

**Sergio Persival Baroncini Proença**

**CURSO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

**EESC/USP  
São Carlos  
2018**

**DOI: 10.11606/9788580230635**

Ficha catalográfica elaborada pela Seção de Atendimento ao Usuário  
do Serviço de Biblioteca “Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes”

P962c Proença, Sergio Persival Baroncini  
Curso de resistência dos materiais [recurso eletrônico] /  
Sergio Persival Baroncini Proença. -- São Carlos : EESC/USP,  
2018.  
[396] p.  
ISBN 978-85-8023-063-5 (e-book)  
DOI: 10.11606/9788580230635

1. Resistência dos materiais. 2. Mecânica dos sólidos.  
3. Mecânica dos materiais. 4. Elasticidade linear.  
I. Título.

Eduardo Graziosi Silva – CRB-8/8907

Está autorizada a reprodução parcial ou total desta obra desde que citada a fonte.  
Proibido uso com fins comerciais.

## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO</b> .....	<b>6</b>
<b>1 SOLICITAÇÃO POR FORÇA NORMAL</b> .....	<b>9</b>
1.1 <i>Introdução: continuidade do meio e os conceitos de deformação e de tensão</i> .....	9
1.2 <i>Estudo das barras submetidas a força normal</i> .....	15
1.2.1 <i>Hipótese cinemática</i> .....	15
1.2.2 <i>Estudo das deformações: relações deformação-deslocamento</i> .....	17
1.2.3 <i>Determinação das tensões: relações de equilíbrio</i> .....	23
1.2.4 <i>Estudo das relações constitutivas tensão-deformação em regime elástico</i> .....	29
1.2.5 <i>O problema de análise estrutural e a identificação paramétrica</i> .....	32
1.2.6 <i>Efeitos de imperfeições iniciais e de temperatura</i> .....	52
1.2.7 <i>Barras constituídas por dois materiais</i> .....	59
1.2.8 <i>Barras em regime elasto-plástico perfeito</i> .....	66
<b>2 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES</b> .....	<b>77</b>
2.1 <i>Momento estático e o centro de gravidade de figuras planas</i> .....	77
2.2 <i>Momentos de segunda ordem</i> .....	82
2.3 <i>Transportes dos momentos de segunda ordem por efeito da translação de eixos</i> .....	84
2.4 <i>Momentos de segunda ordem de figuras compostas</i> .....	86
2.5 <i>Efeito da rotação dos eixos sobre o cálculo dos momentos de segunda ordem</i> .....	88
<b>3 ESTUDO DA FLEXÃO</b> .....	<b>95</b>
3.1 <i>Introdução</i> .....	95
3.2 <i>A flexão composta e os casos mais simples</i> .....	96
3.3 <i>Flexão pura normal</i> .....	97
3.3.1 <i>Hipótese cinemática de Bernoulli-Navier e relação deformação-deslocamento</i> .....	99
3.3.2 <i>Relações tensão-deformação</i> .....	102
3.3.3 <i>Relações de equilíbrio</i> .....	102
3.3.4 <i>O problema de análise estrutural</i> .....	103
3.4 <i>Flexão pura oblíqua</i> .....	107
3.5 <i>Determinação da linha neutra</i> .....	116
3.6 <i>Flexão composta: tração ou compressão excêntricas</i> .....	121
3.6.1 <i>Linha neutra</i> .....	124
3.6.2 <i>Núcleo central (de inércia)</i> .....	125
3.7 <i>Vigas compostas por dois materiais</i> .....	134
3.8 <i>Vigas em regime elastoplástico</i> .....	141
3.9 <i>O efeito da força cortante em barras prismáticas</i> .....	147
<b>4 CENTRO DE CISALHAMENTO DE SEÇÕES ABERTAS COM PAREDES FINAS</b> .....	<b>162</b>
<b>5 LINHA ELÁSTICA</b> .....	<b>177</b>
5.1 <i>Equação da linha elástica e o cálculo de deslocamentos</i> .....	177

5.2 Equação diferencial da linha elástica em função do carregamento aplicado .....	192
5.3 Análise inversa: caracterização do sistema a partir da linha elástica .....	194
<b>6 NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA: INSTABILIDADE DO EQUILÍBRIO E A FLAMBAGEM DE EULER .....</b>	<b>198</b>
6.1 Não-linearidade geométrica: considerações gerais .....	198
6.2 Os conceitos de ponto limite e de ponto de bifurcação do equilíbrio .....	202
6.3 Efeitos de imperfeições .....	206
6.4 A flambagem de Euler .....	210
6.5 A flexão composta na análise não-linear geométrica .....	223
<b>7 TORÇÃO LIVRE .....</b>	<b>232</b>
7.1 Considerações gerais e a hipótese cinemática .....	232
7.2 Relações deformação-deslocamento .....	235
7.3 Relações tensão-deformação .....	236
7.4 O equilíbrio das tensões de cisalhamento .....	237
7.5 Balanço entre as resultantes de tensões e os esforços solicitantes .....	238
7.6 Considerações sobre a resolução do problema da torção simples .....	240
7.7 Barras de seção circular .....	241
7.8 Analogia de membrana .....	252
7.8.1 Barras de seção transversal vazada fechada com espessura fina .....	258
7.8.2 Barras com seções transversais abertas e paredes finas .....	263
<b>8 ESTUDO DAS TENSÕES .....</b>	<b>279</b>
8.1 O estado de tensão num ponto .....	279
8.2 Estado simples de tensão .....	284
8.3 Estado duplo de tensão .....	288
8.4 Círculo de Mohr no estado duplo .....	299
<b>9 ESTUDO DAS DEFORMAÇÕES .....</b>	<b>310</b>
9.1 Introdução .....	310
9.2 Medidas de deformação e o estado duplo .....	312
9.3 Decomposição aditiva do tensor de deformações .....	318
9.4 O módulo de elasticidade volúmico e o módulo de elasticidade transversal .....	320
<b>10 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA .....</b>	<b>336</b>
10.1 Envoltória de Mohr .....	339
10.2 Critério da máxima tensão normal .....	341
10.3 Critério de Mohr-Coulomb .....	343
10.4 Critério de Tresca .....	353

10.5 Critério de von Mises .....	356
<b>11 EQUAÇÕES GERAIS DA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL .....</b>	<b>364</b>
11.1 Estado plano de tensão .....	366
11.2 Estado plano de deformação .....	371
11.3 Estado plano de tensão em coordenadas cilíndricas .....	373
<b>12 APLICAÇÃO DA TEORIA DA ELASTICIDADE AO CÁLCULO DE TUBOS .....</b>	<b>379</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>395</b>

## APRESENTAÇÃO<sup>1</sup>

Esta publicação resulta da experiência de alguns anos de trabalho do autor no ensino das disciplinas relativas ao tema 'Resistência dos Materiais' para cursos de graduação em engenharia da Escola de Engenharia de São Carlos, EESC/USP.

Fundamentalmente são notas de aulas que foram revistas e compiladas, procurando-se expressar o entendimento do autor sobre o assunto, segundo uma abordagem propositadamente de forte conteúdo conceitual.

A publicação foi concebida originalmente como instrumento de leitura e estudo complementar por parte dos alunos, pois contém os tópicos apresentados em sala de aula abordados com maior grau de profundidade. Entretanto, entende-se que o texto também possa estar acessível para leitura isolada, independente do acompanhamento das aulas. Para viabilizar essa alternativa, procurou-se ilustrar os conceitos teóricos com exercícios detalhadamente resolvidos.

A seqüência dos assuntos é essencialmente aquela seguida pelo autor quando responsável pela disciplina anual de sigla SET-401, dedicada ao curso de Engenharia Civil. Tal seqüência foi proposta no início de 1996 a partir de uma reavaliação do conteúdo da disciplina à época, então ministrada em conjunto com o Professor João Carlos Barreiro. A principal motivação para a nova construção conceitual foi a intensão de reunir os modelos mecânicos associados às solicitações por força normal, flexão e torção, numa estrutura metodológica comum de abordagem. Essa estrutura pressupõe a apresentação de cada um dos assuntos na seguinte ordem: discussão do modelo cinemático do campo de deslocamentos, determinação do campo de deformações compatíveis, caracterização do campo de tensões consistente com o modelo constitutivo e verificação do equilíbrio.

---

<sup>1</sup> Esta apresentação reproduz em parte a apresentação do texto original elaborado para as apostilas do curso de 'Resistência dos Materiais'.

A proposta metodológica é, por assim dizer, uma herança científica do autor, que foi a ele transmitida pelos ensinamentos do Professor Raul A. Feijóo, do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), por ocasião de cursos lá frequentados e, sobretudo pelos bons tempos em que o autor pôde desfrutar de sua co-orientação no trabalho de doutoramento.

Se a redação, em si, pretendeu ser original, sob um ponto de vista mais amplo o texto resultante não o é completamente, pois em alguns casos foram adotadas formas de apresentação e exercícios originalmente propostas por outros colegas de Departamento que ministraram, ou ainda ministram, as disciplinas de Resistência dos Materiais<sup>(\*)</sup>. Cabe, portanto, o reconhecimento de que aquelas formas e exercícios possuem um conteúdo conceitual ou didático muito importante, dos quais o autor decidiu não prescindir para dar lugar a uma suposta originalidade que certamente levaria a um texto menos didático.

A fonte de inspiração para o rigorismo conceitual que se procurou adotar neste texto é o livro 'Introdução à Resistência dos Materiais', de autoria do Professor Frederico Schiel, Professor Catedrático que marcou a história do então Departamento de Estruturas da EESC desde a sua fundação até meados dos anos setenta. Além da leitura daquele livro, recomendam-se outros textos sobre Resistência dos Materiais indicados na lista bibliográfica sugerida ao final do texto, os quais são, sem dúvida, mais didáticos e nunca menos conceituais do que este trabalho.

É importante destacar que o passo inicial na direção da construção deste texto foi dado com a colaboração do Professor Jorge Munaiar Neto, na época aluno de pós-graduação da área de Engenharia de Estruturas e participante do programa PAE. O Professor Munaiar assistiu a todas as aulas do curso, oferecido dentro do novo enfoque, pela primeira vez, em 1996, realizando anotações que nos anos seguintes passaram por revisões

---

<sup>(\*)</sup> Recentemente essas disciplinas passaram a ser chamadas: "Mecânica dos Sólidos".

sucessivas por este autor, conduzindo à forma ora proposta para o texto.

Não há como deixar de mencionar, com grande destaque, a fundamental contribuição para este trabalho do Professor João Carlos Barreiro, hoje aposentado, com quem o autor pôde aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto a partir das inúmeras discussões, sobre aspectos conceituais e de ensino, realizadas nas várias oportunidades em que puderam dividir a mesma disciplina. Ao amigo e mestre Barreiro o autor gostaria de dedicar este trabalho.

Um último e especial agradecimento registra-se para o Professor Walter Savassi, não só pela cuidadosa leitura, e valiosas sugestões formuladas, das apostilas que geraram esta obra, mas, sobretudo, porque tem sido para o autor, ao longo de vários anos, desde os tempos de sua orientação no trabalho de doutoramento, um exemplo de conduta profissional.

Finalmente, observa-se que essa versão poderia ainda ser mais bem revista, simplificada em algumas partes e, sem dúvida, enriquecida, por exemplo, com tópicos complementares relativos à Mecânica dos Materiais e Estruturas. Esse trabalho, no entanto, fica postergado para uma próxima edição deste texto. Conclui-se, portanto, que não se trata de uma obra completa e acabada, mas uma fotografia de sua atual etapa de desenvolvimento.

