é normal.
2) Este intervalo que inclui 95% das observações não deve ser confundido com o intervalo de confiança 95% para a média, que representa a margem de erro para a média calculada (precisão da média).
3) Outro ponto fundamental da distribuição normal é decidir que tipo de teste estatístico pode ser aplicado, embora este problema possa ser contornado utilizando-se amostras de tamanho adequado, quando se torna possível aplicar o teorema do limite central.

4.5.1. Distribuição Normal Padrão (Z)

É uma distribuição normal com média nula ($\mu_z = 0$) e variância unitária ($\sigma_z^2 = 1$). A distribuição normal padrão Z, pode ser referida como distribuição normal reduzida ou distribuição normal *standard*.

Observação Importante:

É sempre possível transformar uma variável $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em uma variável normal reduzida $Z \sim N(0,1)$. Para isso, deve-se usar a transformação $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ (simplesmente uma mudança escalar). Os resultados das probabilidades para a variável Z encontram-se tabelados.

4.6. LEMA DE GLIVENKO-CANTELLI (JOSEPH GLIVENKO & FRANCESCO PAOLO CANTELLI)

O lema é um desses resultados que parecem ser intuitivamente óbvios, mas só depois de terem sido descobertos. "Se não se conhece nada sobre a distribuição de probabilidade subjacente (que faz por baixo) que gerou um conjunto de dados, os próprios dados podem ser usados para construir uma distribuição não-paramétrica". Essa é uma função matemática feia, cheia de descontinuidades e sem nenhum tipo de elegância. Mas, apesar de sua estrutura desajeitada, Cantelli foi capaz de mostrar que essa feia função de distribuição empírica fica cada vez mais próxima da função de distribuição verdadeira à medida que o número de observações aumenta.

4.7. EXEMPLOS

1) Considere o peso X, em gramas, de cobaias com distribuição N (200 g; 144g^2). Calcule as probabilidades de cobaias com peso:

   a) maior que 232g;

   b) menor que 218g;

   c) entre 185 e 216g;

   d) maior que 192g.

$$X \sim N(200;144) \Rightarrow Z = \frac{X-200}{12} \sim N(0;1)$$

a) $P(X>232) = P\left(Z > \frac{232-200}{12}\right) = P(Z > 2{,}67) = 0{,}0038;$

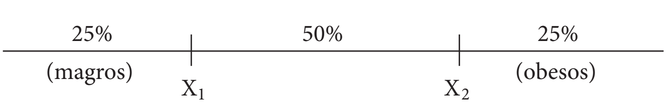
b) $P(X<218) = P\left(Z < \frac{218-200}{12}\right) = P(Z < 1{,}50) = 0{,}9332;$

c) $P(185 < X < 216) = P(-1{,}25 < Z < 1{,}33) = 0{,}9082 - 0{,}1056 = 0{,}8026;$

d) $P(X>192) = P(Z > -0{,}67) = 0{,}7486.$

2) Uma clínica de emagrecimento recebe pacientes adultos com peso N (130 kg; 400kg^2). Para efeito de determinar o tratamento mais adequado, os 25% pacientes de menor peso são classificados de "magros", enquanto os 25% de maior peso de "obesos". Determinar os pesos que delimitam cada classe.

$$X \sim N(130;400) \Rightarrow Z = \frac{X-130}{20} \sim N(0;1).$$



$$P(X \leq x_1) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x_1 - 130}{20}\right) = 0,25 \Rightarrow \frac{x_1 - 130}{12} = -0,68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 121,84kg.$$

$$P(X \geq x_2) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{x_2 - 130}{20}\right) = 0,75 \Rightarrow \frac{x_2 - 130}{20} = 0,67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 143,40kg.$$

Magros: Peso $\leq 121,84kg$.

Obesos: Peso $\geq 143,40kg$.

3) A classificação do indivíduo quanto ao valor de referência do LDL – Colesterol é a seguinte:

   Ótimo < 100 mg/dL;

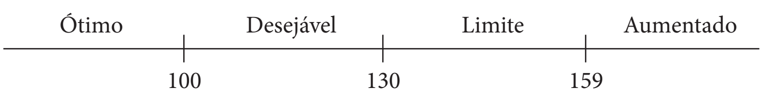
   Desejável 100 mg/dL a < 130 mg/dL;

   Limite 130 mg/dL a 159 mg/dL;

   Aumentado > 159 mg/dL.

   Sabendo-se que em determinado grupo o $LDL \sim N(115;484)$, qual a porcentagem de indivíduos em cada categoria de referência?

$$LDL \sim N(115;484) \Rightarrow Z = \frac{LDL - 115}{22} \sim N(0;1).$$



$$P(LDL < 100) = P(Z < -0,68) = 0,2483.$$

$$P(100 \leq LDL < 130) = P(-0,68 < Z < 0,68) = 0,7517 - 0,2483 = 0,5034.$$

$$P(130 \leq LDL \leq 159) = P(0,68 < Z \leq 2,00) = 0,9772 - 0,7517 = 0,2255.$$

$$P(LDL > 159) = P(Z > 2,00) = 0,0228.$$

4.8. TEOREMA LIMITE CENTRAL

Quando são retiradas amostras aleatórias de uma população com distribuição normal, a distribuição das médias amostrais também será normal (distribuição exata).

O mais importante consiste no fato que se o tamanho da amostra for suficientemente grande ($n \geq 30$), as médias amostrais terão distribuição normal independentemente da distribuição original da variável (em resumo; para amostras de tamanho maior que 30, podem ser utilizados testes paramétricos para a comparação de médias amostrais, mesmo que não se conheça a distribuição da variável em estudo).

Observação Interessante:

O teorema do limite central não garante que a distribuição da variável na população seja normal. Apenas garante a normalidade assintótica para os testes paramétricos.

4.9. TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS

Vários procedimentos estatísticos baseiam-se na suposição de normalidade dos dados ou pelo menos na simetria deles. Porém, nem sempre estas situações estão configuradas nas variáveis numéricas pesquisadas. Uma alternativa consiste em efetuar uma transformação das observações de modo a se obter uma distribuição mais simétrica e próxima da normal.

Essa transformação pode se dar elevando os valores a uma potência (positiva ou negativa) ou calculando o logaritmo natural dos valores. O auxílio de gráficos (histogramas, dispersão, desenhos esquemáticos,...) torna-se muito útil para indicar a transformação mais apropriada aos dados. Porém, deve-se tornar muito cuidado nas conclusões face a transformação realizada e atentar à complexidade de interpretação, em alguns casos.

4.10. EXERCÍCIOS: DISTRIBUIÇÃO NORMAL E DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

1) Uma clínica de emagrecimento recebe pacientes adultos com peso distribuído como normal com média 150 kg e desvio padrão 20 kg. Para efeito de determinar o tratamento mais adequado, os 33% pacientes de menor peso são classificados de “magros”, enquanto os 33% de maior peso de “obesos”. Determine os valores que delimitam a classificação dos pacientes.

2) Em população indígena do Xingu, 28,10% dos homens adultos têm comprimento do fêmur superior a 34 cm e 12,10% inferior a 19 cm. Supondo o

comprimento do fêmur com distribuição normal estabeleça os limites que incluem, simetricamente, 81,8% dos comprimentos ao redor da média.

3) Uma vacina contra a gripe é eficiente em 85% dos casos. Sorteia-se, ao acaso, 10 dos pacientes vacinados e pergunta-se a probabilidade de obter:
   a) Todos imunizados.
   b) Pelo menos 8 imunizados.
   c) No máximo 8 imunizados.

4) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos utilizados pelo laboratório de Bioquímica, tenham distribuições N(42;36) e N(45;9), respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

5) Um laboratório farmacêutico produz seringas, das quais 0,5% são defeituosas. As seringas são vendidas em caixas com 20 unidades. Se a caixa tiver duas ou mais defeituosas o preço de venda é R$ 1,00; tendo uma, o preço é R$ 2,50 e não tendo defeituosa, o preço é R$ 6,00. Qual o preço médio de uma caixa?

6) Um teste de aptidão feito por técnicos de laboratórios experimentais e clínicos em treinamento inicial requer que, uma série de operações seja realizada em uma rápida sucessão. Admita que o tempo necessário para completar o teste seja distribuído de acordo com uma normal de média 60 minutos e desvio padrão 15 minutos.
   a) Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em menos de 50 minutos. Se 80 candidatos submetem-se ao teste, quantos são esperados passar?
   b) Se os 5% melhores candidatos serão contratados com salário diferenciado, quão rápido deve ser o candidato para que obtenha essa posição?

7) Um novo remédio tem efeito colateral indesejável em 5% das pessoas que o tomam. Se 16 pacientes tomam o remédio qual a probabilidade de:
   a) Nenhuma reação negativa?
   b) Uma reação negativa?
   c) No máximo uma reação negativa?
   d) No mínimo uma reação negativa?

8) As alturas de 1200 estudantes das áreas de Ciências Biológicas e da Saúde de uma Universidade têm distribuição N(1,70m; 0,0625 m^2).
   a) Quantos têm altura inferior a 1,80m?
   b) Entre 1,60 e 1,85m?
   c) Menor que 1,55m?

9) Uma indústria farmacêutica sabe que, em média, 1% dos comprimidos por ela produzidos contém um componente da composição abaixo do padrão especificado, sendo por isso, inaceitáveis (descartados). Em uma amostra de 500 comprimidos, qual a probabilidade de haver menos de três inaceitáveis?

10) A duração da gravidez humana, da concepção ao parto, varia segundo uma distribuição aproximadamente normal com média 266 dias e desvio padrão de 16 dias.
    a) Qual a porcentagem dos casos de gravidez com menos de 240 dias?
    b) Qual a porcentagem dos casos de gravidez que duram entre 240 e 270 dias?

11) Em indivíduos sadios, o consumo geral de oxigênio tem distribuição normal com média 12cm^3/min e desvio padrão 2cm^3/min. Determine a proporção de indivíduos sadios com consumo:
    a) Inferior a 10cm^3/min.
    b) Superior a 15cm^3/min.
    c) Entre 8cm^3/min e 15cm^3/min.
    d) Determinar o consumo geral que é superado por 92,51% dos indivíduos sadios.

12) Qual o número mínimo de filhos que um casal deve ter para que se tenha ao menos 0,95 de probabilidade que se terá ao menos uma menina?

13) Dez pares de coelhos são submetidos a duas dietas. A alocação das dietas a cada par é feito por processo randômico. Após o experimento avalia-se os ganhos de peso dos animais. No par onde o ganho de peso da dieta A for superior ao da B, será dito como sucesso, caso contrário fracasso. Qual a probabilidade de que pelo menos 8 sucessos ocorram se as dietas não possuem diferenças reais no que diz respeito as propriedades de ganho de peso?

14) O peso vivo de coelhos tem distribuição normal com média 3,4kg e desvio padrão 0,2kg. Se o peso de um animal for inferior a 3,3 kg ele é vendido a R$ 3,20, caso contrário, a R$ 4,30. Qual o preço médio de venda de cada animal?

15) A quantidade de um anestésico necessária para um procedimento cirúrgico comporta-se como N(50mg; 100mg^2). A dose letal também se admite ser N(110mg; 400mg^2). Que porcentagem dos animais submetidos a essa cirurgia morreria se fosse usada a dose que anestesia 95% dos animais?

16) Considere que 40% dos ratos de um biotério são fêmeas. Num lote de 10 animais, qual a probabilidade de encontrar:
   a) no máximo 3 fêmeas?
   b) pelo menos 4 fêmeas?
   c) exatamente 6 fêmeas?

17) Sabe-se que 8% das vacinas estocadas numa central de atendimento têm validade vencida. Retirando-se, casualmente, 10 vacinas de uma entrega, qual a probabilidade de:
   a) uma vacina com validade vencida?
   b) existir vacina com validade vencida?

18) Se o peso bruto de suínos é normalmente distribuído, qual a probabilidade de um peso deferir da média por:
   a) mais da metade do desvio padrão?
   b) menos de 5/8 do desvio padrão?

19) O peso de coelhos de uma granja tem distribuição N(3kg;0,25kg^2). Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: os 20% mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios e os 30% restantes (mais pesados) como grandes. Quais são os limites de peso para cada classificação?