O autor.

São Carlos, janeiro de 2001.



## 1 SOLICITAÇÃO POR FORÇA NORMAL

### 1.1 Introdução: continuidade do meio e os conceitos de deformação e de tensão

Uma hipótese fundamental em todo o estudo que se desenvolverá neste e nos outros capítulos, é a de que os sólidos são idealizados como meios contínuos. A continuidade implica na desconsideração de defeitos iniciais ou vazios internos do material, de modo que cada um de seus volumes elementares é totalmente preenchido por uma quantidade elementar de massa.

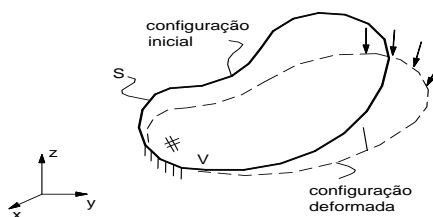
Essa hipótese se justifica tendo-se em vista a escala macroscópica na qual normalmente são observados os materiais e se realizam os estudos e aplicações em engenharia. Em tal escala não se leva em conta a estrutura molecular da matéria e, em razão disso, também não são consideradas as forças internas de natureza intermolecular que existem no meio em seu estado natural.

Uma primeira consequência importante da hipótese de continuidade é que se pode fazer referência a pontos do meio, denominados pontos materiais, associando-se a eles um conjunto de coordenadas; outra é que se podem empregar funções matemáticas para realizar a descrição das transformações que o corpo venha a sofrer.

Por exemplo: considere-se o corpo objeto de estudo ocupando, num certo instante de tempo, uma região do espaço tridimensional. Escolhendo-se, nesse espaço, um ponto para origem de um referencial cartesiano fixo e também um sistema de coordenadas (cartesiano ou curvilíneo, de acordo com a conveniência), cada um dos pontos materiais passa a ser individualizado por uma tripla de coordenadas e o seu lugar geométrico constitui o que se denomina por *configuração*. Nessas condições, eventuais transformações que levem a uma mudança de configuração poderão ser descritas por funções matemáticas que representam os deslocamentos sofridos e que tem como variáveis

livres as coordenadas dos pontos. Tais funções são consideradas contínuas para que se mantenha consistência com a própria hipótese de continuidade.

Desenvolvendo-se, por enquanto, uma análise de caráter geral, admita-se que o corpo, ocupando certa configuração inicial, ou de referência, de volume  $V$  e superfície lateral  $S$ , venha a ser submetido a ações externas classificadas em forças por unidade de volume (representativas do peso próprio, por exemplo) e forças por unidade de superfície (representativas de forças de contato com outros corpos, por exemplo)<sup>(\*)</sup>. As ações externas provocam uma transformação, ou mudança na configuração de referência (v.fig.1.1), a qual é definida como *deformação* sempre que os deslocamentos sofridos por pontos inicialmente vizinhos impliquem em variação na sua posição relativa.



**Figura 1.1 - Mudança na configuração de referência**

É exatamente a caracterização da deformação pela variação de posição relativa entre pontos vizinhos que dá ao seu estudo um caráter local. Assim sendo, é usual se falar em estudo das deformações, fazendo-se referência às transformações ocorridas nas vizinhanças de pontos do corpo.

Note-se que as ações externas descritas são uma causa mecânica da deformação; porém, deformações podem ser provocadas por efeitos não mecânicos, como uma variação de temperatura.

Admitindo-se, então, que o sólido tenha sofrido um processo de deformação e que se apresente ainda como um meio

---

<sup>(\*)</sup> As forças concentradas, por agirem numa área muito pequena da superfície, são consideradas aplicadas num ponto e constituem idealização às vezes útil.

contínuo na nova configuração, é de se supor que passem a existir esforços internos com intensidades e distribuição no volume tais que se mantenha a coesão entre as partes, impedindo-se, portanto, rupturas internas. Assim, é natural concluir que a ação de forças externas produz deformação e esta, por sua vez, tem correspondência com o aparecimento de esforços internos.

Outro aspecto importante a salientar, nessa análise preliminar, é que se por um lado espera-se que a intensidade dos esforços internos varie com o nível de deformação, caracterizando-se, portanto, uma relação direta entre eles, por outro lado, essa relação deve necessariamente envolver propriedades do meio que constitui o corpo. De fato, um mesmo nível de deformação pode produzir esforços internos com intensidades diferentes de material para material.

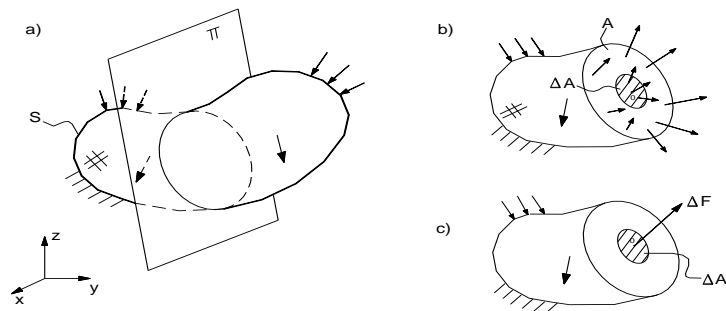
A descrição e determinação dos *campos*<sup>(\*)</sup> de deslocamentos, deformações e esforços internos (e da relação entre eles) em meios sólidos deformáveis constituem objeto da *Mecânica do Contínuo*. Nesse âmbito, a *Resistência dos Materiais* ocupa-se do estudo e modelagem, com hipóteses mais restritivas, dos fenômenos de deformação e do estabelecimento de critérios de ruptura para diferentes materiais.

Considere-se, agora, o corpo numa situação deformada e estaticamente equilibrada (com resultante nula das forças externas) representado, de modo genérico, na figura 1.2. Com o objetivo de 'visualizar' as forças internas, admita-se que o corpo seja formado por um arranjo de partes, cada uma das quais formando um sistema em equilíbrio se consideradas as forças externas e internas que lhes correspondem.

Por simplificação, imagine-se que o corpo seja formado por

---

(\*) Por campo entendem-se funções que assumem valores em pontos do corpo, tendo suas coordenadas como variáveis independentes.



duas partes unidas através de um plano  $\Pi$ , e que uma delas tenha sido isolada (v.fig.1.2b).

**Figura 1.2 - Forças de interação entre partes do corpo**

A análise do equilíbrio dessa parte permite concluir pela existência de forças internas (indicadas no diagrama de corpo livre, representado na figura 1.2b, por setas que representam o efeito da parte retirada sobre a parte isolada através da seção **A** contida no plano  $\Pi$ ). Isto é: a ação das forças externas que atuam na parte isolada é contrabalançada por forças que se distribuem na seção **A**.

As forças internas atuam ponto a ponto e sua distribuição na seção é, em princípio, variável e desconhecida. Assim sendo, é mais conveniente proceder à sua caracterização formal tomando-se uma porção muito pequena de **A**.

Assim, numa área elementar  $\Delta A$  contida no plano da seção, e definida em torno de um ponto **O** genérico, pode-se representar um vetor de força cujo valor  $\Delta F$  é igual ao valor da resultante das forças internas atuantes naquela área elementar (v.fig.1.2c); a relação  $\Delta F/\Delta A$  define um valor de força interna média.

Dada a continuidade do meio é válido imaginar um processo limite no qual  $\Delta A$  possa diminuir tendendo ao ponto **O**. Outra hipótese fundamental consiste em admitir que nesse limite a relação  $\Delta F/\Delta A$  assumira um valor finito; tal valor é denominado

tensão total no ponto **O**. A relação matemática que representa a definição de tensão é, então, a seguinte:

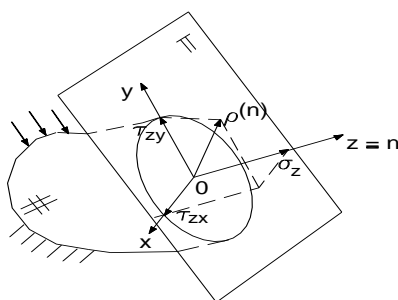
$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F / \Delta A \quad (1.1)$$

De outro modo, o mesmo procedimento pode ser aplicado considerando-se diretamente o vetor da resultante das forças internas na área  $\Delta A$  e não o seu valor. Nesse caso, o resultado do processo limite é um *vetor* de tensão.

Nota-se que a tensão é aqui entendida como a *medida* do vetor de tensão, tendo dimensão de força por unidade de área. É importante observar, também, que o vetor de tensão e sua medida possuem um caráter local, pois são associados a um ponto; entretanto, mesmo fixada uma posição, não são constantes, podendo mudar em direção e valor se outro plano for considerado.

Portanto, de uma maneira geral, a tensão é uma função do ponto e do plano que passe por ele (usualmente individualizado pela inclinação do seu *versor* normal).

Voltando ao ponto **O**, adotando-se um sistema de referência cartesiano triortogonal e dextrorso, de tal modo que dois dos seus eixos,  $x$  e  $y$ , por exemplo, estejam sobre o plano  $\Pi$  e o terceiro perpendicular a ele, o vetor de tensão pode ser decomposto numa componente normal à seção e em duas outras



contidas no seu plano (v.fig.1.3).

**Figura 1.3 - Componentes do vetor de tensão**

A componente normal tem medida aqui representada por  $\sigma_z$  e recebe a denominação de tensão normal, onde o índice **z** é adotado para indicar o eixo de referência ao qual a componente é paralela. As componentes no plano têm intensidades representadas por  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ , sendo denominadas tensões tangenciais ou cisalhantes. O duplo índice, nesse caso, indica que os correspondentes vetores estão contidos num plano cuja normal está alinhada com o eixo z e direcionados com os eixos x ou y.

Fazendo-se uso de uma representação matemática, em notação vetorial o vetor tensão ( $\rho^{(n)}$ ) associado ao plano de normal n pode ser escrito na forma:

$$\rho^{(n)} = \sigma_z e_1 + \tau_{zy} e_2 + \tau_{zx} e_3$$

onde  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  são versores nas direções de z, y e x, respectivamente.

Novamente é importante notar que imaginando o corpo seccionado no ponto **O** por outro plano inclinado em relação a  $\Pi$ , o vetor de tensão pode variar de direção e, portanto, também as medidas das suas componentes terão provavelmente outros valores.

Em resumo, o termo *tensão* aplica-se tanto à medida do vetor de tensão como às suas componentes, sendo que estas, de acordo com suas características, são adjetivadas como normal ou de cisalhamento. Por outro lado, diz-se que o *estado de tensão* num ponto fica conhecido se puderem ser determinadas as componentes de tensão segundo qualquer plano que passe por ele. Em particular, é importante identificar aquele plano segundo o qual vai atuar a máxima tensão normal ou então a máxima tensão de cisalhamento.

A importância do estudo e estimativa das tensões normais e tangenciais está no fato de que os materiais de uso na prática exibem uma resistência limitada às suas intensidades, em forma individualizada ou mesmo combinadas. Ultrapassados certos limites, observa-se, experimentalmente, que os materiais mudam de comportamento iniciando-se, por exemplo, um processo local de plastificação ou mesmo de ruptura. Assim, torna-se necessário estabelecer critérios de admissibilidade dos níveis de tensão, prevenindo-se de possíveis mudanças do regime de comportamento.

No que segue, por conveniência e sem prejuízo de aspectos conceituais, a análise tridimensional será abandonada, pois nas situações que serão estudadas, tanto o corpo, em função de simplificações de sua geometria, como as forças externas estão contidos num único plano. Apesar dessa simplificação, com suficiente precisão muitos casos reais podem ser com ela abordados.