20) Sabendo-se que o peso de ratos distribui-se normalmente e que 88,10% dos pesos estão abaixo de 280g e 45,62% acima de 200g, qual a porcentagem de animais com peso acima de 220g?

4.11. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) Magro < 141,2kg e Obeso > 158,8kg.

2) LI=17,54cm e LS=40,51cm.

3) a) $P(X=10)=0{,}1969.$

b) $P(X \geq 8)=0{,}2579+0{,}3474+0{,}1969=0{,}8022.$

c) $P(X \leq 8)=1-0{,}3474-0{,}1969=0{,}4557.$

4) $P(A>45)=0{,}3085$ e $P(B>45)=0{,}5000$. O aparelho B é o preferido.

$P(A>49)=0{,}1210$ e $P(B>49)=0{,}0918$. O aparelho A é o preferido.

5) Preço médio $=0{,}9046 \times R\$6{,}00+0{,}0909 \times R\$2{,}50+0{,}0045 \times R\$1{,}00=R\$5{,}67.$

6) a) Número esperado = 20,11≈21 candidatos.

b) t=35,25 minutos.

7) a) $P(X=0)=0{,}4401.$ b) $P(X=1)=0{,}3706.$

c) $P(X \leq 1)=0{,}8107.$ d) $P(X \geq 1)=0{,}5599.$

8) a) Número esperado = 786,48≈787 estudantes.

b) Número esperado = 457,32≈458 estudantes.

c) Número esperado = 329,16≈330 estudantes.

9) $P(X<3)=0{,}0066+0{,}0332+0{,}0836=0{,}1234.$

10) a) 0,0516. b) 0,5471 (54,71%).

11) a) 0,1587. b) 0,0668.

c) 0,9104. d) 9,12 cm^3/min.

12) $n>4{,}3219$, ou seja, no mínimo 5 filhos.

13) $P(X \geq 8)=0{,}04395+0{,}00977+0{,}00098=0{,}05470.$

14) Preço médio $=0{,}3085 \times R\$3{,}20+0{,}6915 \times R\$4{,}30=R\$3{,}96.$

15) 1,46% dos animais.

16) a) $P(X \leq 3)=0{,}00605+0{,}04031+0{,}12093+0{,}21499=0{,}38228.$

b) $P(X \geq 4)=1-0{,}38228=0{,}61772.$

c) $P(X=6)=0{,}11148.$

17) a) $P(X=1)=0,3777$.

b) $P(X \geq 1)=1-0,4344=0,5656$.

18) a) 0,6170. b) 0,4714.

19) Pequenos $< 2,58kg$.

$2,58kg \leq$ Médios $\leq 3,26kg$.

Grandes $> 3,26kg$.

20) 35,20%.

5

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

5.1. INTRODUÇÃO

Descartes (René Descartes, 1596-1650, foi filósofo, físico e matemático. Notabilizou-se, sobretudo por seu trabalho revolucionário na filosofia e na ciência, mas também obteve reconhecimento matemático por sugerir a fusão da álgebra com a geometria, fato que gerou a geometria analítica e o sistema de coordenadas que leva seu nome) aponta que o bom senso é o atributo melhor distribuído no mundo. Cada indivíduo pensa estar tão bem provido dele, que mesmo aqueles mais difíceis de se satisfazerem com qualquer outra coisa não costumam desejar melhor senso do que têm. Assim, não é verossímil que todos se enganem; mas, pelo contrário, isso demonstra que o poder de bem julgar e de distinguir o verdadeiro do falso, que é propriamente o que se denomina bom senso ou razão, é por natureza igual em todos os homens e, portanto, a diversidade de opiniões não decorre de uns serem mais ou menos razoáveis que outros, mas sim pelo fato de conduzir os pensamentos por diversas vias e não se considerar as mesmas coisas.

A tomada de decisões sobre a população, com base em estudos feitos sobre os dados da amostra, constitui o problema central (núcleo) da Inferência Estatística. A tais decisões estão sempre associados um grau de incerteza e, consequentemente, uma probabilidade de erro (risco de decisão). A generalização da amostra para a população deve ser feita dentro de um modelo estatístico adequado para a situação em estudo. Os dois tópicos básicos abordados pela Inferência Estatística são:

a) estimação de parâmetros; e
b) teste de hipóteses sobre parâmetros.

Resumidamente, a Inferência Estatística objetiva estudar a população por meio de evidências fornecidas pela amostra. É a amostra que contém os elementos que podem ser observados e é onde as quantidades de interesse podem ser medidas. No contexto teórico os parâmetros são funções de valores populacionais, quanto estatísticas são funções de valores amostrais.

Observações:

I. Evidência trata-se da qualidade do objetivo (é a plena certeza com que a verdade nos aparece e determina a adesão do espírito).
II. Certeza trata-se do estado sujeito (é o estado de espírito que afirma sem o temor de enganar-se).
III. Todo resultado científico (experimental) inclui margens de erro que representam a precisão do procedimento. Nenhuma medida é exata.
IV. Na prática, nenhum experimento pode ser exatamente duplicado. Tem-se que contentar com o melhor possível (Segundo Heráclito, filósofo grego: não se pode entrar no mesmo rio duas vezes).

5.2. PARÂMETROS, ESTIMADORES E ESTIMATIVAS

As quantidades da população em geral desconhecidas e sobre as quais se tem interesse, são denominadas parâmetros (representações: $\theta, \mu, \sigma, ...$).

À combinação dos elementos da amostra, construída com a finalidade de representar, ou estimar, um parâmetro de interesse na população, denomina-se estimador (representações: $\hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, ...$).

Aos valores numéricos assumidos pelos estimadores denominamos estimativas pontuais ou, simplesmente, estimativas.

Fisher (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890-1962) estabeleceu alguns critérios para uma "boa" estatística:

I. Consistência – quanto mais dados houver, maior a probabilidade de que a estatística calculada esteja perto do valor real do parâmetro.
II. Ausência de Viés – se usar uma estatística particular muitas vezes sobre diferentes conjuntos de dados, a média desses valores da estatística deverá chegar perto do verdadeiro valor do parâmetro.
III. Eficiência – os valores da estatística não serão exatamente iguais ao verdadeiro valor do parâmetro, mas a maioria de um grande número de estatísticas que estimem um parâmetro não deve estar longe do valor verdadeiro.

Tabela 5.1 Principais estimadores pontuais

Parâmetro	Estimador	Propriedades
μ (média populacional)	$\overline{X}$	Não viciado e consistente
π (proporção pop.)	$\hat{p}$ = freq. relativa	Não viciado e consistente
σ^2 (variância pop.)	S^2	Não viciado e consistente

Observações:

I. Um estimador $\hat{\theta}$ é não viciado (imparcial ou não viesado) para um parâmetro θ se $E(\hat{\theta}) = \theta$ (seu valor esperado coincide com o parâmetro de interesse).

II. Um estimador $\hat{\theta}$ é consistente se à medida que o tamanho da amostra aumenta seu valor converge para o parâmetro de interesse e sua variância converge para o zero. Ou seja:

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}) = \theta \text{ e } \lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}(\hat{\theta}) = 0.$$

5.3. DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS

Os estimadores são funções de variáveis aleatórias e, portanto, são variáveis aleatórias. Neste sentido, torna-se muito interessante obter a distribuição probabilística dos estimadores.

5.3.1. Média Amostral ($\overline{X}$)

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, então, mostra-se que:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \overline{X} \sim Normal \\ \text{II.} & \mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \mu \\ \text{III.} & \sigma^2_{\overline{X}} = Var\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{array}\right\} \overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n}).$$

Observação Importante:

À medida que o tamanho amostral cresce a probabilidade de a média amostral estar na proximidade da média populacional é maior.

Exemplo: O Biotério possui uma máquina para encher pacotes de ração com peso que se comporta como uma variável aleatória. normal com média 200g e desvio padrão 10g. Uma amostra aleatória de 25 pacotes é sorteada e pergunta-se:

a) Qual o número esperado de pacotes da amostra com peso inferior a 205g?
$P(X < 205) = P(Z < 0{,}50) = 0{,}69146 \Rightarrow N^{o}\, ESP. = 17{,}29$ pacotes.

b) Qual a probabilidade de que o peso médio dos pacotes da amostra não exceder 205g?
$P(\overline{X} < 205) = P(Z < 2{,}50) = 0{,}99379.$

5.3.2. Proporção Amostral ($\hat{p}$)

Para uma amostra de tamanho n retirada de uma população qualquer com média μ e variância σ^2, a distribuição de $\overline{X}$, pelo teorema TLC, para n tendendo a infinito é normal padrão, ou seja,

$$\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \longrightarrow Z \sim N(0;1).$$

Considerando:

$$\hat{p} = \frac{N^{o}\ de\ indivíduos\ na\ amostra\ dada\ com\ a\ característica\ Y}{Tamanho\ da\ amostra\ (n)}$$

e para o i-ésimo indivíduo $Y_i = \begin{cases} 0, \text{ caso contrário} \\ 1, \text{ se o indivíduo apresentar a característica (sucesso)} \end{cases}$

então $\hat{p} = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} = \overline{Y}.$

Cada Y_i é um ensaio de Bernoulli, ou seja, $E(Y_i) = p$ e $Var(Y_i) = p(1-p)$, para $i = 1,\ldots n$. Logo, para $Y_1,...,Y_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes de Bernoulli, tem-se:

$$E(\hat{p}) = E(\overline{Y}) = p;$$

$$Var(\hat{p}) = Var(\overline{Y}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Para n suficientemente grande, pelo TLC:

$$\frac{\overline{Y} - \mu_{\overline{y}}}{\sigma_{\overline{y}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow Z \sim N(0,1).$$

Exemplo: Um laboratório farmacêutico afirma que sua vacina contra gripe imuniza em 80% dos casos. Uma amostra de 25 indivíduos que tomaram a vacina foi sorteada e testes foram feitos para verificar a imunização ou não desses indivíduos. Se o fabricante estiver correto, qual é a probabilidade da proporção de imunizados na amostra ser inferior a 0,76? E superior a 0,88?

$p = 0,80$ ➔ $1 - p = 0,20$; $E(\hat{p}) = E(\overline{Y}) = 0,80;$

$Var(\hat{p}) = Var(\overline{Y}) = 0,0064)$. Logo $Z = \dfrac{\hat{p} - 0,80}{\sqrt{\dfrac{0,80(1-0,80)}{25}}} = \dfrac{\hat{p} - 0,80}{\sqrt{0,0064}} \sim N(0,1);$

$$P(\hat{p} < 0,76) = P(Z < -0,50) = 0,3085;$$

$$P(\hat{p} > 0,88) = P(Z > 1,00) = 0,1587.$$

5.4. ESTIMAÇÃO POR INTERVALO

Se não há como dizer que uma estimativa é exatamente correta, existe algum modo de dizer quão próximo ela está do valor verdadeiro do parâmetro? Sim, pelo uso da estimativa por intervalo. Uma estimativa pontual é dada por um único número. Algumas vezes, a estimativa por intervalo é muito ampla (amplitude intervalar grande), fato também que deve ser melhorado. A conclusão que se pode tirar de um intervalo demasiado grande é que a informação disponível não é adequada para que seja tomada uma decisão, e que outras informações devem ser procuradas para melhorar a qualidade da informação. Como conduta prática, talvez ampliando o alvo da investigação ou empenhando-se em outra série de experimentos.

Como calcular uma estimativa por intervalo? Como interpretar uma estimativa por intervalo? Pode-se fazer uma afirmação de probabilidade a seu respeito? Quão certo está em dizer que o verdadeiro valor do parâmetro está dentro do intervalo?

Em 1934, Neyman apresentou uma palestra sobre a análise de pesquisas por amostragem cujo material apresentado tem no seu apêndice o caminho direto para criar uma estimativa por intervalo e determinar seu nível de observância rigorosa. Caracteriza-se esse procedimento como "intervalos de confiança", e as extremidades dos intervalos de confiança, de "limites de confiança".