No âmbito da análise plana, a situação mais simples na qual é possível desenvolver o estudo das tensões, deformações e de suas relações, é aquela das barras de eixo reto, submetidas a forças axiais centradas como, por exemplo, as barras de treliças.

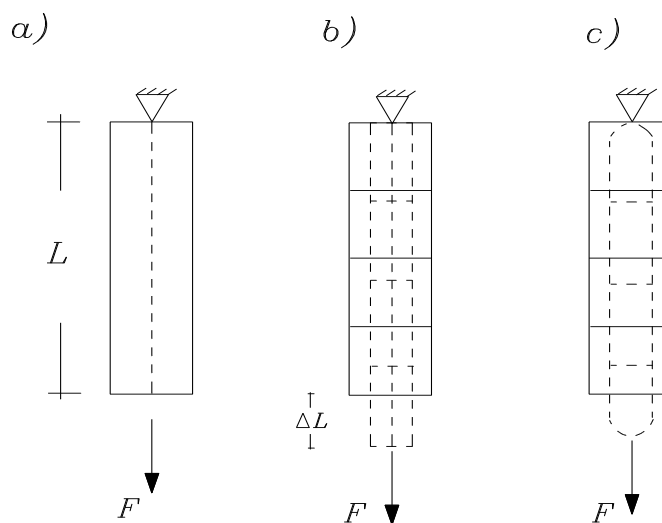
## *1.2 Estudo das barras submetidas a força normal*

### *1.2.1 Hipótese cinemática*

Considere-se uma barra prismática, assim denominada por apresentar geometria caracterizada por uma seção transversal com área **A** invariável ao longo do seu comprimento **L**. Vale também ressaltar que nas barras em geral, as dimensões da seção transversal são pequenas em relação ao comprimento.

Na configuração inicial o eixo está disposto na vertical, sendo vinculado numa das extremidades por um apoio fixo e livre na outra. Nessa configuração aplica-se, na extremidade livre,

uma força externa  $F$  de tração axial, conforme ilustra a figura 1.4a.



**Figura 1.4 - a) Barra submetida a força axial; b) Hipótese cinemática; c) Perturbações localizadas**

Em primeiro lugar, deve-se considerar que a ação da força  $F$  provoca deformação, uma vez que os pontos da barra se deslocam alterando-se suas posições relativas iniciais. Para caracterizar de modo simples a deformação resultante, parte-se de uma hipótese sobre o campo de deslocamentos, dita *hipótese cinemática*.

Uma hipótese cinemática plausível afirma que os deslocamentos sofridos são tais que o eixo da barra continua reto e as seções transversais inicialmente planas permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado (v.fig.1.4b, onde as linhas transversais indicam posições genéricas de seções transversais).

Essa hipótese tem, de fato, comprovação experimental, observando-se distorções apenas nas seções próximas das extremidades da barra, aonde se dá a aplicação da força concentrada e se realiza a vinculação externa (v.fig.1.4c).

O inconveniente, causado pela natureza concentrada da força aplicada, pode ser contornado admitindo-se a validade do *Princípio de Saint-Venant*. Tal princípio afirma que perturbações provocadas por forças concentradas, ou restrições vinculares,



são de natureza localizada e não se propagam para o interior do meio; ao longo da maior parte da barra, tudo se passa como se a força concentrada estivesse sendo aplicada com distribuição uniforme sobre a seção. Assim sendo, no estudo em desenvolvimento desconsideram-se as *perturbações de contorno*, e a hipótese cinemática adotada aplica-se para toda a barra.

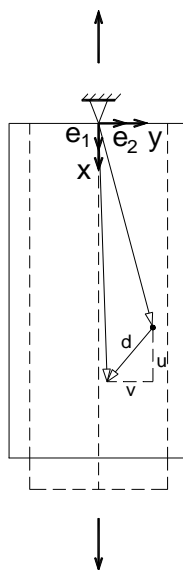
### 1.2.2 Estudo das deformações: relações deformação-deslocamento

De acordo com a hipótese cinemática, a barra pode sofrer um alongamento, no caso de estar sendo solicitada à tração, ou um encurtamento se a solicitação for de compressão. Em qualquer caso as seções transversais inicialmente planas devem permanecer planas.

Mas a deformação pode produzir efeitos também na direção transversal ao eixo da barra. De fato, quando o material que a compõe tem resposta *elástica*, ou seja, as deformações são totalmente reversíveis num processo de descarregamento, tal efeito se caracteriza por encurtamentos ou alongamentos transversais concomitantes, respectivamente, aos alongamentos ou encurtamentos longitudinais.

É importante observar que a hipótese cinemática adotada diz respeito exclusivamente ao campo de deslocamentos, de modo totalmente independente da resposta do material. Assim sendo, a variação simultânea das dimensões transversais da barra, decorrente de uma propriedade elástica do material, podem ser incorporadas à análise sem que aquela hipótese seja violada.

A figura 1.5 ilustra uma deformação coerente com a hipótese cinemática; comparam-se as configurações inicial e atual da barra.



**Figura 1.5 Barra deformada e o campo vetorial de deslocamentos**

No sentido de dar uma representação matemática à hipótese cinemática, é conveniente introduzir um sistema de referência cujos eixos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  coincidem com as direções do eixo da barra e ortogonal a ele, tendo ainda origem na sua extremidade fixa.

Nesse sistema a hipótese cinemática fica representada matematicamente pelo vetor deslocamento, no plano, de um ponto qualquer pertencente à configuração inicial. Tal vetor deve ter componentes segundo as direções do eixo e perpendicular a ele, respectivamente com valores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (v.fig.1.5). A componente  $\mathbf{u}$  decorre do alongamento ou encurtamento na direção longitudinal, enquanto a componente  $\mathbf{v}$  resulta do efeito da deformação na direção transversal.

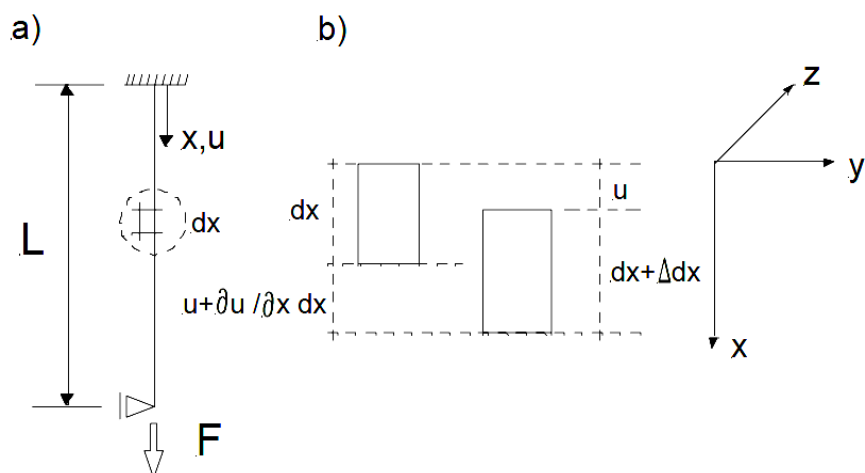
Sendo  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  versores nas direções dos eixos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente, o vetor do campo de deslocamentos pode ser escrito na forma:

$$d(x,y) = u(x)e_1 + v(y)e_2 \quad (1.2)$$

Nota-se que o vetor  $d$  está representado como uma função tanto de  $x$  como de  $y$ , uma vez que pode variar de ponto para ponto da barra.

Procurando-se descrever, numa primeira etapa, somente o alongamento longitudinal, considere-se um elemento infinitesimal de barra de comprimento  $dx$  (\*).

Na configuração deformada esse elemento passa a ter um acréscimo de comprimento  $\Delta dx$ . Esse acréscimo de comprimento resulta da variação do campo de deslocamentos axiais, conforme ilustra a figura 1.6.



**Figura 1.6 - Relação deslocamento-deformação axial**

Observando-se a figura 1.6b, e já cancelando a parcela comum  $u$ , segue que:

$$dx + \Delta dx = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1.3)$$

O quociente entre a variação de comprimento e o comprimento inicial do elemento, isto é, entre  $\Delta dx$  e  $dx$ , é denominado *deformação longitudinal específica* ou *medida linear da deformação*:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (1.4)$$

Combinando-se as (1.3) e (1.4), e observando-se da (1.2)

(\*) A consideração do elemento infinitesimal empresta generalidade à análise, podendo-se considerar uma variação contínua qualquer do campo de deslocamentos.

que  $u = u(x)$ , resultam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = u'(x) \\ dx + \Delta dx &= dx(1 + \varepsilon_x)\end{aligned}\tag{1.5 a,b}$$

A (1.5a) exprime uma relação direta entre deformação longitudinal e o deslocamento axial; a (1.5b), mostra que conhecido  $\varepsilon_x$  pode-se determinar o comprimento final do elemento.

Neste caso em estudo, como todos os pontos pertencentes a certa seção transversal possuem o mesmo deslocamento axial, conhecido o campo de deformações longitudinais ao longo do eixo é possível determinar a variação de comprimento total da barra pela seguinte integração:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \varepsilon_x dx\tag{1.6}$$

Quanto à deformação transversal responsável pelos efeitos de encurtamento ou alongamento na direção ortogonal ao eixo, pode-se chegar a uma medida linear para ela procedendo-se de forma análoga, considerando-se, agora, um elemento de comprimento  $dy$ .

Sendo, no caso  $\mathbf{v}$  a componente de interesse do deslocamento,  $\Delta dy$  a variação do comprimento inicial do elemento e  $\varepsilon_y$  a *deformação transversal específica* definida por  $\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$ ,

valem as relações:

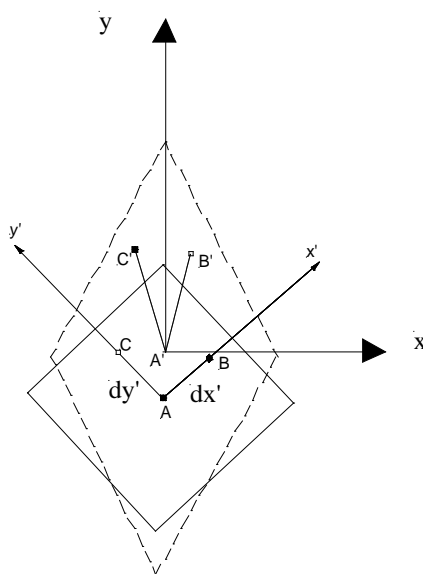
$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{dv}{dy} \\ dy + \Delta dy &= dy(1 + \varepsilon_y)\end{aligned}\tag{1.7}$$

Deve-se ressaltar que os elementos infinitesimais de barra até agora considerados possuem lados paralelos aos eixos de referência.

Entretanto, tomando-se um elemento retangular de lados  $dx'$

e  $dy'$  inclinados com relação àqueles eixos, o estudo da deformação apresenta um caráter mais geral, que será brevemente descrito no que segue e retomado oportunamente no capítulo das deformações.

Considere-se uma porção quadrangular de barra com lados paralelos aos eixos  $x'$  e  $y'$ , obtidos mediante uma rotação a partir dos eixos iniciais de referência  $x$  e  $y$ , conforme indicado na figura 1.7.