Como entender a conceituação de probabilidade "versus" o grau de confiança? O procedimento descrito por Neyman resiste, não importa quão complicado seja o problema, e essa é a principal razão pela qual ele é tão amplamente utilizado nas análises estatísticas. O que significa probabilidade nesse contexto?

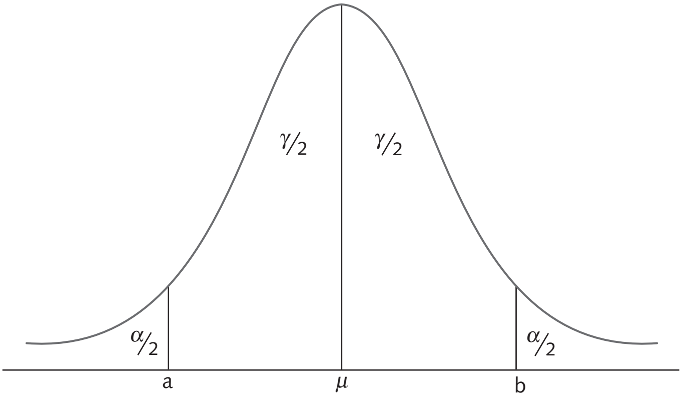
Em sua resposta, Neyman caiu na definição frequentista de probabilidade na vida real. Ou seja, o intervalo de confiança deve ser visto não em termos de cada conclusão, mas como um processo. Com o decorrer do tempo, um estatístico que sempre calcula intervalos de 95% de confiança descobrirá que o valor verdadeiro do parâmetro está dentro do intervalo construído 95% das vezes. A probabilidade associada ao intervalo de confiança não era a probabilidade de acerto, mas a frequência de declarações corretas que um estatístico que utiliza o método de Neyman fará no decorrer do tempo. Nada afirma a respeito de quão "precisa" é a estimativa corrente.

Mesmo com o cuidado que Neyman tomou ao definir o conceito, e com os cuidados que outros estatísticos tomaram para manter o conceito de probabilidade claro e não contaminado, o uso geral dos intervalos de confiança nas ciências, em particular nas áreas biológicas e da saúde, produziu muitos raciocínios descuidados. Fato comum, por exemplo, acontece quando alguém que esteja usando um intervalo de confiança de 95% afirma que está "95% seguro" de que o parâmetro esteja dentro desse intervalo.

Portanto, o cálculo do grau em que uma pessoa pode estar segura de alguma coisa é muito diferente do cálculo de um intervalo de confiança.

Os estimadores pontuais fornecem como estimativa um único valor numérico para o parâmetro de interesse (aspecto não muito interessante do ponto de vista biológico). Por serem variáveis aleatórias, os estimadores possuem uma distribuição de probabilidades e, levando este fato em consideração, pode-se apresentar uma estimativa mais informativa para o parâmetro de interesse que inclua uma medida de precisão do valor obtido. Esse método de estimação, denominado intervalo de confiança, incorpora, à estimativa pontual do parâmetro, informações a respeito de sua variabilidade.

5.4.1. IC Média Populacional (σ^2 conhecido)



Objetiva-se construir um intervalo simétrico ao redor de μ que contenha a "massa" ou "área" $\gamma = 1 - \alpha$.

Isto é, $P(a < \overline{X} < b) = 1 - \alpha = \gamma \Rightarrow P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = \gamma$.

Nestas condições, o intervalo de confiança para μ ($IC(\mu;\gamma)$), com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$, é dado pelos limites: $LI = \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}$ e $LS = \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}$.

A interpretação de IC ($\mu;\gamma$) deve ser emitida como: quando se considera várias amostras de mesmo tamanho e para cada amostra calcular os respectivos limites de confiança, com coeficiente de confiança γ, espera-se que a proporção de intervalos que contenha o valor de μ seja igual a γ.

Observação:

Para o nível de 95% de confiança tem-se para os tamanhos amostrais 10, 100 e 1000 os seguintes limites de confiança com os respectivos comprimentos do intervalo (amplitude/intervalo):

n	Limites de 95% confiança	Amplitude
10	$\bar{x} \pm 0{,}620\,\sigma$	$1{,}240\,\sigma$
100	$\bar{x} \pm 0{,}196\,\sigma$	$0{,}392\,\sigma$
1000	$\bar{x} \pm 0{,}062\,\sigma$	$0{,}124\,\sigma$

Exemplo:

Os comprimentos de jacarés adultos de uma certa raça têm distribuição normal com média μ desconhecida e variância igual a $0{,}01\text{m}^2$. Uma amostra de 10 animais foi coletada e forneceu média 1,69m. Estabeleça os limites de confiança 95% para o comprimento dos jacarés.

$\gamma = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow \mathrm{IC}(\mu)$: 1,69 ± 0,06.

$1{,}63m \le \mu \le 1{,}75m.$

Amplitude do intervalo $= 2z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}12m.$

Semi-amplitude = 0,06m = Erro envolvido na estimação.

5.4.2. IC Proporção de Sucessos (Aproximação-TLC)

Considerando a aproximação para n grande $\hat{p} \sim N(p, \dfrac{p(1-p)}{n})$; têm-se os seguintes limites de confiança (γ) para a proporção de sucessos:

Otimista

$$IC(p;\gamma): \hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \longrightarrow \hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Conservativo

$$\longrightarrow \hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{4n}}.$$

O processo conservativo fornece amplitude intervalar maior que o processo otimista, salvo quando $\hat{p}=0,5$, que os valores são iguais.

Exemplo:

Estimar a proporção de cura de certo medicamento em doentes contaminados com cercária (uma das formas do verme da esquistossomose) administrado, ao acaso, em 200 pacientes. Considere para a estimação o nível de confiança 95% e que foi verificada a cura em 160 pacientes.

$\gamma=0,95 \rightarrow \hat{p}=0,80$ e $z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96.$

Solução Otimista

$IC(p;0,95):0,80\pm 0,055 \Rightarrow 0,745\leq p\leq 0,855.$

Solução Conservadora

$IC(p;0,95):0,80\pm 0,069 \Rightarrow 0,731\leq p\leq 0,869.$

5.4.3. IC para Média Populacional (σ^2 desconhecido)

A construção do intervalo de confiança para a média populacional com variância desconhecida acontece à semelhança da variância conhecida com a substituição da distribuição normal pela t de Student e utilização do desvio padrão amostral.

Os limites são dados por:

$IC(\mu;\gamma)$: $\bar{x}\pm t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}$; onde $t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$ corresponde ao quantil de ordem $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\%$ da distribuição t de Student (William Sealy Gosset) com $(n-1)$ graus de liberdade.

Exemplos:

1) Para a população de bebês submetidos a cirurgia fetal para anomalias congênitas, a distribuição das idades gestacionais ao nascer é aproximadamente normal. Uma amostra aleatória de 16 desses bebês tem uma idade gestacional média de 29,6 semanas e desvio padrão de 3,6 semanas. Construa um intervalo de confiança 95% para a idade gestacional média populacional.

$n = 16$ e $\gamma = 0{,}95$ ➔ $t_{(0{,}025;15)} = 2{,}131.$

$IC(\mu; 0{,}95): 29{,}6 \pm 1{,}9$ ➔ $27{,}7sem \leq \mu \leq 31{,}5sem.$

2) Doze ratos foram alimentados com uma dieta experimental desde seu nascimento até a idade de três meses. Os aumentos de pesos(g) foram os seguintes: 77; 68; 66; 75; 74; 70; 68; 71; 72; 69; 73; 75. Determine um intervalo de confiança 95% para a média dos aumentos de peso.

$n = 12$ e $\gamma = 0{,}95$ ➔ $t_{(0{,}025;11)} = 2{,}201.$

$\bar{x} = 71{,}5; s^2 = 11{,}56$ e $s = 3{,}40.$ $IC(\mu, \sigma): 71{,}5 \pm 2{,}2$, ou seja, $69{,}3g \leq \mu \leq 73{,}7g.$

5.5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

I. Os estimadores pontuais especificam um único valor para o estimador, impossibilitando julgar qual o erro que se comete no processo de estimação.

II. Com os intervalos de confiança a magnitude do erro pode ser mensurada (probabilidade de cometer erros de determinadas magnitudes).

III. O intervalo pode ou não conter o parâmetro, mas sua construção assegura um grau 100 γ %=100(1- α)% de confiança que contenha.

IV. Se T for um estimador do parâmetro θ, chama-se erro padrão de T a quantidade $EP(T) = \sqrt{Var(T)}$.

Exemplos: $T = \overline{X}$ ➔ $EP(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ erro padrão de $\overline{X}$.

$T = \hat{p}$ ➔ $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ erro padrão de p.

$T = MED$ ➔ $EP(MED) \approx \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ erro padrão de MED(mediana).

V. Desigualdade de Chebyshev

Se $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$ finita, então, para todo $\Re > 0$, $P(|X - \mu| \geq \Re) \leq Var(X) / \Re^2$.

VI. Lei dos Grandes Números (LGN)

Considere n ensaios de Bernoulli com $p = P(\text{sucesso})$, e seja $\Re$ o número de sucessos nas n provas. Para n grande, a proporção de sucessos $\frac{\Re}{n}$ estará próximo de $p = P(\text{sucesso})$. Ou seja, $P(|\frac{\Re}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

VII. Uso da LGN para o cálculo de tamanho amostral.

Qual o valor de n a fim de $\frac{\Re}{n}$ diferir de p menos de ε, com probabilidade maior ou igual a γ?

Ou seja:

$$P(|\frac{\Re}{n} - p| < \varepsilon) \geq \gamma \overset{LGN}{\Leftrightarrow} P(|\frac{\Re}{n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

$$\gamma = 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \Rightarrow n = \frac{p(1-p)}{(1-\gamma)\varepsilon^2} \approx n = \frac{1}{4(1-\gamma)\varepsilon^2}.$$

5.6. EXERCÍCIOS: ESTIMAÇÃO (INTERVALO DE CONFIANÇA)

1) Uma amostra aleatória de 144 alunos de uma universidade revela que 70% deles preferem as provas nos finais de semana, fora do horário regular semanal. Construir um intervalo de 90% de confiança para a proporção de alunos favoráveis à realização das provas nos finais de semana.

2) Entrevistam-se em um município 1200 pessoas adultas a respeito do conhecimento sobre *Diabetes mellitus* e constata-se que 80 têm desconhecimento total da doença. Estabelecer um intervalo de 95% de confiança para a proporção populacional de desconhecimento.

3) Em um estudo de poluição lacustre a concentração de chumbo em 25 amostras de 1000 cm^3 cada, extraídas da camada sedimentária superior do fundo de um lago forneceu média 0,38 e desvio padrão 0,06. Estabeleça um intervalo de 99% de confiança para a concentração média de chumbo por 1000 cm^3 de sedimento do fundo do lago.

4) Uma amostra de 160 voluntários foi utilizada em um experimento para verificar a eficiência de um novo medicamento preventivo da gripe. Embora todos fossem expostos ao vírus, 90 deles não contraíram a doença.

Determine um intervalo de confiança ($\gamma = 0,95$) para a proporção de pessoas que o novo medicamento protege contra a gripe.

5) Obtém-se uma amostra de 25 crânios de homens egípcios que viveram por volta de 1850 AC. Mede-se a largura máxima de cada crânio, encontra-se $\overline{x} = 134,5$mm e $s = 3,5$mm (dados de *Ancient Races of the Thebaid*, por Thomson e Randall – Marciver). Com esses dados amostrais construir um intervalo de 95% de confiança para a média populacional da largura máxima dos crânios.

6) Em uma amostra de 50 ratos que receberam dieta hipercalórica encontrou-se 10 com peso abaixo do padrão esperado. Estimar por intervalo de 95% de confiança a proporção de ratos com peso abaixo do esperado na dieta hipercalórica.

7) Um lote de 18 bovinos forneceu os seguintes pesos (kg): 250, 265, 267, 269, 271, 281, 283, 284, 287, 289, 291, 293, 298, 301, 301, 301, 303, 306. Por meio de construção de intervalo de confiança (0,95), responder se este lote satisfaz a condição de que o peso médio deve ser 293 kg.