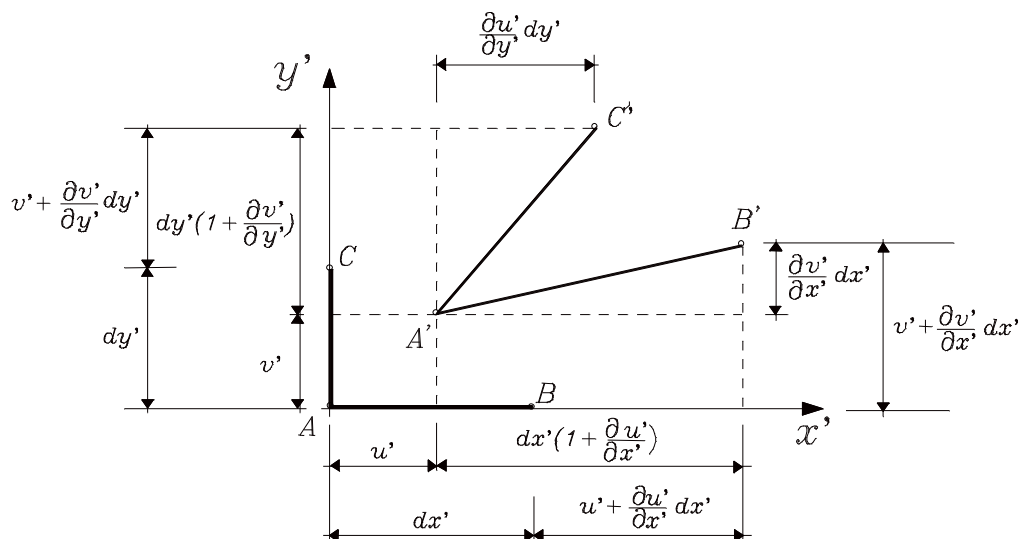
**Figura 1.7 - Deformação de um elemento de lados inclinados com relação ao eixo da barra**

Nessa porção destacam-se os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , de comprimentos  $dx'$  e  $dy'$ , respectivamente, posicionados sobre os eixos de referência na situação inicial e que passam às posições  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A'C'}$  na situação deformada.

Na figura 1.8 ilustra-se a relação entre as componentes de deformação e as componentes do campo de deslocamentos segundo as direções inclinadas. Nota-se que, agora,  $u' = u'(x', y')$  e  $v' = v'(x', y')$ .

Tomando-se inicialmente a direção de  $\overline{AB}$  como referência, pode-se definir uma deformação específica a ela associada pela seguinte relação:

$$\varepsilon'_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \quad (1.8)$$



**Figura 1.8 - Configuração Deslocada ou Deformada**

Empregando-se a geometria indicada na figura 1.8, pelo teorema de Pitágoras o segmento  $\overline{A'B'}$  resulta:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'}\right)^2} dx' \quad (1.9)$$

No entanto, é razoável admitir que o giro sofrido pelo segmento  $\overline{AB}$  seja pequeno <sup>(\*)</sup>, de modo que o comprimento  $\overline{A'B'}$  resulta praticamente igual à sua projeção no eixo  $\mathbf{x}'$ . Nessas condições segue que:

$$\overline{A'B'} = \left(1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}\right) dx' \quad (1.10)$$

e, portanto,

<sup>(\*)</sup>  $\arctg\left[\frac{\partial v'/\partial x'}{1 + \partial u'/\partial x'}\right] \leq 5^\circ$

$$\varepsilon'_x = \frac{dx'(1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) - dx'}{dx'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (1.11)$$

Fazendo-se uso dos mesmos argumentos, pode-se definir a deformação específica associada à direção de  $\overline{AC}$ , obtendo-se a seguinte relação:

$$\varepsilon'_{y'} = \frac{dy'(1 + \frac{\partial v'}{\partial y'}) - dy'}{dy'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \quad (1.12)$$

Há, finalmente, uma terceira medida, denominada *distorção angular*, que vem completar a caracterização da deformação local e tem o significado de variação do ângulo inicialmente reto entre as direções  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .

Com os elementos da figura 1.8 e considerando-se que na hipótese de giros pequenos a tangente do arco se confunde com o seno e com o próprio arco, tal medida (em radianos) pode ser expressa na seguinte forma:

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \quad (1.13)$$

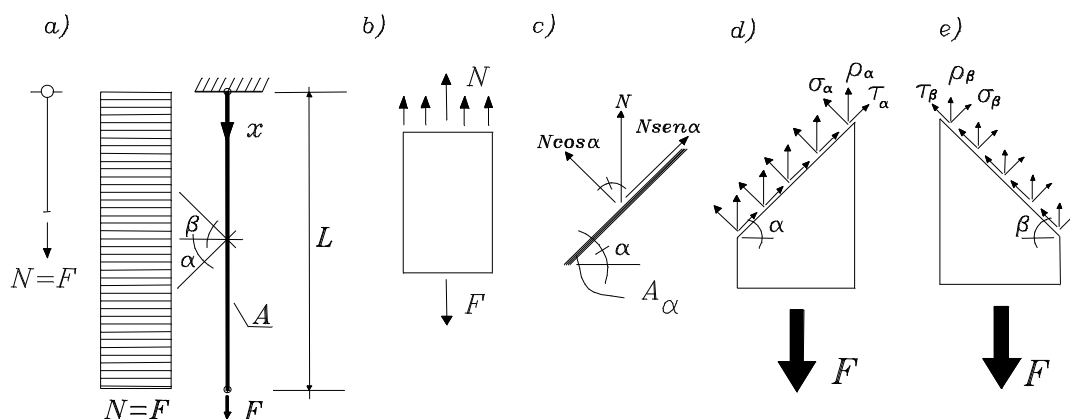
As (1.11), (1.12) e (1.13) compõem as relações deformação-deslocamento no regime de pequenas deformações.

Por convenção, as deformações específicas longitudinais são positivas quando a elas correspondem acréscimos de comprimento ( $\Delta L > 0$ ); a distorção angular é positiva quando a ela corresponde uma diminuição do ângulo inicialmente reto.

### 1.2.3 Determinação das tensões: relações de equilíbrio

Passando, então, a uma análise do efeito do carregamento externo em termos de esforços gerados internamente, nota-se que

em qualquer seção obtida por um corte segundo um plano ortogonal ao eixo, haverá um esforço normal  $\mathbf{N}$  de valor constante e igual à força aplicada  $\mathbf{F}$ ; o diagrama de força normal ilustra a sua distribuição ao longo do comprimento da barra (v.fig.1.9a).



**Figura 1.9 - Tensões segundo diferentes planos definidos num ponto da barra tracionada**

Observando-se, por outro lado, o equilíbrio um segmento de barra obtido por uma seção ortogonal ao eixo, em posição qualquer a partir da extremidade livre da barra, a resultante de uma distribuição de tensões normais existentes em cada um dos pontos da seção transversal (v.fig.1.9b), define um esforço normal matematicamente definido pela seguinte relação:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (1.14)$$

Em coerência com o modelo de deformação admitido para a barra, conclui-se que as tensões normais possuem uma distribuição *constante* ao longo da seção, de modo que, nessas condições, a relação (1.14) fornece:

$$N = \sigma_x A \quad (1.15)$$

Como o carregamento externo produz na seção uma força normal com intensidade igual a  $F$ , segue daí uma relação para o



cálculo da tensão normal num ponto qualquer da barra, segundo um plano ortogonal ao eixo:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \quad (1.16)$$

A (1.16) é, de fato, uma relação de equilíbrio, pois mostra que a resultante das tensões ( $\sigma_x A$ ) deve ser igual à força externa aplicada  $F$ .

O sinal da tensão  $\sigma_x$  é convencionalmente positivo quando a ação da força normal aplicada for de tração sobre a barra e negativo quando a força normal for de compressão.

Observa-se, também, que coerentemente com o mesmo modelo de deformação, não existem tensões de cisalhamento nos pontos da seção em questão; sua existência somente poderia ser justificada se houvesse tendência ao escorregamento relativo horizontal entre as partes da barra adjacentes ao plano da seção.

Por outro lado, com relação a outra seção genérica, agora de área  $A_\alpha$ , obtida por um plano inclinado em relação ao eixo da barra, o esforço normal passa a ter componentes segundo direções normal e paralela ao plano (v.fig.1.9c).

Analogamente ao desenvolvimento anterior, as componentes do esforço normal podem ser definidas como resultantes das tensões normal e de cisalhamento; conseqüentemente, em cada um dos pontos da seção haverá um vetor de tensão, de direção axial e valor  $\rho_\alpha$ , que se decompõe numa componente normal  $\sigma_\alpha$  e numa de cisalhamento  $\tau_\alpha$  (v.fig.1.9d). Valem, portanto, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_\alpha} \rho_\alpha dA_\alpha \\ N \cos \alpha &= \int_{A_\alpha} \sigma_\alpha dA_\alpha \\ N \sin \alpha &= \int_{A_\alpha} \tau_\alpha dA_\alpha \end{aligned} \quad (1.17a, b, c)$$

Tendo-se em vista que a relação entre as áreas até agora definidas no estudo pode ser colocada na forma:  $A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}$ , as (1.17) fornecem expressões para o cálculo das componentes de tensão no ponto, segundo um plano qualquer, em função do valor da tensão normal  $\sigma_x$ , determinada diretamente pela (1.16), e do ângulo de inclinação do plano com relação à horizontal.

Assim sendo resultam:

$$\rho_\alpha = \frac{N \cos\alpha}{A} = \sigma_x \cos\alpha$$

$$\sigma_\alpha = N \cos\alpha \frac{\cos\alpha}{A} = \sigma_x \cos^2\alpha \quad (1.18a, b, c)$$

$$\tau_\alpha = N \operatorname{sen}\alpha \frac{\cos\alpha}{A} = \sigma_x \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

Há, a rigor, neste caso, uma convenção de sinal a ser definida. Notando-se que o ângulo  $\alpha$  adotado como referência e indicado na figura 1.9a, é também igual ao ângulo entre a normal ao plano e o eixo da barra, convencionou-se que este será positivo quando marcado, em sentido anti-horário, do eixo para a normal. Assim sendo, de um modo geral, as componentes de tensão terão seus sinais definidos em função do sinal da tensão  $\sigma$  e do ângulo  $\alpha$ .

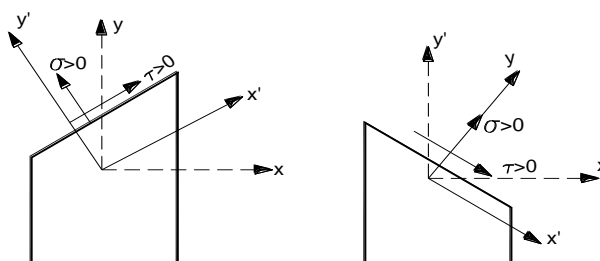
Resta introduzir, contudo, outra convenção, que é aquela que permite representar numa figura, sobre o traço do plano considerado, os sentidos das componentes de tensão uma vez conhecidos seus valores e sinais.

Quanto à componente de tensão normal a regra é simples: se for de tração (com sinal positivo) seu vetor representativo sairá do plano; enquanto que se for de compressão (sinal negativo), tal vetor apontará para o plano.

No caso das componentes de cisalhamento é necessário ter em vista um sistema cartesiano dextrorso local e levar em conta o sentido positivo da tensão normal.

O sistema local é obtido a partir de um sistema global clássico, formado por eixos  $\mathbf{x}$  na horizontal e  $\mathbf{y}$  na vertical, fazendo-se girar o eixo  $\mathbf{y}$  de modo a coincidir com a direção da normal ao plano considerado.

Observando-se, então, o sentido do vetor da tensão normal de tração previamente marcado na figura com relação ao traço do plano, ele deverá coincidir com o do eixo local que lhe corresponde (ou lhe é paralelo), então o sentido do vetor representativo da tensão de cisalhamento *positiva* deverá coincidir com o do outro eixo, que lhe corresponde.