8) Pretende-se coletar uma amostra de uma variável aleatória com distribuição normal de média desconhecida e variância 36. Qual deve ser o tamanho da amostra para que, com probabilidade 0,9768, a média amostral não difira da média da população por mais de 2 unidades?

9) De experiências passadas, sabe-se que o desvio padrão da altura de crianças é 5 cm. Que tamanho de ter uma amostra dessa população para que o intervalo $150 \pm 1,225$cm tenha 95% de confiança?

10) Antes de adotar uma técnica laboratorial padrão em que existiam dois procedimentos, A e B, foi feita uma pesquisa de opinião com 250 técnicos especializados escolhidos ao acaso, e verificou-se que 160 deles optaram pela técnica A. Construa um intervalo de 95% de confiança, para a porcentagem de técnicos favoráveis à técnica A.

5.7. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) Otimista: $0,637 \leq p \leq 0,763$.
   Conservativo: $0,632 \leq p \leq 0,768$.

2) Otimista: $0,0526 \leq p \leq 0,0808$.
   Conservativo: $0,0384 \leq p \leq 0,0950$.

3) $0,346 \leq \mu \leq 0,414$.

4) Otimista: $0,4856 \leq p \leq 0,6394$.
   Conservativo: $0,4850 \leq p \leq 0,6400$.

5) $133,0 \leq \mu \leq 136,0$.

6) Otimista: $0,09 \leq p \leq 0,31$.
   Conservativo: $0,06 \leq p \leq 0,34$.

7) $277,71 \leq \mu \leq 293,41$. Como 293 kg está inserido no intervalo, conclui-se que o lote satisfaz a condição.

8) $n = 46,4 \approx 47$ indivíduos.

9) $n = 64$ crianças.

10) Otimista: $0,580\ p \leq 0,700$.
    Conservativo: $0,578\ p \leq 0,702$.

6
TESTES DE HIPÓTESES

6.1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Popper (Sir Karl Popper, 1902-1994, filósofo austríaco naturalizado britânico, considerado por muitos como o filosofo mais influente do século XX a tematizar a ciência) ensina que só é possível aprender com o erro. Para o entendimento da assertiva popperiana, considere uma menina recém-nascida. Ela está programada para esperar coisas do mundo (caso não tivesse algum programa em seu cérebro, seria como um computador sem um sistema operacional – completamente morto). Hipoteticamente, imagine que a criança é programada para acreditar que o mundo é macio. Os pais da criança fazem o possível para que tudo que o toque a menina seja cor-de-rosa e macio em seus primeiros dias de vida e, portanto, ela não tem razões para rejeitar sua preconcepção de que o mundo todo é macio. Porém, deve ser notado que não importa quantos objetos macios ela tenha tocado, isto nunca provará que o mundo é macio. Basta tocar um único objeto rígido, talvez um brinquedo de cor azul, para rejeitar toda sua conjectura sobre o mundo macio. A criança descobre que estava errada e aprende. Ela criará uma nova conjectura, talvez que apenas objetos azuis sejam rígidos, e somente irá adiante quando houver alguma razão para refutar esta nova conjectura. A metodologia Popperiana se baseia nesta linha de raciocínio, ou seja, é mais fácil desaprovar (contradizer) do que provar uma assertiva (muitas vezes denominada prova da contradição).

A tomada de decisão estatística, no campo da Inferência Estatística, em um teste de hipóteses é desenvolvida à semelhança do procedimento de Popper quando se utiliza a abordagem de Neyman e Pearson. Objetiva-se pela abordagem fornecer uma metodologia que permita verificar se os dados amostrais trazem evidências que apoiem ou não uma hipótese estatística formulada. A ideia central desse procedimento consiste em supor verdadeira a hipótese em questão e verificar se a amostra observada é verossímil sob a veracidade da hipótese formulada.

Em continuidade ao método de construção de um teste de hipóteses, será apresentada uma segunda abordagem devido a Fisher. Esta consiste em apresentar a probabilidade significância ou nível descritivo ou ainda "p-value" do teste (valor-p). Os passos das duas abordagens são muito parecidos; porém, a principal diferença consiste em não construir a região crítica do teste no método de Fisher. Isto é, o que se faz é determinar a probabilidade (p) de ocorrer valores da estatística mais extremos do que o observado, sob a hipótese de nulidade (ausência de efeito, ou seja, presença meramente casual) ser verdadeira. Uma forma prática de entender o significado da hipótese nula pode ser vista na seguinte indicação. "Uma hipótese nula é uma assertiva de como o mundo deveria ser, se a afirmação colocada estivesse errada".

O que representa ter um resultado não significativo em um teste de significância? Podemos concluir que a hipótese é verdadeira se há falha em refutá-la?

Fisher considerava que valores de p altos (um fracasso em encontrar significância) indicavam a inadequação dos dados para se chegar a uma decisão. Para Fisher, nunca houve a premissa de que o fracasso em encontrar significância implicasse que a hipótese testada era verdadeira.

Os testes de significância, quando usados com precisão, são capazes de rejeitar ou invalidar hipóteses, quando são contrariados pelos dados; mas nunca são capazes de estabelecê-las certamente como verdadeiras.

Quando da formulação de Neyman-Pearson a grande descoberta foi o de que os testes de significância não faziam sentido a não ser que houvesse pelo menos duas hipóteses possíveis. A probabilidade de detectar aquela hipótese alternativa, se for verdadeira, é o poder do teste. Para distinguir entre a hipótese que está sendo usada para calcular o valor de p de Fisher e a outra possível hipótese ou hipóteses, Neyman-Pearson chamaram a hipótese testada de "hipótese nula" e as outras de "alternativas". Em sua formulação, o valor de p é calculado para testar a hipótese nula, mas o poder do teste se refere a como, esse valor de p se comportará se a alternativa for de fato verdadeira.

Em muitas situações, os testes de hipóteses são usados sobre uma hipótese nula que é um artifício. Por exemplo, quando duas drogas são comparadas, em um ensaio clínico, a hipótese nula, a ser testada, é que elas produzem igual efeito. No entanto, se isso fosse verdade, o estudo nunca teria sido feito.

A hipótese nula de que os dois tratamentos são iguais é um artifício criado para ser derrubado pelos resultados do estudo. Assim, segundo Neyman, o planejamento do estudo deve ser orientado no sentido de maximizar o poder dos dados resultantes para derrubar o artifício e mostrar como as drogas se diferenciam na verdade.

Em 1977, David R. Cox para distinguir entre o uso que Fisher dava aos valores de p e a formulação de Neyman-Pearson, ele chamou o método de Fisher de "teste de significância", e o de Neyman-Pearson de "teste de hipótese". Cox conclui que o cálculo da significância estatística (por meio dos valores p) se tinha transformado em um dos métodos mais amplamente usados na pesquisa cientifica. Os testes de significância e os valores de p são, hoje, constantemente usados em todas as áreas do conhecimento científico.

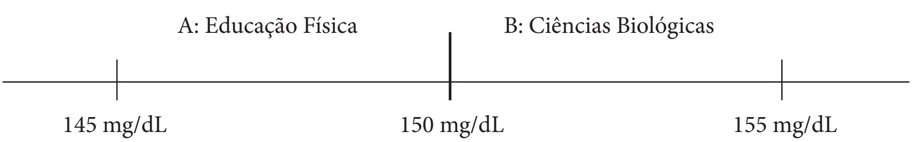
A ideia de teste de uma hipótese será introduzida por meio de um exemplo, partindo de uma situação simples para a tomada de decisão (decisão popular e natural), sendo gradualmente ampliada para atender à situação geral de testes de hipóteses.

Considere que o colesterol total (mg/dL) tenha distribuição normal de probabilidade e ainda:

A: Alunos de Educação Física ~ N(145;144).

B: Alunos de Ciências Biológicas ~ N(155;400).

Um grupo (amostra) de 25 alunos do mesmo curso forneceu uma média de 148 mg/dL para o colesterol total. Qual deve ser o curso de origem dos alunos?



1ª ideia: Decisão Popular e Natural

A regra de decisão popular e natural consiste em:

Se $\overline{x} \leq 150 mg / dL \Leftrightarrow$ Educação Física (A)

Se $\overline{x} > 150 mg / dL \Leftrightarrow$ Ciências Biológicas (B).

Portanto, pelo critério adotado, a amostra de alunos deve ser procedente do curso de Educação Física.

Observação Importante:

Deve ser considerado que é possível encontrar uma amostra de 25 alunos de Ciências Biológicas que apresente média de 148 mg/dL. Assim como, média acima de 150 mg/dL para um grupo de alunos de Educação Física. Neste sentido, a regra de decisão estabelecida fica mais informativa quando são associados os erros que podem ser cometidos.

Ou seja,

Erro tipo I: dizer que os alunos são de Educação Física (A), quando na realidade são de Ciências Biológicas (B).

Erro tipo II: dizer que os alunos são de Ciências Biológicas (B), quando na realidade são de Educação Física (A).

Para estabelecer a magnitude desses erros considere as seguintes hipóteses:

H_0: Os alunos são de Ciências Biológicas (B) $\Leftrightarrow \mu = 155\,mg/dL$ e $\sigma = 20\,mg/dL$.

H_1: Os alunos são de Educação Física (A) $\Leftrightarrow \mu = 145\,mg/dL$ e $\sigma = 12\,mg/dL$.

$$P(\text{Erro tipo I}) = P\left(A/B \text{ é verdade}\right) = P\left(\overline{X} \leq 150/H_0 \text{ verdade}\right)$$
$$= P\left(\overline{X} \leq 150 / \overline{x} \sim N\left(155, \tfrac{400}{25}\right)\right) = P\left(Z \leq -1{,}25\right).$$

Portanto, $\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = 0{,}1056$.

$$P(\text{Erro tipo II}) = P\left(B/A \text{ é verdade}\right) = P\left(\overline{X} > 150/H_1 \text{ é verdade}\right)$$
$$= P\left(\overline{X} > 150 / \overline{x} \sim N\left(145, \tfrac{144}{25}\right)\right) = P\left(Z > 2{,}08\right).$$

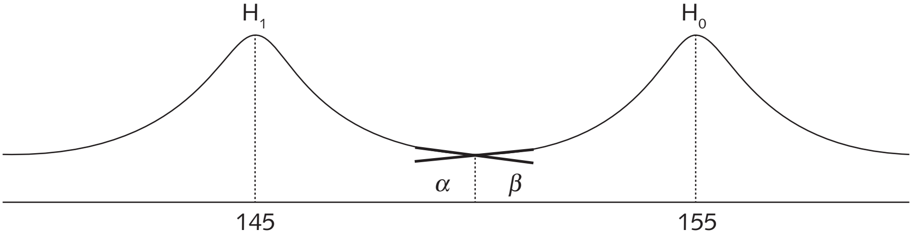
Portanto, β = P(Erro tipo II) = 0,0188.

O seguinte quadro de probabilidades indica os erros e acertos para a decisão tomada, segundo o critério estabelecido pela regra popular.

Curso (Origem do grupo)	**Decisão (H_0 ou H_1)**	
	H_0: Ciências Biológicas	**H_1: Educação Física**
Educação Física (A)	Erro Tipo II (1,88%)	Correta (98,12%)
Ciências Biológicas (B)	Correta (89,44%)	Erro Tipo I (10,56%)

A regra de decisão, de certo modo, privilegia a afirmação de que os alunos são de Educação Física (o erro tipo I apresenta-se com maior probabilidade do que o erro tipo II).

2ª ideia: Estabelecer uma regra de decisão em que a probabilidade de errar contra Ciências Biológicas seja a mesma de errar contra Educação Física ($\alpha = \beta$).



$$\alpha = \text{P(Erro Tipo I)} = \text{P}(\overline{X} \leq \overline{x}_C / \text{H}_0 \text{ verdade}) = P\left(Z \leq \frac{\overline{x}_C - 155}{4}\right)$$

$$\beta = \text{P(Erro Tipo II)} = \text{P}(\overline{X} > \overline{x}_C / \text{H}_1 \text{ verdade}) = P\left(Z > \frac{\overline{x}_C - 145}{2,4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\overline{x}_C - 155}{4} = \frac{\overline{x}_C - 145}{2,4} \Leftrightarrow \overline{x}_C = \frac{952}{6,4} = 148,75 \text{ mg/dL.}$$

Ou seja, se $\overline{x}_C$ = 148,75 mg/dL, tem-se $\alpha = \beta = 5,94\%$.

O quadro de probabilidades para a 2ª ideia fica constituído como:

Curso (Origem do grupo)	Decisão (H_0 ou H_1)	
	H_0: Ciências Biológicas	**H_1: Educação Física**
Educação Física (A)	Erro Tipo II (5,94%)	Correta (94,06%)
Ciências Biológicas (B)	Correta (94,06%)	Erro Tipo I (5,94%)

3ª ideia: Fixar um dos erros e estabelecer a regra de decisão (Opção: fixar erro tipo I).

Seja α = P(Erro Tipo I) = 0,05 ➔ P(Z < -1,645) = 0,05

$$\alpha = P\left(\overline{X} \leq \overline{x}_C / H_0 \text{ verdade}\right) = P\left(Z \leq \frac{\overline{x}_C - 155}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{x}_C - 155}{4} = -1,645 \Rightarrow \overline{x}_C = 148,42 \text{ mg/dL.}$$

Portanto,

$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\overline{X} > 148,42 / H_1 \text{ verdade}) = P(Z > 1,425) = 0,0764.$

Tem-se, o seguinte quadro de probabilidades:

Curso (Origem do grupo)	**Decisão (H_0 ou H_1)**	
	H_0: Ciências Biológicas	**H_1: Educação Física**
Educação Física (A)	Erro Tipo II (7,64%)	Correta (92,36%)
Ciências Biológicas (B)	Correta (95,05% ≈ 95,00%)	Erro Tipo I (4,95% ≈ 5,00%)

Com a regra de decisão:

Se $\overline{x} \leq 148,42 mg / dL \Leftrightarrow$ Educação Física (A);

Se $\overline{x} > 148,42 mg / dL \Leftrightarrow$ Ciências Biológicas (B).

6.2. PROCEDIMENTO GERAL DO TESTE DE HIPÓTESES

H_0: $\theta = \theta_0$ (Hipótese Nula)

(Existe uma variável X associada a dada população e tem-se uma hipótese sobre determinado parâmetro dessa população. A hipótese de H_0 afirma que o verdadeiro valor de θ é θ_0).

H_1: $\theta \neq \theta_0$ (Hipótese alternativa bilateral)

(O valor de θ é diferente de θ_0).

ou $\theta > \theta_0$ (Hipótese alternativa unilateral direita)

(O valor de θ é maior que θ_0).

ou $\theta < \theta_0$ (Hipótese alternativa unilateral esquerda)

(O valor de θ é menor que θ_0).

A decisão pela hipótese alternativa depende do interesse e da informação biológica que a situação oferece.

Erros que são cometidos para qualquer decisão tomada:

Erro Tipo I: Rejeitar H_0 quando esta é verdadeira.

α =P(Erro Tipo I) = P(Rejeitar H_0/H_0 Verdade) = Nível de significância do teste estatístico (valor arbitrário e definido antes da realização do teste).

Erro Tipo II: Não Rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

β = P(Erro Tipo II) = P(Não Rejeitar H_0/H_0 Falsa).

O objetivo do teste estatístico é dizer, usando uma estatística $\hat{\theta}$ (estimador não viesado e consistente de θ, cuja estimativa (o valor) será obtida na amostra fornecida pelo pesquisador), se a hipótese H_0 é ou não aceitável.

A decisão deve ser tomada por meio de critério objetivo, ou seja, estabelecido a partir do risco que se quer cometer. Nesse sentido, estabelece-se a região de rejeição de H_0 (região crítica ou região de rejeição do teste), construída considerando $\alpha = P\left(\hat{\theta} \in RC / H_0 \text{ é verdade}\right)$, com α fixado "a priori". Um fato importante é ressaltar que a região crítica é sempre construída sob a hipótese de H_0 ser verdadeira. O resultado da amostra é tanto mais significante para rejeitar H_0 quanto menor for esse nível α. Ou seja, quanto menor for o α, menor é a probabilidade de se obter uma amostra com estatística ($\hat{\theta}$) pertencente a região crítica, sendo pouco verossímil a obtenção de uma amostra da população para qual H_0 seja verdadeira.

6.3. PRINCIPAIS TESTES DE HIPÓTESES

6.3.1. Teste sobre a Média de uma População com Variância Conhecida

Exemplo: Uma máquina automática para encher pacotes de ração canina segue uma distribuição normal, com média μ e variância igual a $400g^2$. A máquina foi regulada para μ = 1000g. Colhe-se, periodicamente, uma amostra de 25 pacotes para verificar se a máquina está regulada ou não, ou seja, se μ = 1000g ou não. A última amostra colhida apresentou $\bar{x} = 994g$; qual a conclusão no nível de significância 5%?

H_0: $\mu = 1000$ (máquina regulada).

H_1: $\mu \neq 1000$ (máquina desregulada).

Tem-se: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z = \dfrac{\left(\bar{X} - \mu\right)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$.

Sob a veracidade de H_0, a estatística para o teste de hipóteses $\left(H_0 : \mu = \mu_0 ; H_1 : \mu \neq \mu_0\right)$ é dada por: $Z = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu_0\right)}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$, com a regra de decisão habitual (Se $|z| \geq z_{\alpha/2}$, rejeita-se H_0; caso contrário, não há rejeição).

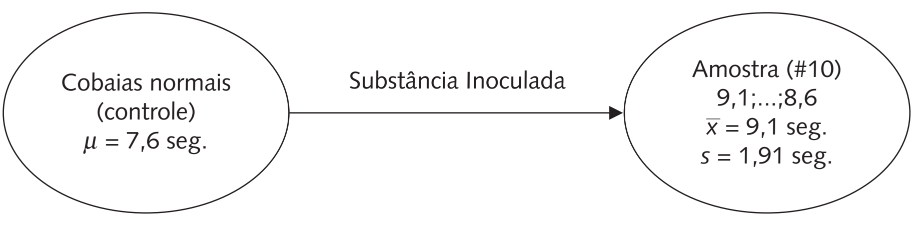
Portanto: $z = \dfrac{(994 - 1000)\sqrt{25}}{20} = -1,50.$

Para $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$, logo $|z| < z_{0,025}$ (não se rejeita H_0).

Ao nível de significância 5%, a produção está sob controle (máquina regulada).

6.3.2. Teste sobre a Média de uma População com Variância Desconhecida

Exemplo 1. Um biólogo deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os tempos obtidos foram: 9,1; 9,3; 7,2; 7,5; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6. Admitindo-se que o tempo de reação segue distribuição normal com média 7,6 segundos, verificar se o tempo médio sofre alteração por influência da substância, no nível de 5% de significância.



O procedimento estatístico para a comparação de uma média populacional a um valor determinado, também é conhecido como teste t de Student para uma amostra (William S. Gosset, 1876-1937). A origem do teste t deve-se a busca da melhor variedade de cevada para a produção de cerveja.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \begin{cases} \mu \neq \mu_0 & \text{(Bilateral)} \\ \mu > \mu_0 & \text{(Unilateral Positivo)} \\ \mu < \mu_0 & \text{(Unilateral Negativo)} \end{cases}$$

Sob a veracidade de H_0, a estatística do teste é dada por $t = \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} \sim t_{(n-1)}$, com a regra de decisão habitual.

Hipóteses	Regra de Decisão (Habitual) – Neyman e Pearson
H_0: $\mu = \mu_0$ x H_1: $\mu \neq \mu_0$	Rej. H_0 se $\lvert t \rvert > t_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}$
H_0: $\mu = \mu_0$ x H_1: $\mu > \mu_0$	Rej. H_0 se $t > t_{(n-1,\alpha)}$
H_0: $\mu = \mu_0$ x H_1: $\mu < \mu_0$	Rej. H_0 se $-t > t_{(n-1,\alpha)}$

H_0: $\mu = 7{,}6$ seg. H_1: $\mu \neq 7{,}6$ seg.

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{(9{,}1-7{,}6)\sqrt{10}}{1{,}91} = 2{,}48 \\ \left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}05 \\ n-1 = 9 \end{array}\right\} \quad t_{(9;0{,}025)} = 2{,}26 \end{array}\right\} \quad |t| > 2{,}26 \Rightarrow \text{Rej.-se } H_0.$$

Alternativamente, tem-se (Fisher):

$$P\left(\left| t_{(9)} \right| < 2{,}48 \right) = p\left(-2{,}48 < t_{(9)} < 2{,}48 \right) = 0{,}965 \Rightarrow p = 0{,}035(<\alpha).$$

Exemplo 2. Uma firma comercial sustenta que seus cigarros contêm não mais que 30 mg de nicotina. Uma amostra de 25 cigarros forneceu média de 31,5 mg e desvio padrão de 3mg. Considerando a distribuição normal de probabilidades para a quantidade de nicotina, no nível de 5% de significância, os dados contestam ou não a afirmação do fabricante?

H_0: μ = 30 mg (afirmação favorável à firma).

H_1: μ > 30 mg (afirmação desfavorável à firma).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}05 \\ n-1 = 24 \end{array}\right\} \quad t_{(9;0{,}05)} = 1{,}71 \\ t = \dfrac{(31{,}5-30)\sqrt{25}}{3} = 2{,}50 \end{array}\right\} \quad t > t_{(24;0{,}05)} \Rightarrow \text{Rej.-se } H_0.$$

No nível de 5% de significância, há evidências de que os cigarros contenham, em média, mais de 30 mg de nicotina.

Observação: $P\left(t_{(24)} \geq 2,50\right) = 0,0098 \Rightarrow p = 0,0098\left(< \alpha\right)$.

6.3.3. Teste para a Proporção

Exemplo 1. Um relatório de uma ONG afirma que 40% de toda a água obtida por meio de poços artesianos no nordeste é salobra (levemente salgada). Há muitas controvérsias sobre essa informação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para dirimir as dúvidas, 400 poços foram sorteados e observou-se, em 152 deles, água salobra. Qual a conclusão no nível de 5% de significância?

$$H_0: \pi = \pi_0 \qquad H_1: \begin{cases} \pi \neq \pi_0 \text{ (bilateral)} \\ \pi > \pi_0 \text{ (unilateral à direita)} \\ \pi < \pi_0 \text{ (unilateral à esquerda)} \end{cases}$$

Utilizando o TLC, a estatística $\hat{\pi}$ (proporção amostral de sucessos) tem distribuição aproximadamente normal com $E\left(\hat{\pi}\right) = \pi$ e $Var\left(\hat{\pi}\right) = \dfrac{\pi(1-\pi)}{n}$.

Sob a veracidade de H_0, tem-se $Z = \dfrac{(\hat{\pi} - \pi_0)\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}} \longrightarrow N\left(0;1\right)$ como a estatística do teste de uma proporção com a regra de decisão habitual (à semelhança do quadro anterior).

H_0: $\pi = 0,40$ (favorável à afirmação da ONG).

H_1: $\pi \neq 0,40$ (desfavorável à afirmação da ONG).

$$\left.\begin{array}{l} n = 400 \\ x = 152 \end{array}\right\} \quad \hat{\pi} = 0,38 \Rightarrow z = \frac{(0,38 - 0,40)\sqrt{400}}{\sqrt{0,40 * 0,60}} = -0,82 \text{ (bilateral) } \left(p = 0,412\right)$$

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \therefore \left|z\right| < z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \text{não se rejeita } H_0.$$

No nível de 5% de significância, os dados não possibilitam refutar a informação fornecida pela ONG.

Exemplo 2. Um professor aplica um teste envolvendo 10 questões do tipo certo-errado. Ele quer testar a hipótese o estudante está adivinhando – "chutando certo".

Seja π a probabilidade de o estudante responder corretamente a uma questão. Admitindo-se que o acerto é casual, ou seja, o estudante está "chutando certo", a hipótese H_0: $\pi = 0{,}50$ (casual) ("está adivinhando"), deve ser verificada.

Como são 10 questões (supondo independência nas respostas), se H_0 for verdadeira, o número esperado de sucessos deverá estar próximo de $n\pi = 5 = E(X)$.