**Figura 1.10 - Convenção de sinal**

Analisando-se a figura 1.10 que procura ilustrar essa convenção, conclui-se que a tensão de cisalhamento positiva percorre a seção inclinada em sentido horário.

À parte as questões de convenção, diz-se que as (1.18) permitem determinar o *estado de tensão* no ponto. Observa-se, por outro lado, que as mesmas relações definem funções contínuas com  $\alpha$ , de maneira que é possível realizar uma pesquisa de seus valores extremos. É imediato verificar que  $\alpha = 0^\circ$  leva a  $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_x$ , enquanto que a tensão normal mínima tem valor nulo e é encontrada para  $\alpha = \pm \pi/2$ .

Os valores extremos de tensão normal são chamados de tensões principais e os planos correspondentes de planos principais. Nota-se que segundo os planos principais as tensões de cisalhamento são nulas.

Já a busca por valores extremos da tensão de cisalhamento faz uso da primeira derivada da (1.18c):

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} &= \sigma_x \cos^2 \alpha - \sigma_x \sin^2 \alpha \\ &= \sigma_x \cos 2\alpha\end{aligned}\tag{1.19}$$

A relação anterior se anula para  $\alpha = \pm\pi/4$  ou  $\pm 45^\circ$ , valores que definem inclinações das normais aos planos de máximo ou mínimo cisalhamento; substituindo-se esses valores na (1.18c)

$$\text{resultam: } \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \text{ e } \tau_{\min} = -\frac{\sigma_x}{2}.$$

Desde já vale a pena adiantar o seguinte comentário: em termos físicos o mais importante é o valor em módulo da tensão de cisalhamento, uma vez que se admite que a resistência ou resposta que os materiais exibem a essa solicitação independe do seu sentido. Essa *simetria* de resposta não se verifica no caso das tensões normais, havendo materiais, como por exemplo, o concreto, que se mostram menos resistentes à tração que à compressão (\*).

Outra análise interessante decorre da determinação das componentes de tensão segundo um plano ortogonal àquele definido por  $\alpha$ . Esse plano está indicado na figura 1.9e) pelo ângulo  $\beta$  e, segundo ele, as componentes de tensão podem ser calculadas pelas relações:

$$\rho_\beta = \frac{N \cos \beta}{A} = \sigma_x \cos \beta\tag{1.20}$$

$$\sigma_\beta = N \cos \beta \frac{\cos \beta}{A} = \sigma_x \cos^2 \beta\tag{1.21}$$

$$\tau_\beta = N \sin \beta \frac{\cos \beta}{A} = \sigma_x \sin \beta \cos \beta\tag{1.22}$$

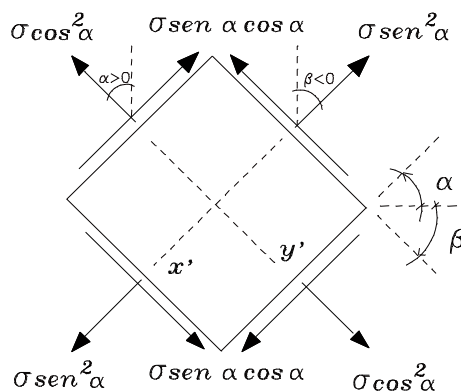
---

(\*) As hipóteses sobre a resposta dos materiais serão discutidas oportunamente.

Nota-se que de acordo com a convenção adotada para o ângulo,  $\tau_\beta$  acabará tendo sinal negativo.

Lembrando que  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos complementares, segue que  $\cos\alpha = \sin\beta$  e, portanto, conclui-se que segundo planos ortogonais as tensões de cisalhamento são iguais em módulo.

A figura seguinte ilustra simultaneamente as componentes de tensão segundo cada um dos lados dos dois planos ortogonais considerados, tendo seus sentidos marcados, considerando-se os seus sinais, de acordo com a convenção anteriormente definida.



**Figura 1.11 - Tensões segundo planos inclinados com relação ao eixo e ortogonais entre si**

A situação anterior tem correspondência com a deformação ilustrada na figura 1.7.

#### 1.2.4 Estudo das relações constitutivas tensão-deformação em regime elástico

Como já comentado anteriormente, as relações tensão-deformação devem, necessariamente, envolver parâmetros que permitam particularizá-las de acordo com as características do meio em estudo, uma vez que um mesmo nível de deformação pode gerar tensões com intensidades diferentes de material para

material. Por essa razão as relações tensão-deformação são denominadas *relações constitutivas*.

É de interesse que as relações constitutivas sejam dadas por expressões matemáticas simples, que envolvam um número pequeno de parâmetros e que, ainda, sejam representativas do comportamento real. Isto é possível adotando-se determinadas restrições, ou limitações, sobre os campos de deformação e de tensão.

Assim, diz-se, por exemplo, que o meio tem comportamento *elástico* se as deformações forem totalmente reversíveis num ciclo de carregamento-descarregamento. A resposta dita *elástica-linear* é ainda mais simples e implica numa relação de proporcionalidade entre tensão e deformação.

No caso em estudo, da barra submetida a tração uniaxial, a relação que exprime um comportamento elástico-linear do material envolve a deformação específica longitudinal  $\varepsilon_x$  e a tensão normal  $\sigma_x$ , podendo ser colocada na forma:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.23)$$

onde  $E$  é uma constante que caracteriza o material, denominada *módulo de elasticidade longitudinal*.

A relação anterior constitui a representação da chamada Lei de Hooke e possui um caráter local, uma vez que  $\varepsilon_x$  e  $\sigma_x$  são medidas associadas a um ponto do meio segundo um plano ortogonal ao eixo da barra.

Uma observação importante é que de fato a maioria dos materiais de uso na prática de engenharia exhibe uma resposta elástica-linear, pelo menos em correspondência a níveis mais baixos de sollicitação.

Mantendo-se nos limites do comportamento elástico-linear, um aspecto importante a observar é que a relação entre as deformações específicas, longitudinal ( $\varepsilon_x$ ) e transversal ( $\varepsilon_y$ ), também pode ser colocada em termos proporcionais, envolvendo

outra constante do material denominada *coeficiente de Poisson*. Levando-se em conta que no regime de comportamento em consideração tais deformações específicas possuem sinais contrários (ao alongamento numa direção corresponde encurtamento na outra), a relação entre elas resulta:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= -\nu \varepsilon_x \\ &= -\nu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}\tag{1.24}$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Neste ponto é oportuno comentar um aspecto de natureza mais geral que será retomado no capítulo das relações constitutivas elásticas.

Tendo-se em vista que num ponto da barra segundo o sistema de referência  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$ , indicado na figura 1.11, existem componentes de tensão  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$  e componentes de deformação  $\varepsilon_{x'}$ ,  $\varepsilon_{y'}$  e  $\gamma_{x'y'}$ , as relações constitutivas são mais complexas e podem ser escritas, em parte, observando-se uma superposição de efeitos.

Assim, por exemplo,  $\varepsilon_{x'}$  resulta tanto por efeito direto de  $\sigma_{x'}$  quanto indireto de  $\sigma_{y'}$ ; da mesma forma pode-se pensar com respeito à deformação  $\varepsilon_{y'}$ . Uma simplificação importante resulta se o material apresentar *isotropia*, isto é: *as mesmas propriedades segundo quaisquer direções tomadas no ponto*; nesse caso, as relações entre tensão e deformação envolverão somente as mesmas constantes  $E$  e  $\nu$ .

Ainda fazendo-se uso da hipótese de isotropia, a relação entre  $\tau_{x'y'}$  e  $\gamma_{x'y'}$  é independente daquelas que envolvem as componentes de tensão normal e deformação linear. Para essa relação também se estabelece uma proporcionalidade válida sempre que o material se apresente em regime elástico-linear.

Finalmente, as relações constitutivas podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \frac{1}{E} [\sigma_{x'} - \nu \sigma_{y'}] \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{1}{E} [\sigma_{y'} - \nu \sigma_{x'}] \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\tau_{x'y'}}{G}\end{aligned}\tag{1.25 a,b,c}$$

onde  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  é denominado módulo de elasticidade transversal<sup>(\*)</sup>.

A independência das relações anteriores pode ser interpretada do seguinte modo: as tensões normais não provocam distorções ou deformações angulares e, por outro lado, as tensões de cisalhamento não provocam deformações lineares. Diz-se, ainda, que as distorções estão associadas a variações de forma dos elementos e as deformações lineares ( $\varepsilon$ ) a variações de volume.

### 1.2.5 O problema de análise estrutural e a identificação paramétrica

Voltando à questão da barra submetida a carregamento axial e vinculação ambos conhecidos, o chamado *problema de análise estrutural* consiste em determinar os campos de deslocamento, deformação e de tensão em qualquer um de seus pontos.

Tendo-se em vista que esse problema pode ser formulado em campo unidimensional, devido à hipótese cinemática e ao regime de comportamento elástico-linear adotados, a sua resposta pode ser encontrada a partir da combinação das relações de compatibilidade (1.5a), equilíbrio (1.14) e constitutiva (1.23).

Dessa forma, combinando-se as relações de compatibilidade e constitutiva, resultam:

---

<sup>(\*)</sup> A dedução dessa relação será feita no capítulo sobre modelos constitutivos.



$$\varepsilon_x = u'(x) \rightarrow \sigma_x = E \varepsilon_x = E u'(x) \quad (1.26)$$

onde  $u'(x) = \frac{du(x)}{dx}$ . Introduzindo-se, a relação de equilíbrio, segue que:

$$N = \int_A \sigma_x dA = E u' \int_A dA = E u' A \quad (1.27)$$

$$\therefore u' = \frac{N}{EA} = \frac{F}{EA} \quad (1.28a)$$

que é a equação diferencial fundamental do problema, com condição de contorno expressa no deslocamento  $u$ .

Por outro lado, considerando-se a definição dada a  $\varepsilon_x$  pela (1.4), a (1.28a) fornece uma relação para a determinação direta do acréscimo de comprimento da barra. De fato:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{EA} \quad (1.28b)$$

e denotando-se  $\Delta L = \int_0^L \Delta dx$ , resulta

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} dx = \frac{NL}{EA} \quad (1.29a)$$

lembrando que no caso particular em estudo, a relação  $\frac{N}{EA}$  se mantém constante ao longo do comprimento da barra.

Aliás, a última expressão tem analogia formal com um resultado conhecido da mecânica. Trata-se do deslocamento do ponto de aplicação de uma força  $N$  numa mola com constante de rigidez  $c$ . Denotando-se por  $\Delta L$  tal deslocamento, a expressão para calculá-lo é:  $\Delta L = \frac{N}{c}$ . No caso em estudo, a barra poderia

ser interpretada como uma mola de rigidez  $c = \frac{EA}{L}$ , de onde resultaria a relação (1.29a).

Voltando à análise da barra, combinando-se a (1.29a) e (1.28b), segue uma forma particular para o cálculo de  $\varepsilon_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N}{EA} = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.29b)$$

A (1.29b) sugere que a identificação de valores para o módulo de elasticidade longitudinal pode ser feita em laboratório, ensaiando-se barras a tração uniaxial controlada e medindo-se, simultaneamente, valores de  $N$  e  $\Delta L$ .

Nessa experimentação, a força é aplicada em etapas; tomam-se, então, medidas dos diferentes níveis de força de tração aplicada e das correspondentes variações de comprimento da barra. Dividindo-se essas medidas, respectivamente, pelos valores iniciais da área da seção transversal e do comprimento, determinam-se as tensões normais e deformações específicas longitudinais em cada etapa.

Os pares de valores de tensão-deformação assim obtidos podem ser colocados em gráfico, resultando uma curva que representa a resposta do material. Teoricamente, o valor da tangente na origem à curva obtida define o valor de  $E^{(*)}$ .

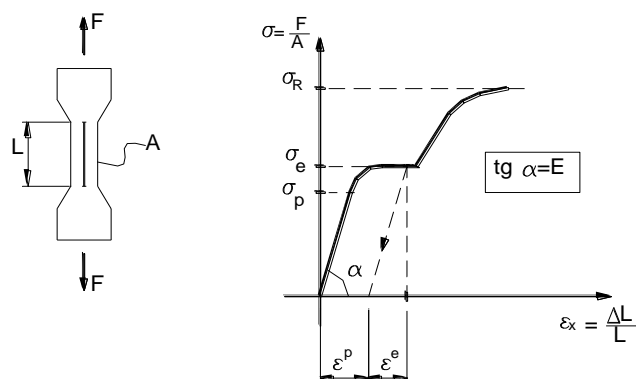
A figura 1.12 ilustra o procedimento de identificação comentado para o caso do aço doce, observando-se que a maioria dos materiais apresenta um trecho inicial reto característico do comportamento elástico-linear.

No caso ilustrado, o trecho linear é limitado por um valor de tensão normal dito *tensão de proporcionalidade* ( $\sigma_p$ ), enquanto que todo o regime elástico (que pode envolver uma parte não-linear) é limitado pela *tensão de escoamento* ( $\sigma_e$ ). A partir desse limite segue um regime de resposta *elasto-plástica*,

---

(\*) Em alguns materiais como o concreto a determinação de  $E$  segue norma específica.

caracterizado pelo aparecimento de deformações irrecuperáveis ( $\varepsilon^p$ ), que constituem parte da deformação total e que podem ser identificadas ao final de um ciclo de carregamento-descarregamento.



**Figura 1.12 - Representação esquemática do resultado do ensaio de tração no aço doce**

Nota-se, ainda, que no âmbito da resposta elasto-plástica ilustrada, o material apresenta um regime dito *elasto-plástico perfeito* no qual há um acréscimo das deformações mantendo-se constante o nível de tensão normal, e um regime *elasto-plástico com encruamento* no qual o acréscimo de deformação se dá com acréscimo de tensão. A intensidade máxima de tensão suportada pelo material é denominada, por convenção, *tensão de ruptura* ( $\sigma_R$ ).

Finalmente, observa-se que a integração da (1.28a) pode contemplar uma situação de  $N/EA$  variável. No entanto, com esse propósito, é também possível generalizar a (1.28a) para uma forma que considere tal variação. Assim, reescrevendo-se a (1.28a) como:

$$N(x) = EA(x)u'(x) \quad (1.30)$$

Por derivação da relação anterior resulta:

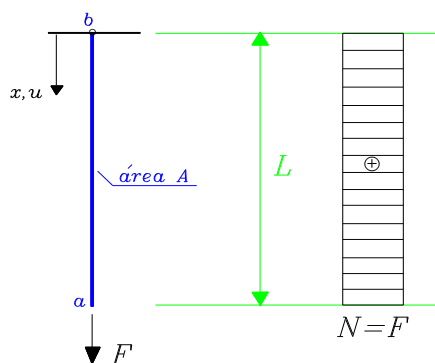
$$\frac{dN}{dx} = EA(x)u''(x) + u'(x)\frac{d}{dx}(EA) \quad (1.31)$$

A (1.31) é a forma mais geral da relação de equilíbrio, sendo as condições de contorno impostas sobre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$ .

**Exemplo 1:** Considere-se uma barra prismática (de seção transversal constante), fixa numa extremidade e livre na outra, sujeita a uma força concentrada de tração ( $\mathbf{F}$ ) na extremidade livre (v.fig.1.13). Admitindo-se que o seu material apresente um trecho de resposta elástica-linear limitado por uma tensão de proporcionalidade  $\sigma_p = 10\text{kN/cm}^2$ , determinar:

- O valor da força máxima que se pode aplicar de modo que a resposta da barra permaneça elástica-linear;
- O deslocamento axial na extremidade livre para a força máxima.

Dados complementares:  $\mathbf{E} = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\mathbf{A} = 2 \text{ cm}^2$ ;  $\mathbf{L} = 200 \text{ cm}$ .



**Figura 1.13 - Barra prismática tracionada**

**a-) Determinação de  $F_{\text{máx}}$**

Tendo-se em vista que se trata de um sistema isostático, por equilíbrio conclui-se que ao longo de seu comprimento a barra está submetida a uma força normal constante de valor  $\mathbf{F}$ .

Assim sendo, em qualquer um de seus pontos a tensão normal na direção axial é determinada por:

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

O valor máximo para a força aplicada resulta da condição de que a tensão normal não exceda o valor de proporcionalidade:

$$\frac{F}{A} \leq 10 \rightarrow F \leq 10.2 \quad \therefore F_{\text{máx}} = 20 \text{ kN}$$

**b-) Determinação de  $u(L)$**

A integração da equação diferencial (1.28a) fornece uma expressão geral para o campo de deslocamentos:

$$u(x) = \frac{F x}{EA} + C_1$$

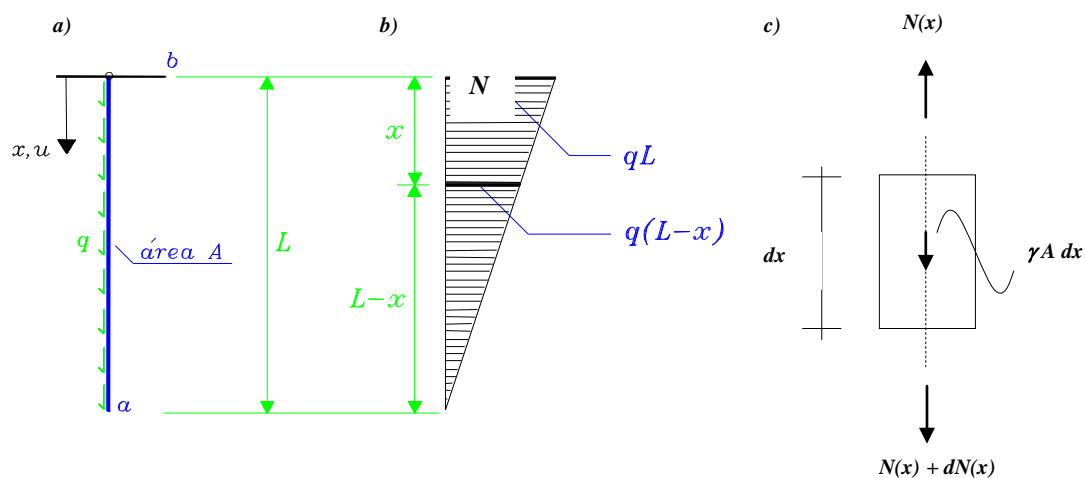
Impondo-se, então, a condição de contorno, obtém-se:

$$p/ \ u(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow u(x) = \frac{F x}{EA}$$

Finalmente o valor do deslocamento procurado resulta:

$$p/ \ x = 200 \text{ cm} \rightarrow u(200) = \frac{20.200}{20000.2} = 0,1 \text{ cm}$$

**Exemplo 2:** Trata-se de uma barra prismática sujeita a uma força axial distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento (v.fig.1.14). Pede-se determinar as expressões da máxima tensão normal e do deslocamento axial na extremidade livre.



**Figura 1.14 - Barra prismática com carga axial distribuída**

**a-) Determinação de  $u(L)$**

A expressão do deslocamento na extremidade livre resulta da integração da equação diferencial (1.31), pois a força normal tem distribuição linear ao longo do comprimento, conforme ilustra o diagrama da figura 1.14.

Como nesse caso o produto  $EA$  é constante no comprimento, aquela equação resulta:

$$u'' = \frac{1}{EA} \frac{dN}{dx} = \frac{1}{EA} \frac{d[q(L-x)]}{dx} \rightarrow$$

$$EAu'' = -q \quad \therefore \quad u'(x) = -\frac{q}{EA}x + C_1 \quad ; \quad u(x) = -\frac{q}{2EA}x^2 + C_1x + C_2$$

Impondo-se as condições de contorno:  $u(0)=0$  e  $EAu'(L)=0$  as constantes podem ser determinadas. Nota-se que a segunda condição de contorno reflete o fato de que na extremidade livre a força normal é nula, isto é:  $N(L)=EAu'(L)=0$ .

Finalmente, determinando-se as condições de contorno, o campo de deslocamentos fica expresso por:

$$u(x) = \frac{qLx}{EA} - \frac{qx^2}{2EA}$$

e, em particular, o deslocamento na extremidade livre resulta:

$$u(L) = \frac{qL^2}{2EA}$$

É interessante observar que a carga  $q$  pode ser interpretada como a representação do peso próprio da barra prismática, cujo valor é então determinado pelo produto do peso específico  $\gamma$  pela área da seção transversal  $A$ . Nessas condições, pode-se exprimir o deslocamento da extremidade livre em função do peso específico na forma:

$$u(L) = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

**b-) Determinação de  $\sigma_{m\acute{a}x}$  :**

Empregando-se as relações de compatibilidade e constitutiva, obtém-se, de uma forma geral:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = Eu'$$

A tensão normal máxima se obtém na seção onde a força normal é também máxima. Assim, considerando-se que:

$$u'(x) = \frac{qL}{EA} - \frac{qx}{EA}$$

conclui-se que a tensão máxima ocorre em ( $x = 0$ ). Portanto, após as devidas substituições:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{qL}{A}$$

Os dois exemplos anteriores ilustram a aplicao do modelo te3rico formulado na an3lise de barras isoladas que constituem estruturas isost3ticas. Mas o modelo pode tamb3m ser estendido aos sistemas hiperest3ticos compostos por barras.

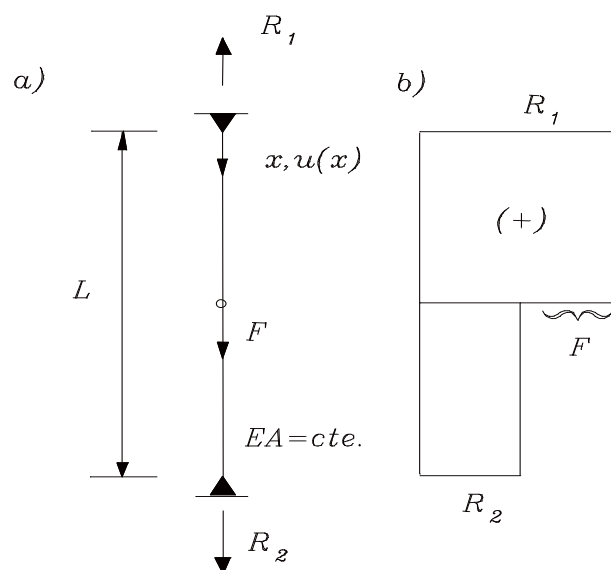
3 importante observar que a resoluo de sistemas hiperest3ticos pode ser conduzida por mais de um procedimento, dependendo do modo como se combinam as relaes de equil3brio, compatibilidade e constitutiva.

Assim, no pr3ximo exemplo, numa primeira forma de resoluo, procede-se de acordo com os moldes anteriores, isto 3: integra-se a equao diferencial para a obteno do campo de deslocamentos. Uma vez conhecidos os deslocamentos, determinam-se as deformaes, tens3es e a distribuo de foras normais nas barras.