Suponha que o professor adote a seguinte regra de decisão: "Se oito ou mais respostas estão corretas, o estudante não está adivinhando, enquanto que se, menos do que oito estão corretas, o estudante está adivinhando"

$$\alpha = P\left(\text{Rejeição de } H_0 \,/\, H_0 \text{ verdade}\right) = P\left(X = 8 \text{ ou } 9 \text{ ou } 10\right) = \frac{7}{128} \approx 0{,}055.$$

Interpretação do resultado: "Se o teste fosse aplicado 128 vezes, o professor esperaria rejeitar H_0 (o aluno está adivinhando) quando H_0 é verdadeira, sete vezes. O erro que se comete com probabilidade $7/128$, chama-se nível de significância do teste (no caso, teste unilateral).

Observações:

1) Alterações na regra de decisão provocam mudanças nas probabilidades de erro.
2) As regras de decisão podem envolver tomadas bilaterais, caso a situação problemática permita.

Aprofundando um pouco na discussão do exemplo, suponha, que o aluno acertou apenas 6 questões (pela consideração anterior, não há razão para rejeitar H_0), mas que ele não esteja adivinhando, ou seja, $\pi > 0{,}50$. Portanto, há um outro erro que está envolvido na tomada decisão: aceitar uma hipótese H_0, sendo ela falsa. Para efeito de estudo, suponha que na realidade $\pi = 0{,}80$. Então, tem-se a seguinte formulação:

H_0: $\pi = 0{,}50$ e H_1: $\pi = 0{,}80$.

O cálculo da probabilidade de não rejeitar H_0, quando H_1 é verdadeira, para $\alpha = \dfrac{7}{128} = 0{,}055$ (região crítica definida pela regra de decisão) é dada por: $\beta = P\left(\text{Não rejeitar } H_0 \,/\, H_1 \text{ verdade}\right) P\left(X \leq 7 \,/\, \pi = 0{,}80\right) \cong 0{,}322.$

Tem-se o seguinte quadro:

Decisão	Realidade	
	$\pi = 0{,}50$	$\pi = 0{,}80$
Aceitar H_0	Decisão Correta	Erro II ($\beta = 0{,}322$)
Aceitar H_1	Erro I ($\alpha = 0{,}055$)	Decisão Correta

Como já relatado, conforme se muda a região crítica, as probabilidades α e β são alteradas.

Por exemplo:

Região Crítica	α	β
{7,8,9,10}	0,172	0,121
{8,9,10}	0,055	0,322
{9,10}	0,011	0,624

Relação entre Intervalo de Confiança e Teste de Hipóteses

Considerando o exemplo anterior, seja n = 10 e α = 0,05.

Supondo $\hat{\pi} = 0{,}6$, o intervalo de confiança para π, com coeficiente de pelo menos 95% confiança são dados pelos limites:

$$LI = 0{,}60 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6 \times 0{,}4}{10}} = 0{,}30$$

$$LS = 0{,}60 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6 \times 0{,}4}{10}} = 0{,}90$$

$IC(\pi): [0{,}30; 0{,}90]$ com nível de confiança 95%.

Este intervalo corresponde a aceitação da hipótese de nulidade do teste ao nível de significância 5%. Isto é, obtendo-se $\hat{\pi} = 0{,}6$, não se rejeita a hipótese H_0: $\pi = \pi_0$, para π_0 assumindo valor fixado entre 0,30 e 0,90.

De modo geral, a região de aceitação de um teste tipo o exemplificado de nível α, corresponde a um intervalo de confiança para π, com $\gamma = 1 - \alpha$.

6.3.4. Teste para a Comparação de Médias de Duas Populações Normais Independentes com Variâncias Desconhecidas e Iguais

Antes do teste de médias tem que ser considerado a homogeneidade ou não das variâncias.

Para isto, tem-se:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (variâncias homogêneas = homocedasticia).

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (variância heterogêneas = heterocedasticia).

O teste de hipóteses da homogeneidade pode ser construído considerando $F = \dfrac{\text{maior}\,(S_1^2, S_2^2)}{\text{menor}\,(S_1^2, S_2^2)}$, onde S_1^2 e S_2^2 são as respectivas variâncias amostrais.

Sob a veracidade de H_0, a estatística F do teste de hipótese da homogeneidade de variâncias tem distribuição F (Fisher-Snedecor) com parâmetros graus de liberdade do numerador (ϕ_1) e graus de liberdade do denominador (ϕ_2). A regra de decisão é a habitual, ou seja, se $F > F_{\left(\frac{\alpha}{2};\phi_1;\phi_2\right)}$, rejeita-se H_0; caso contrário, não há rejeição.

Para o teste de médias de duas populações, considere o seguinte exemplo:

Um estudo sobre hipertensão induzida por gravidez considerou um grupo de 23 mulheres com essa disfunção recebendo baixa dose de aspirina e um segundo, com 24 mulheres nas mesmas condições, que receberam placebo. A pressão sanguínea arterial dos grupos está descrita no quadro a seguir.

Grupo	**N**	$\bar{x}$ **(mmHg)**	**s(mmHg)**	**s^2(mmHg)^2**
Aspirina	23	109	7	49
Placebo	24	111	8	64

No nível de significância 5%, os grupos diferem quanto à pressão arterial sanguínea? As hipóteses gerais do teste t de Student para amostras independentes são detalhadas a seguir.

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta\, ;\, H_1 : \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta \text{ (bilateral)} \\ \mu_1 - \mu_2 > \Delta \text{ (unilateral à direita)} \\ \mu_1 - \mu_2 < \Delta \text{ (unilateral à esquerda)} \end{cases}$$

Se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, o teste estatístico é descrito como $t = \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \Delta}{\sqrt{S^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$,

onde $S^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ (variância amostral comum).

A regra de decisão para o teste de hipóteses é a habitual, ou seja:

Hipóteses	Rejeitar H_0 se
H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$ x H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta$	$\lvert t \rvert > t_{\left(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2\right)}$
H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$ x H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta$	$t > t_{(\alpha;n_1+n_2-2)}$
H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$ x H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta$	$-t > t_{(\alpha;n_1+n_2-2)}$

Para o exemplo, tem-se:

Teste de homogeneidade das variâncias

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{\text{maior}\,(S_1^2, S_2^2)}{\text{menor}\,(S_1^2, S_2^2)} = \frac{64}{49} = 1{,}31 \quad (p = 0{,}530)$$

$$\alpha = 0{,}05 \begin{cases} \phi_{num.} = 23 \\ \rightarrow F_{(0{,}025;23;22)} = 2{,}344 \\ \phi_{den.} = 22 \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} F < F_{\frac{\alpha}{2}} \\ \text{Variâncias homogêneas } \left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right) \end{matrix}$$

Teste de Médias

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (Aspirina = Placebo).

H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (Aspirina $\neq$ Placebo).

$$s^2 = \frac{22 \times 49 + 23 \times 64}{45} = 56{,}67 \Rightarrow t = \frac{109 - 111}{\sqrt{56{,}67(\frac{1}{23} + \frac{1}{24})}} = -0{,}91 \quad (p = 0{,}37).$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha = 0{,}05 \\ n_1 + n_2 - 2 = 45 \end{matrix}\right\} \; t_{(0{,}025;45)} = 2{,}01.$$

Como $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}$, não se rejeita H_0.

No nível de significância 5% não foi possível verificar diferença na pressão média arterial dos dois grupos.

6.3.5. Teste para a Comparação de Médias de Duas Populações Normais Independentes com Variâncias Desconhecidas e Desiguais

Para melhor entendimento do teste t de Student para as médias de duas populações envolvendo variâncias heterogêneas considere o seguinte exemplo: Acredita-se que o nível médio de carboxihemoglobina dos fumantes seja mais alto do que o nível médio dos não fumantes. A seguir são apresentados os resultados amostrais de dois grupos.

Grupo	n	$\overline{x}$	S	s^2
Não fumante (NF)	121	1,8%	1,0%	1,00(%)^2
Fumante (F)	75	4,1%	1,6%	2,56(%)^2

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta \qquad H_1: \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta \text{ (bilateral)} \\ \mu_1 - \mu_2 > \Delta \text{ (unilateral à direita)} \\ \mu_1 - \mu_2 < \Delta \text{ (unilateral à esquerda)} \end{cases}$$

Se $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, o teste estatístico é descrito como $t = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \Delta}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{(\phi)}$,

onde $\phi = \dfrac{(A+B)^2}{\dfrac{A^2}{(n_1-1)} + \dfrac{B^2}{(n_2-1)}}$, sendo $A = \dfrac{S_1^2}{n_1}$ e $B = \dfrac{S_2^2}{n_2}$.

A regra de decisão é a habitual (toda vez que o valor do teste estiver inserido na região crítica, rejeita-se H_0).

No exemplo, tem-se:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Variâncias Homogêneas).

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Variâncias Heterogêneas).

$$F = \frac{\text{maior}(S_1^2, S_2^2)}{\text{menor}(S_1^2, S_2^2)} = \frac{2,56}{1,00} = 2,56 \qquad F > F_{\frac{\alpha}{2}}, \text{ rejeita-se } H_0 \text{ (Variâncias Heterogêneas)}$$

$$F_{(0,025;74;120)} = 1,50 \qquad p = 0,0000044\,(<\alpha)$$

$$H_0\text{: } \mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ (F = NF)} \quad H_1\text{: } \mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ (F > NF)}$$

$$t = \frac{1,8 - 4,1}{\sqrt{\frac{1,00}{121} + \frac{2,56}{75}}} = -11,17 \quad (p < 0,000001)$$

$$A = \frac{1,00}{121} = 0,00826 \qquad B = \frac{2,56}{75} = 0,03413$$

$$\phi = \frac{0,04239^2}{0,000000569 + 0,0000157} = 110,17 \cong 110$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0,05 \\ \phi = 110 \end{array}\right\} \quad t_{(0,05;110)} = 1,6 \Rightarrow -t > t_{(\alpha)} \quad \text{(rejeita-se } H_0\text{).}$$

No nível de 5% de significância, conclui-se que o nível médio de carboxihemoglobina é mais alto nos fumantes.

6.3.6. Teste para a Comparação de Médias de Duas Populações Normais Dependentes (Amostras Pareadas, Amostras Emparelhadas) e Variâncias Desconhecidas

Nesta situação, têm-se duas amostras $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$, só que agora as observações são pareadas (dependentes), ou seja, podendo ser considerado um conjunto de n pares $(X_1, Y_1); \ldots; (X_n, Y_n)$.

Exemplo: Verificar, no nível de 5% de significância, se o calibre da veia esplênica é, em média, o mesmo, antes e depois da oclusão da veia porta a partir dos seguintes dados de cães.

Cão	1	2	3	4	5	6
Antes da oclusão	75	50	50	60	50	70
Depois da oclusão	85	75	70	65	60	90

$$H_0: \mu_D = \Delta \quad H_1: \begin{cases} \mu_D \neq \Delta \text{ (bilateral)} \\ \mu_D > \Delta \text{ (unilateral à direita)} \\ \mu_D < \Delta \text{ (unilateral à esquerda)} \end{cases}$$

Seja uma amostra com n pares (X_i, Y_i). Definindo $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, a estatística do teste de hipóteses da comparação de médias dependentes é dada por:

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \Delta)}{S_D} \sim t_{(n-1)}, \text{ onde } \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \text{ e } S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}.$$

A regra de decisão é a habitual, conforme mostrada a seguir.

Hipóteses	**Rejeitar H_0 quando**
H_0: $\mu_D = \Delta$ x H_1: $\mu_D \neq \Delta$	$\lvert t \rvert < t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-1\right)}$
H_0: $\mu_D = \Delta$ x H_1: $\mu_D > \Delta$	$t > t_{(\alpha;n-1)}$
H_0: $\mu_D = \Delta$ x H_1: $\mu_D < \Delta$	$-t > t_{(\alpha;n-1)}$

No exemplo, tem-se:

D_1=10; D_2=25; D_3=20; D_4=5; D_5=10 e D_6=20, sendo D_i = Depois – Antes.

H_0: $\mu_D = \Delta\,(\text{Depois} = \text{Antes})$.