A segunda forma de resoluo fundamenta-se no chamado *Processo dos Esforos*, tendo como caracter3stica fundamental o fato que as foras normais nas barras constituem as inc3gnitas b3sicas. Uma vez conhecidas essas foras, determinam-se as tens3es, deformaes e deslocamentos.

**Exemplo 3:** Trata-se de uma barra prism3tica, com produto de rigidez **EA** constante ao longo de seu comprimento **L**, fixa nas suas extremidades e submetida 3 ao de uma fora axial **F** aplicada no ponto m3dio de seu eixo (v.fig.1.15a). Pede-se determinar a distribuo de foras normais nas barras.





**Figura 1.15 - Barra com extremidades fixas**

A ação da força  $F$  produz reações  $R_1$  e  $R_2$  nas extremidades vinculadas. Essas reações são, em princípio, incógnitas, e, como tais, para elas podem-se adotar sentidos quaisquer, que serão posteriormente corrigidos pela própria resolução do problema.

Na verdade, em muitos casos, como este, os sentidos das reações poderiam ser previamente identificados mediante uma avaliação lógica da resposta esperada do sistema em correspondência ao sentido da força aplicada. No entanto, na resolução que segue opta-se por adotar sentidos de tração sobre a barra, como os indicados na fig.1.15a), não só porque são aqueles convencionados como positivos, mas também porque nessas condições os sinais que resultarem ao final dos cálculos além de servirem para confirmar ou corrigir os sentidos adotados, também indicarão diretamente o tipo da ação gerada: tração ou compressão.

Levando-se em conta os sentidos adotados, a barra passa a ser submetida a uma distribuição de força normal constante por partes, de valores  $R_1$  e  $R_2$ , e com um salto de valor  $F$  na seção intermediária, conforme ilustra a figura 1.15b).

**a) Primeiro procedimento de resolução:**

A equação diferencial (1.28a) pode ser integrada, em forma indefinida, em cada um dos trechos apresentando os seguintes resultados:

$$u_1(x) = \frac{R_1 x}{EA} + C_1 \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$u_2(x) = \frac{R_2 x}{EA} + C_2 \quad L/2 \leq x \leq L$$

onde  $x$  tem origem na extremidade superior e os índices inferiores referem-se aos trechos da barra.

As constantes podem ser determinadas pela imposição das condições de contorno:

$$p/x=0 \rightarrow u_1(0)=0 \quad \therefore C_1=0$$

$$p/x=L \rightarrow u_2(L)=0 \quad \therefore C_2 = -\frac{R_2 L}{EA}$$

Há, no entanto, uma terceira condição a ser introduzida. Trata-se de condição que impõe a continuidade dos deslocamentos, ou ainda a sua *compatibilidade*, em  $L/2$ . Impondo-se tal condição, determina-se uma relação entre as reações incógnitas:

$$p/x=L/2 \rightarrow u_1(L/2)=u_2(L/2) \quad \therefore R_1 = -R_2$$

A resolução se completa com a imposição da condição de equilíbrio global de forças:

$$R_1 - F - R_2 = 0 \quad \therefore R_1 = \frac{F}{2} ; R_2 = -\frac{F}{2}$$

Assim sendo,  $R_1$  tem seu sentido e ação confirmados, uma vez que resultou com sinal positivo; já  $R_2$  é na verdade uma força de compressão sobre a barra.

Em conseqüência dos valores obtidos para as reações, os campos de deslocamentos assumem as formas:

$$u_1(x) = \frac{Fx}{2EA} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$u_2(x) = \frac{F(L-x)}{2EA} \quad L/2 \leq x \leq L$$

Tomando-se a primeira derivada dos campos de deslocamentos podem-se determinar os campos de deformações, de tensões e de força normal, respectivamente:

$$\varepsilon_1(x) = \frac{F}{2EA} \quad (0 \leq x \leq L/2); \quad \varepsilon_2(x) = -\frac{F}{2EA} \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

$$\sigma_1(x) = \frac{F}{2A} \quad (0 \leq x \leq L/2); \quad \sigma_2(x) = -\frac{F}{2A} \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

$$N_1(x) = \frac{F}{2} \quad (0 \leq x \leq L/2); \quad N_2(x) = -\frac{F}{2} \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

**b) Segundo procedimento de resolução:**

A resolução deste exemplo pelo Processo dos Esforços parte da condição de equilíbrio global:  $R_1 - F - R_2 = 0$ .

Por essa condição conclui-se ser o sistema uma vez hiperestático, visto que a única equação de equilíbrio envolve duas incógnitas. A metodologia do procedimento em questão consiste em gerar uma equação relacionando as mesmas incógnitas; tal relação, combinada com a de equilíbrio, permite determinar as reações univocamente.

A relação adicional surge necessariamente de uma condição de compatibilidade sobre o campo de deslocamentos. Dadas as características do problema em análise, pode-se construir a condição de compatibilidade tomando-se como referência um dos pontos de vinculação, nas extremidades, ou mesmo o ponto central da barra.

Escolhendo-se, por exemplo, o ponto da extremidade inferior, a condição de compatibilidade afirma que o deslocamento vertical daquele ponto deve ser nulo. A maneira de se impor essa condição é entender que o deslocamento vertical

total é composto pela soma de uma parcela devida à força  $F$  com outra devida a  $R_2$ ; na verdade,  $R_2$  tem intensidade tal que provoca uma parcela de deslocamento que anula aquela devida a  $F$ .

Como estratégia de resolução propõe-se imaginar que o ponto em tela esteja livre para se deslocar, suprimindo-se artificialmente o vínculo ali existente, porém mantendo-se a força de reação. Observa-se, por outro lado, que o deslocamento do ponto, agora livre, coincide em valor com o acréscimo de comprimento de toda a barra submetida à ação da força  $F$  e da reação  $R_2$ .

Para o cálculo do acréscimo de comprimento da barra vale então uma superposição de efeitos, ou seja: cada uma das parcelas pode ser determinada pela aplicação direta da (1.29), ressaltando que ela se aplica nos trechos onde a relação  $\frac{N}{EA}$  se mantém constante.

Para orientar a aplicação da (1.29), é útil traçar separadamente os diagramas de força normal da barra submetida à força  $F$  e à  $R_2$ , estando, é claro, a extremidade inferior livre.

O acréscimo total de comprimento da barra resulta:

$$\Delta L = u(L) = \frac{FL}{2EA} + \frac{R_2 L}{EA}$$

Impondo-se que tal deslocamento seja nulo, obtém-se a relação adicional procurada.

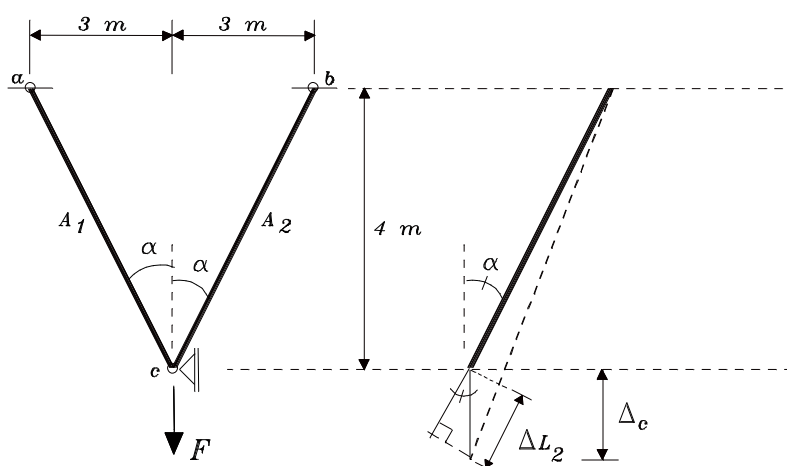
Pela resolução do sistema resultante segue, finalmente, que:

$$R_2 = -\frac{F}{2} ; R_1 = \frac{F}{2} \quad .\square$$

Nas aplicações que seguem faz-se uso somente do Processo dos Esforços. Também é bom enfatizar que sempre está sendo empregada a hipótese de pequenos deslocamentos, em virtude das simplificações que dela decorrem e que permitem encaminhar a

resolução de modo mais simples. Tal hipótese, aliás, de fato se mostra verdadeira num vasto campo de aplicações práticas.

**Exemplo 4:** Neste caso, a estrutura hiperestática é composta por duas barras prismáticas com áreas de seção transversal  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente, dispostas simetricamente com relação a um eixo vertical e unidas numa das extremidades (nó  $c$ ) compondo uma treliça plana, conforme ilustrado na figura 1.16.



**Figura 1.16 - Treliça Plana / Nó C vinculado**

O nó está vinculado ao meio externo por um apoio móvel e submetido à ação de uma força de direção vertical  $F$ . O equilíbrio do nó  $c$  é expresso pelas seguintes relações:

$$(N_1 + N_2) \cos \alpha = F$$

$$(N_1 - N_2) \sin \alpha = H$$

onde  $N_1$ ,  $N_2$  são as forças normais nas barras e  $H$  representa a reação do apoio móvel.

Nota-se que as duas relações de equilíbrio reúnem três incógnitas, caracterizando-se um sistema uma vez hiperestático. É, portanto, necessário obter uma terceira relação, envolvendo as mesmas incógnitas, para que se possa determiná-las de modo unívoco. Tal relação surge de uma condição de *compatibilidade*,

que reflete o efeito da vinculação que o nó  $c$  introduz no sistema.

De fato, o deslocamento vertical do nó  $c$  ( $\Delta_c$ ) impõe acréscimos de comprimentos a cada uma das barras ( $\Delta L_1$  e  $\Delta L_2$ , respectivamente) *que devem se manter unidas* na situação deslocada. Fazendo-se uso da hipótese de pequenos deslocamentos, esses acréscimos de comprimento podem ser visualizados projetando-se o deslocamento  $\Delta_c$  na direção inicial de cada uma das barras (v.fig.1.16b).<sup>(\*)</sup>

Vale, portanto, a seguinte relação de compatibilidade:

$$\Delta_c = \frac{\Delta L_1}{\cos \alpha} = \frac{\Delta L_2}{\cos \alpha}$$

Por outro lado, como o esforço normal em cada uma das barras é constante, os seus acréscimos de comprimento são determinados diretamente por:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L}{E A_1} ; \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{E A_2}$$

Combinando-se, então, essas relações com a de compatibilidade resulta:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2}$$

que fornece a terceira condição envolvendo  $N_1$  e  $N_2$ .

Com a finalidade de introduzir valores numéricos, considere-se o seguinte conjunto de dados:  $F = 48$  kN,  $E = 20000$  kN/cm<sup>2</sup> e  $A_1 = 2A_2 = 4,0$  cm<sup>2</sup>. Nessas condições resultam:

---

<sup>(\*)</sup> A rigor a hipótese de pequenos deslocamentos já foi utilizada nas relações de equilíbrio, confundindo-se a configuração equilibrada com a inicial ao se tomar o ângulo  $\alpha$ .

$$N_1 = 2N_2 \rightarrow (2N_2 + N_2) \cos \alpha = F$$

$$\therefore N_2 = \frac{F}{2,4} = 20 \text{ kN} ; N_1 = \frac{F}{1,2} = 40 \text{ kN}$$

Seguem daí os cálculos das tensões normais em cada uma das barras e do deslocamento vertical do nó *c*.

$$\text{barra 1 : } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

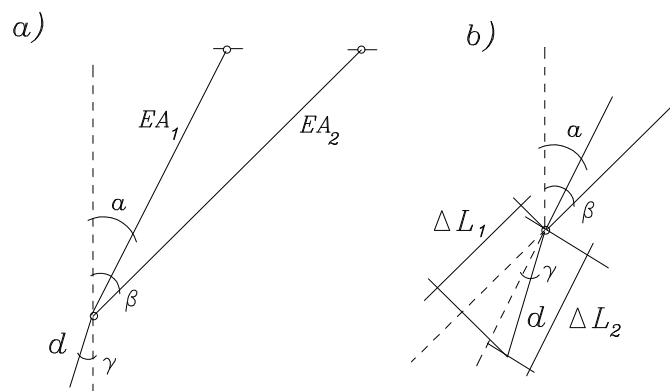
$$\text{barra 2 : } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta_c = \frac{10 \cdot 500}{20000 \cdot 0,8} \cong 0,31 \text{ cm}$$

Deve-se observar, finalmente, que se  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$  a reação horizontal  $\mathbf{H}$  se anula.