H_1: $\mu_D \neq \Delta\,(\text{Depois} \neq \text{Antes})$.

$$\bar{d} = 15{,}0 \quad s_d^2 = \frac{1650 - 6 * 15{,}0^2}{5} = 60 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{6} * 15{,}0}{\sqrt{60{,}0}} = 4{,}74 \quad (\text{p} = 0{,}0052)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}05 \\ n - 1 &= 5 \end{aligned}\right\} \quad t_{(0{,}025;5)} = 2{,}57 \Rightarrow \lvert t \rvert > t_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \quad \therefore \quad \text{rejeita-se } H_0.$$

No nível de 5% de significância conclui-se que o calibre da veia esplênica, em média, difere pela oclusão da veia porta.

Exemplo 2. Os dados seguintes foram obtidos a partir de amostras de água, coletas em oito locais diferentes de um rio, antes e depois de seis meses de início de uma campanha para a despoluição. Os valores são obtidos combinando-se vários indicadores de poluição e quanto maior o valor, maior é o grau de poluição. No nível de significância 0,05, verificar se a campanha foi produtiva.

Local	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Antes	88,4	68,9	100,5	81,4	96,3	73,7	65,1	72,1
Depois	87,1	69,1	91,1	75,6	96,9	69,2	66,3	68,3
Depois – Antes	-1,3	0,2	-9,4	-5,8	0,6	-4,5	1,2	-3,8

$$H_0\colon \mu_D = 0 \quad H_1\colon \mu_D < 0$$

$$\bar{d} = \frac{-22,8}{8} = -2,85 \qquad s_d^2 = \frac{160,22 - 8(-2,85)^2}{7} = 13,61$$

$$t = \frac{\sqrt{8}(-2,85)}{\sqrt{13,61}} = -2,19 \quad \left(p = 0,032\right)$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha = 0,05 \\ n-1 = 7 \end{matrix}\right\} \; t_{(0,05;7)} = 1,90 \;\left\}\begin{matrix} -t > t_{(\alpha,n-1)} \Rightarrow \text{rejeita-se } H_0. \\ \text{No nível de significância 0,05 a campanha foi produtiva.} \end{matrix}\right.$$

Uma observação interessante quanto à prática da comparação de grupos consiste no efeito Hawthorne.

O termo "efeito Hawthorne" tem sido usado para descrever a melhoria em uma situação que ocorre apenas porque um experimento está sendo feito. Típico disso é o fato de que grandes ensaios clínicos, comparando novos tratamentos com tratamentos tradicionais, habitualmente mostram uma melhora na saúde do paciente, mais do que seria esperada do tratamento tradicional baseado na experiência passada. Isso torna mais difícil detectar a diferença entre o tratamento tradicional e o novo.

6.4. EXERCÍCIOS: TESTE DE HIPÓTESES

1) Em um julgamento o corpo de jurados tem que decidir sobre a culpa ou a inocência de um réu. Dois fatos devem ser considerados: i) o sistema jurídico admite que toda pessoa é inocente até que se prove o contrário; ii) só vai a julgamento pessoas sobre as quais existe dúvida de sua inocência. Fazendo analogia com o teste de hipóteses, responda:

a) Estabeleça as hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1) sobre a culpa ou inocência do réu.
b) Quais os erros de decisão que o júri pode cometer?
c) Qual dos dois erros é o mais sério?
d) Na terminologia estatística de teste de hipóteses, qual tipo de erro (I ou II) pode-se vincular a cada decisão do item b?

2) Apresente as hipóteses nula e alternativa sobre a situação de saúde do paciente fazendo uma analogia com teste de hipóteses (estatístico). Que tipo de erro (I ou II) seria cometido se o resultado do teste fosse falso positivo? E se o resultado fosse falso negativo?

3) Numa discussão sobre o reajuste salarial de uma indústria farmacêutica, diretoria e sindicato não conseguem acordo. A diretoria diz que o salário médio dos operários é 7,6sm, e o sindicato diz que é 5,6sm. Para eliminar dúvidas, cada uma das partes resolveu colher uma amostra independente. A diretoria, com uma amostra de 90 operários, encontrou um salário médio de 7,0sm, com um desvio padrão igual a 2,9sm. Já a amostra do sindicato, com 60 operários apresentou média igual a 7,10sm e desvio padrão de 2,4sm.
   a) Considerando $\alpha = 0,05$, as amostras colhidas servem para justificar as respectivas afirmações dos dois grupos?
   b) De posse do resultado, qual é o seu parecer?

4) Entre um número considerável de casos de pneumonia não tratados com sulfa, a porcentagem que desenvolveu complicações foi de 16%. Com o intuito de saber se o emprego de sulfas diminuiria essa porcentagem, 250 casos de pneumonia foram tratados com sulfapiridina e destes 26 apresentaram complicações. Admitindo que os pacientes sejam semelhantes em tudo, exceto quanto ao tratamento, teste a hipótese de que a proporção de casos com complicações entre os pacientes tratados com sulfa é significativamente menor do que os não tratados (considerar $\alpha = 0,05$).

5) Uma amostra aleatória de 100 mortes naturais, no Rio Grande do Sul, deu uma média de 78 anos, com desvio padrão de 8,9 anos. No nível de 5% de significância, isto indica que o tempo médio de vida no RS, atualmente, é maior que 70 anos?

6) Estima-se em 30% a proporção dos habitantes de certa localidade que têm plano de saúde privado. Para testar a hipótese, escolhe-se uma amostra aleatória de 15 habitantes. Se dentre eles, houver de 2 a 7 indivíduos com plano de saúde privado, aceita-se a hipótese H_0: $\pi = 0,30$. Caso contrário, tem-se que $\pi \neq 0,30$.
   a) Determinar α, P(erro tipo I).
   b) Determinar β, P(erro tipo II) para as alternativas $\pi = 0,20$; $\pi = 0,40$.

7) Em oito experimentos com o bombardeamento de nuvem foram observadas precipitações pluviométricas com os seguintes valores: 0,74; 0,54; 1,25; 0,27; 0,76; 1,01; 0,49; 0,70. Em seis outras ocasiões, utilizadas como controle, foram medidas as precipitações de 0,25; 0,36; 0,42; 0,16; 0,59; 0,66. No nível de 5% de significância há razão para afirmar de que o bombardeamento aumenta a quantidade de precipitação?

8) Explique a analogia entre os erros tipo I e tipo II em um teste de hipótese (teste estatístico) e os resultados falso positivo e falso negativo que ocorrem no teste diagnóstico.

9) Sempre que o aumento médio da temperatura da água em uma câmara compressora superar 5ºC, o processo de resfriamento deve ser recalibrado. Este processo é, entretanto, muito caro e portanto deve ser feito apenas se necessário. Em oito experimentos independentes com a câmara, obtiveram-se os seguintes aumentos médios: 6,4; 4,3; 5,7; 4,9; 6,5; 5,9; 6,4; 5,1. No nível de 5% de significância, estes dados sugerem a necessidade de recalibração?

10) Selecionam-se aleatoriamente oito comprimidos diferentes de cada um de dois remédios antigripais concorrentes, e faz-se um teste do conteúdo de acetaminofena em cada um. Os resultados, em mg, são os seguintes:

Dozenol	472	487	506	511	496	524	504	501
Niteze	562	512	494	528	552	508	496	532

Considerando o nível de 5% significância, teste a afirmação de que a quantidade média de acetaminofena é a mesma nas duas marcas.

11) Duas soluções químicas, Q1 e Q2, vão ser avaliadas em relação ao pH médio. A análise de 21 amostras da solução Q1 acusou pH médio de $7,68 \pm 0,36$,

enquanto que a análise de 23 amostras da solução Q2 acusou pH médio de $7,48 \pm 0,38$. Qual a conclusão sobre os pHs médios das soluções considerando o nível 5% de significância ?

12) Uma amostra casual de 800 coelhos de uma granja apresentou 480 machos. Ao nível de 5% de significância pode-se concluir que há prevalência de coelhos machos nessa granja?

13) Objetiva-se verificar se duas dietas são igualmente eficazes ou não. Logo, sortearam-se duas amostras de animais que foram submetidos às dietas com os seguintes resultados:

Dietas	Nº de animais	Média	Desvio Padrão
A	15	6,9	0,5
B	15	6,2	0,8

Qual a conclusão no nível de 5% de significância?

14) Um médico deseja saber se uma certa droga reduz a pressão arterial média. Para isso mediu a pressão arterial de 10 voluntários, antes e após a ingestão da droga, obtendo os dados do quadro a seguir.

Voluntários	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Antes	68	80	90	74	75	69	66	83	87	83
Depois	60	71	88	72	71	70	66	78	85	76

Você acha que existe significância (5%) estatística de que a droga realmente reduz a pressão arterial média?

16) Alguém sugere que, no teste de hipóteses, é possível eliminar um erro tipo I fazendo-se $\alpha = 0$. Em um teste bilateral, que valores críticos correspondem a $\alpha = 0$?

17) Um artigo científico reportou que uma hipótese nula $(H_0 : \mu = 100)$ fora rejeitada porque p < 0,01. O tamanho da amostra era de 62 e a média amostral 103,6. Determine o maior desvio padrão possível (Usar $t_{crit} = 2,66$).

6.5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) a) H_0: O réu é inocente.
   H_1: O réu é culpado.

b) Considerar o réu culpado quando este for inocente.
   Considerar o réu inocente quando este for culpado.

c) Considerar o réu culpado quando este for inocente.

d) Erro tipo I = Rejeita-se H_0 | H_0 Verdade = Culpado | Inocente (Falso Culpado).
   Erro tipo II = Não se rejeita H_0 | H_0 Falso = Inocente | Culpado (Falso Inocente).

2) H_0: Ausência de Doença (Sadio) H1: Presença de Doença (Doente).
   Erro tipo I = Rejeita-se $H_0|H_0$ Verd = Doente|Sadio = Falso Positivo.
   Erro tipo II = Não se rejeita $H_0|H_0$ Falso=Sadio|Doente = Falso Negativo.

3) $H_0: \mu_D - \mu_S = 2{,}0sm;\ H_1: \mu_D - \mu_S \neq 2{,}0sm;\ t = -5{,}00\left(p = 0{,}0000016\right).$

4) $H_0: \pi = 0{,}16;\ H_1: \pi < 0{,}16;\ z = -2{,}42\left(p = 0{,}0078\right).$

5) $H_0: \mu = 70;\quad H_1: \mu > 70;\quad t = 8{,}99\left(p = 8{,}709 \times 10^{-15}\right).$

6) a) $\alpha = 0{,}0853$ b) $\beta = 0{,}8286$ e $\beta = 0{,}7817.$

7) $H_0: \mu_{BOMB} - \mu_{CONT} = 0;\quad H_1: \mu_{BOMB} - \mu_{CONT} > 0;\quad t = 0{,}65\left(p = 0{,}264\right).$

8) Erro tipo I = Rejeita-se $H_0|H_0$ Verd = Doente|Sadio = Falso Positivo.
   Erro tipo II = Não se rejeita $H_0|H_0$ Falso = Sadio|Doente = Falso Negativo.

9) $H_0: \mu = 5;\quad H_1: \mu > 5;\quad t = 2{,}27\left(p = 0{,}029\right).$

10) $H_0: \mu_D - \mu_N = 0;\quad H_1: \mu_D - \mu_N \neq 0;\quad t = -2{,}20\left(p = 0{,}045\right).$

11) $H_0: \mu_{Q_1} - \mu_{Q_2} = 0;\quad H_1: \mu_{Q_1} - \mu_{Q_2} \neq 0;\quad t = 1{,}82\left(p = 0{,}076\right).$

12) $H_0: \pi = 0{,}5;\quad H_1: \pi > 0{,}5;\quad z = 5{,}66\left(p = 7{,}6 \times 10^{-9}\right).$

13) $H_0: \mu_A - \mu_B = 0;\quad H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0;\quad t = -2{,}92\left(p = 0{,}007\right).$

14) $H_0: \mu_D - \mu_A = 0;\quad H_1: \mu_D - \mu_A < 0;\quad t = -3{,}54\left(p = 0{,}003\right).$

15) Correspondem aos valores simbólicos $\pm\infty$.

16) $s \leq 10{,}65$ (o valor máximo é 10,65).

BIBLIOGRAFIA

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. 5. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.

CAMPANA, A. O.; PADOVANI, C. R.; TIMO-IARA, C.; FREITAS, C. B. D.; PAIVA, S. A. R.; HOSSNE, W. S. *Investigação científica na área médica*. São Paulo: Editora Manole, 2001.

CAMPBELL, J. M.; CAMPBELL, J. B. *Matemática de laboratório – Aplicações médicas e biológicas*. 3. ed. São Paulo: Editora Roca, 1993.

DAWSON, B.; TRAPP, R. G. *Bioestatística básica e clínica*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill Interamericana do Brasil, 2003.

MLODINOW, L. *O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MOORE, D. *A estatística básica e sua prática*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2000.

MURTEIRA, B. J. F.; BLACK, G. H. J. *Estatística descritiva*. Lisboa: Editora McGraw-Hill de Portugal, 1983.

NORMAN, G. R.; STREINER, D. L. *Biostatistics – The bare essentials*. 3rd ed. St. Louis: Mosby-Year Book, 2008.

PADOVANI, C. R. Exercícios de estatística básica e experimental. *Departamento de Bioestatística*, IB/UNESP, 2002.

PAGANO, M.; GAUVREAU, K. *Princípios de bioestatística*. São Paulo: Editora Thompson, 2004.

SALSBURG, D. *Uma senhora toma chá... Como a estatística revolucionou a ciência no século XX*. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

VIEIRA, S. *Introdução à bioestatística*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 2008.

________. *Elementos de estatística*. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003. 145p.

ZAR, J. H. *Biostatistical analysis*. 5. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2009.

ANEXO

Tabela 8.1. Distribuição Normal Reduzida $\left[P\left(Z \le z_0\right) = 1 - \alpha\right]$

Distribuição Normal Reduzida (Z)										
Z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	0,001 3	0,001 3	0,001 3	0,001 2	0,001 2	0,001 1	0,001 1	0,001 1	0,001 0	0,001 0
-2,9	0,001 9	0,001 8	0,001 8	0,001 7	0,001 6	0,001 6	0,001 5	0,001 5	0,001 4	0,001 4
-2,8	0,002 6	0,002 5	0,002 4	0,002 3	0,002 3	0,002 2	0,002 1	0,002 1	0,002 0	0,001 9
-2,7	0,003 5	0,003 4	0,003 3	0,003 2	0,003 1	0,003 0	0,002 9	0,002 8	0,002 7	0,002 6
-2,6	0,004 7	0,004 5	0,004 4	0,004 3	0,004 1	0,004 0	0,003 9	0,003 8	0,003 7	0,003 6
-2,5	0,006 2	0,006 0	0,005 9	0,005 7	0,005 5	0,005 4	0,005 2	0,005 1	0,004 9	0,004 8
-2,4	0,008 2	0,008 0	0,007 8	0,007 5	0,007 3	0,007 1	0,006 9	0,006 8	0,006 6	0,006 4
-2,3	0,010 7	0,010 4	0,010 2	0,009 9	0,009 6	0,009 4	0,009 1	0,008 9	0,008 7	0,008 4
-2,2	0,013 9	0,013 6	0,013 2	0,012 9	0,012 5	0,012 2	0,011 9	0,011 6	0,011 3	0,011 0
-2,1	0,017 9	0,017 4	0,017 0	0,016 6	0,016 2	0,015 8	0,015 4	0,015 0	0,014 6	0,014 3
-2,0	0,022 8	0,022 2	0,021 7	0,021 2	0,020 7	0,020 2	0,019 7	0,019 2	0,018 8	0,018 3
-1,9	0,028 7	0,028 1	0,027 4	0,026 8	0,026 2	0,025 6	0,025 0	0,024 4	0,023 9	0,023 3
-1,8	0,035 9	0,035 1	0,034 4	0,033 6	0,032 9	0,032 2	0,031 4	0,030 7	0,030 1	0,029 4
-1,7	0,044 6	0,043 6	0,042 7	0,041 8	0,040 9	0,040 1	0,039 2	0,038 4	0,037 5	0,036 7
-1,6	0,054 8	0,053 7	0,052 6	0,051 6	0,050 5	0,049 5	0,048 5	0,047 5	0,046 5	0,045 5
-1,5	0,066 8	0,065 5	0,064 3	0,063 0	0,061 8	0,060 6	0,059 4	0,058 2	0,057 1	0,055 9
-1,4	0,080 8	0,079 3	0,077 8	0,076 4	0,074 9	0,073 5	0,072 1	0,070 8	0,069 4	0,068 1
-1,3	0,096 8	0,095 1	0,093 4	0,091 8	0,090 1	0,088 5	0,086 9	0,085 3	0,083 8	0,082 3
-1,2	0,115 1	0,113 1	0,112	0,109 3	0,107 5	0,105 6	0,103 8	0,102 0	0,100 3	0,098 5
-1,1	0,135 7	0,133 5	0,131 4	0,129 2	0,127 1	0,125 1	0,123 0	0,121 0	0,119 0	0,117 0
-1,0	0,158 7	0,156 2	0,153 9	0,151 5	0,149 2	0,146 9	0,144 6	0,142 3	0,140 1	0,137 9
-0,9	0,184 1	0,181 4	0,178 8	0,176 2	0,173 6	0,171 1	0,168 5	0,166 0	0,163 5	0,161 1
-0,8	0,211 9	0,209 0	0,206 1	0,203 3	0,200 5	0,197 7	0,194 9	0,192 2	0,189 4	0,186 7
-0,7	0,242 0	0,238 9	0,235 8	0,232 7	0,229 6	0,226 6	0,223 6	0,220 6	0,217 7	0,214 8
-0,6	0,274 3	0,270 9	0,267 6	0,264 3	0,261 1	0,257 8	0,254 6	0,251 4	0,248 3	0,245 1
-0,5	0,308 5	0,305 0	0,301 5	0,298 1	0,294 6	0,291 2	0,287 7	0,284 3	0,281 0	0,277 6
-0,4	0,344 6	0,340 9	0,337 2	0,333 6	0,330 0	0,326 4	0,322 8	0,319 2	0,315 6	0,312 1
-0,3	0,382 1	0,378 3	0,374 5	0,370 7	0,366 9	0,363 2	0,359 4	0,355 7	0,352 0	0,348 3
-0,2	0,420 7	0,416 8	0,412 9	0,409 0	0,405 2	0,401 3	0,397 4	0,393 6	0,389 7	0,385 9

continuação

Distribuição Normal Reduzida (Z)										
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0,1	0,460 2	0,456 2	0,452 2	0,448 3	0,444 3	0,440 4	0,436 4	0,432 5	0,428 6	0,424 7
-0,0	0,500 0	0,496 0	0,490 2	0,488 0	0,484 0	0,480 1	0,476 1	0,472 1	0,468 1	0,464 1
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,611 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,917
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6
3,0	0,998 7	0,998 7	0,998 7	0,998 8	0,998 8	0,998 9	0,998 9	0,998 9	0,999 0	0,999 0

Tabela 8.2. Distribuição t de Student $\left[P\left(-t_0 < t < t_0\right) = 1 - \alpha\right]$

Número de Graus de Liberdade	Nível de Significância para o Teste Bilateral (α)		
	0,01	**0,05**	**0,10**
1	63,657	12,706	6,314
2	9,925	4,303	2,920
3	5,841	3,182	2,353
4	4,604	2,776	2,132
5	4,032	2,571	2,015
6	3,707	2,447	1,943
7	3,499	2,365	1,895
8	3,355	2,306	1,860
9	3,250	2,262	1,833
10	3,169	2,228	1,812
11	3,106	2,201	1,796
12	3,055	2,179	1,782
13	3,012	2,160	1,771
14	2,977	2,145	1,761
15	2,947	2,131	1,753
16	2,921	2,120	1,746
17	2,898	2,110	1,740
18	2,878	2,101	1,734
19	2,861	2,093	1,729
20	2,845	2,086	1,725
21	2,831	2,080	1,721
21	2,819	2,074	1,717
23	2,807	2,069	1,714
24	2,797	2,064	1,711
25	2,787	2,060	1,708
26	2,779	2,056	1,706
27	2,771	2,052	1,703
28	2,763	2,048	1,701

continuação

Número de Graus de Liberdade	Nível de Significância para o Teste Bilateral (α)		
	0,01	**0,05**	**0,10**
29	2,756	2,045	1,699
30	2,750	2,042	1,697
40	2,704	2,021	1,684
60	2,660	2,000	1,671
120	2,617	1,980	1,658
∞	2,576	1,960	1,645

Tabela 8.3. Distribuição Qui-quadrado $\left[P\left(\chi^2 > \chi_0^2\right) = \alpha\right]$

Graus de Liberdade	10%	α 5%	1%
1	2,71	3,84	6,64
2	4,60	5,99	9,21
3	6,25	7,82	11,34
4	7,78	9,49	13,28
5	9,24	11,07	15,09
6	10,64	12,59	16,81
7	12,02	14,07	18,48
8	13,36	15,51	20,09
9	14,68	16,92	21,67
10	15,99	18,31	23,21
11	17,28	19,68	24,72
12	18,55	21,03	26,22
13	19,81	22,36	27,69
14	21,06	23,68	29,14
15	22,31	25,00	30,58
16	23,54	26,30	32,00
17	24,77	27,59	33,41
18	25,99	28,87	34,80
19	27,20	30,14	36,19
20	28,41	31,41	37,57
21	29,62	32,67	38,93
22	30,81	33,92	40,29
23	32,01	35,17	41,64

continuação

Graus de Liberdade	10%	α 5%	1%
24	33,20	36,42	42,98
25	34,38	37,65	44,31
26	35,56	38,88	45,64
27	36,74	40,11	46,96
28	37,92	41,34	48,28
29	39,09	42,56	49,59
30	40,26	43,77	50,89

Tabela 8.4. Distribuição F $\left[P\left(F > F_0\right) = 0{,}01\right]$

No de Graus de Liberdade do Denominador	No de Graus de Liberdade do Numerador								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98,5	99,0	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18

continuação

No de Graus de Liberdade do Denominador	No de Graus de Liberdade do Numerador								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	383	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

Tabela 8.5. Distribuição F $\left[P\left(F > F_0\right) = 0{,}05\right]$

No de Graus de Liberdade do Denominador	No de Graus de Liberdade do Numerador								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27

continuação

No de Graus de Liberdade do Denominador	No de Graus de Liberdade do Numerador								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	292	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	188

Tabela 8.6. Distribuição F $\left[P\left(F > F_0\right) = 0{,}10\right]$

No de Graus de Liberdade do Denominador	No de Graus de Liberdade do Numerador								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88

continuação

No de Graus de Liberdade do Denominador	No de Graus de Liberdade do Numerador								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87
29	2,88	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86
30	2,84	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63

Carlos Roberto Padovani é Professor Titular de Bioestatística do Instituto de Biociências, UNESP, Câmpus de Botucatu, tendo atuado como Professor e/ou Orientador de Programas de Pós-Graduação da USP, UNICAMP, UNESP, UFMT e UnB. Foi Bolsista Produtividade do CNPq; Membro da Comissão de Avaliação de Programas de Pós-Graduação junto à CAPES; Coordenador da Área de Ciências Biológicas junto à RUNESP, Presidente da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria. Atualmente ministra disciplinas da área de Estatística na graduação e de Bioestatística e Metodologia da Pesquisa Científica em vários programas de pós-graduação na UNESP, com orientações em nível de Mestrado e Doutorado e supervisão de Pós-Doutorado.

O texto apresenta noções básicas de estatística descritiva e gráfica, probabilidades, distribuições probabilísticas, estimação e teste de hipóteses envolvendo uma abordagem não feita sob o aspecto tradicional de conceitos, fórmulas e uso de "pacotes" computacionais para os cálculos estatísticos, mas sim, trazendo a realidade do cotidiano dos alunos das áreas de Ciências Biológicas e da Saúde para o processo de ensino-aprendizagem.

ISBN 978-85-7983-265-9