Numa situação mais geral, o sistema de barras pode não apresentar qualquer simetria e pode ser ainda de interesse determinar as componentes horizontal e vertical do deslocamento do ponto de ligação entre as barras, quando este não tiver uma vinculação imposta com o meio externo. O exemplo que segue trata justamente da determinação das componentes do deslocamento num sistema isostático com tais características, enfatizando-se a questão da compatibilidade.

**Exemplo 5:** Duas barras com produtos de rigidez constantes, mas diferentes entre si, estão dispostas com ângulos de inclinação  $\alpha$  e  $\beta$  com relação à vertical (v.fig.1.17). Pede-se determinar expressões para o cálculo das componentes vertical e horizontal do deslocamento do ponto de união entre as barras.



**Figura 1.17 - Barras inclinadas em disposição não simétrica**

Conforme ilustra a figura 1.17, admite-se, genericamente, que o deslocamento em questão tenha intensidade  $d$  e se realize segundo uma direção inclinada de um ângulo  $\gamma$  com a vertical. As suas componentes vertical e horizontal,  $v$  e  $u$ , supostas, respectivamente, para a esquerda e para baixo, são dadas por:

$$v = d \cos \gamma \quad ; \quad u = d \sin \gamma$$

A compatibilidade relaciona o deslocamento  $d$  com as variações de comprimentos das barras (v.fig.1.17b):

$$\Delta L_1 = d \cos(\alpha - \gamma) \quad ; \quad \Delta L_2 = d \cos(\beta - \gamma)$$

Desenvolvendo-se os cossenos das diferenças entre ângulos e combinando-se o conjunto de relações anteriores de modo a eliminar  $d$ , resultam:

$$v = \frac{(\Delta L_1 \sin \beta - \Delta L_2 \sin \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} \quad ; \quad u = \frac{(\Delta L_1 \cos \beta - \Delta L_2 \cos \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

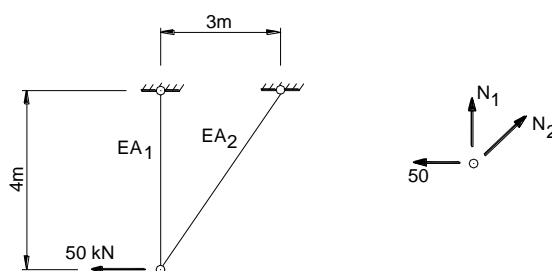
que são as relações procuradas.

Nota-se que as variações de comprimentos  $\Delta L_1$  e  $\Delta L_2$  podem ser determinadas diretamente pelas suas relações com as respectivas forças normais; estas, por sua vez, resultam do equilíbrio do nó, considerando-se a eventual força externa



aplicada.

**Exemplo 6:** Considere-se um arranjo particular para as barras no caso anterior, com seções transversais  $A_1 = 6,5 \text{ cm}^2$  e  $A_2 = 4,0 \text{ cm}^2$ , sendo dispostas de modo que  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\text{sen}\beta = 0.6$  e  $\text{cos}\beta = 0.8$ . O sistema está submetido a uma força horizontal de 50 kN, conforme ilustra a figura 1.18a.



**Figura 1.18 - Arranjo particular de barras**

Pede-se determinar as componentes do deslocamento do nó  $c$ .  
 Dado complementar:  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ .

Inicialmente, do equilíbrio do nó, fig.1.18b, calculam-se os esforços normais nas barras:  $N_1 = -66,67 \text{ kN}$ ,  $N_2 = 83,4 \text{ kN}$ .

Com as forças normais é possível determinar as variações de comprimentos das barras:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA_1} = -0,205 \text{ cm} \quad ; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA_2} = 0,521 \text{ cm}$$

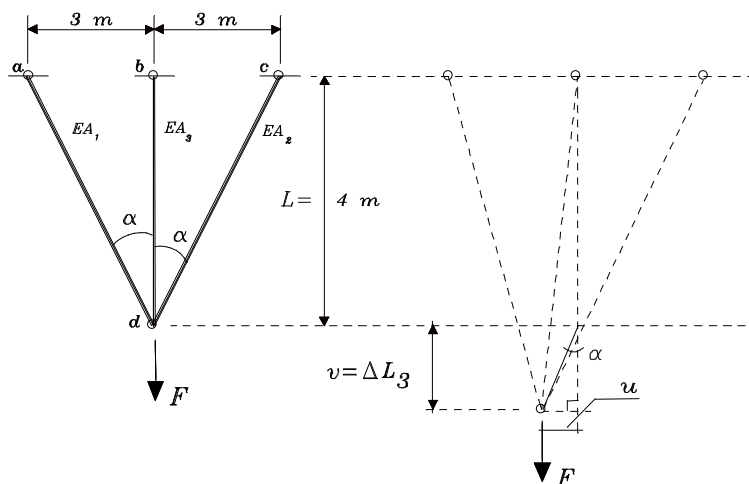
As componentes procuradas do deslocamento resultam da aplicação das relações obtidas para  $u$  e  $v$  no exemplo anterior:

$$v = \Delta L_1 = -0,205 \text{ cm} \quad ; \quad u = \frac{\Delta L_1 \cos \beta - \Delta L_2}{-\text{sen} \beta} = 1,141 \text{ cm}$$

sendo que o sinal negativo da componente vertical indica um deslocamento para cima, contrário àquele que foi adotado como positivo na dedução das relações gerais.  $\square$

**Exemplo 7:** Num último exemplo nesse tema, considere-se uma treliça composta por três barras conforme ilustra a figura 1.19. Deseja-se determinar as tensões nas barras e as componentes do deslocamento do nó  $d$ .

Os dados complementares são:  $F=10 \text{ kN}$ ,  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $A_1=2 \text{ cm}^2$ ,  $A_2=4 \text{ cm}^2$  e  $A_3=2 \text{ cm}^2$ .



**Figura 1.19 - Treliça Plana composta por três barras**

Do equilíbrio do nó  $d$  seguem as relações:

$$N_1 = N_2$$

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 = F \rightarrow 2N_1 \cos \alpha + N_3 = F$$

Neste caso, observa-se que a variação de comprimento da barra 3 coincide com o deslocamento vertical do nó  $d$ , que por sua vez se relaciona com as variações de comprimentos das barras 1 e 2 pela relação de compatibilidade. Assim sendo, levando-se em conta a disposição adotada para as barras do sistema resulta:

$$\Delta L_3 = v = \frac{\Delta L_1 + \Delta L_2}{2 \cos \alpha}$$

$$\rightarrow \frac{N_3 L}{E A_3} = \frac{l}{2E \cos \alpha} \left[ \frac{N_1 L}{A_1 \cos \alpha} + \frac{N_1 L}{A_2 \cos \alpha} \right]$$

Substituindo-se os dados numéricos, obtém-se:

$$N_3 = \frac{N_1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{A_3}{A_1} + \frac{A_3}{A_2} \right) = \frac{N_1}{2.0,64} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = 1,1719 N_1$$

Pelas relações de equilíbrio deduzidas, determinam-se os valores das forças normais:

$$N_1 = N_2 = 3,607 \text{ kN} \rightarrow N_3 = 4,227 \text{ kN}$$

As tensões normais, segundo seções quaisquer ortogonais aos eixos de cada uma das barras, resultam (\*):

$$\sigma_1 = \frac{3,607}{2} = 1,8 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{4,227}{2} = 2,1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{3,607}{4} = 0,9 \text{ kN/cm}^2$$

Finalmente, as componentes dos deslocamentos resultam:

$$v = \Delta L_3 = \frac{2,1135.400}{20000} = 0,042 \text{ cm}$$

$$u = \frac{\Delta L_2 - \Delta L_1}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{-0,022}{2.0,6} = -0,018 \text{ cm} \quad . \square$$

---

(\*) Optando-se por considerar apenas um algarismo significativo após a vírgula

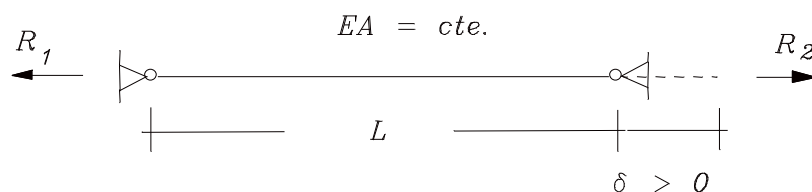
### 1.2.6 Efeitos de imperfeições iniciais e de temperatura

Existem algumas situações nas quais as barras já apresentam um regime de *tensões iniciais* mesmo antes da aplicação de qualquer carregamento externo. Em sistemas hiperestáticos essas solicitações iniciais, entre outras causas, podem surgir nas fases de montagem ou execução da estrutura induzidas por imperfeições construtivas ou variações significativas de temperatura.

Na prática as tensões iniciais são normalmente desprezadas, porém o problema é que elas se superpõem com aquelas devidas ao carregamento externo e essa combinação pode ser desfavorável, levando a valores de solicitação interna incompatíveis com o regime de comportamento previsto somente com a atuação do carregamento.

Nos exemplos que seguem consideram-se os efeitos de imperfeições iniciais e de temperatura.

**Exemplo 8:** Considere-se que num trecho de comprimento  $L$  deva ser fixada uma barra prismática de comprimento  $L + \delta$ , onde  $\delta$  representa o acréscimo de comprimento por defeito de fabricação (v.fig.1.20). Pede-se determinar as tensões iniciais devidas à montagem do sistema.



**Figura 1.20 - Barra com defeito inicial**

É fácil entender que na montagem do sistema a barra será forçada a se ajustar ao comprimento  $L$  e aplicará forças sobre os apoios, em razão de sua tendência para retomar o comprimento original. Em oposição, os vínculos aplicarão forças de reação

sobre a barra, as quais, por equilíbrio, serão iguais entre si. Assim sendo, a barra montada estará submetida a uma distribuição de força normal constante ao longo de seu comprimento.

Para se determinar o valor da reação de apoio, emprega-se uma condição de compatibilidade seguindo uma estratégia de resolução típica do Processo dos Esforços, isto é: imagina-se que um dos vínculos esteja livre e que a barra esteja submetida na extremidade livre à ação de uma força  $R$ , cujo sentido é adotado de tração sobre a barra.

A compatibilidade consiste em afirmar que a variação de comprimento  $\Delta L_R$  provocada pela força de reação somada com a folga, ou defeito inicial, seja igual a zero; ou ainda, numa outra interpretação:  $\Delta L_R$  anula a folga  $\delta$ .

Como a força normal é constante ao longo da barra e também é suposto ser constante o produto de rigidez  $EA$ , calcula-se a variação de comprimento diretamente por:  $\Delta L_R = \frac{RL}{EA}$ .

Impondo-se, então, a condição de compatibilidade resulta:

$$\Delta L_R + \delta = 0 \quad \rightarrow \quad R = -\frac{EA\delta}{L}$$

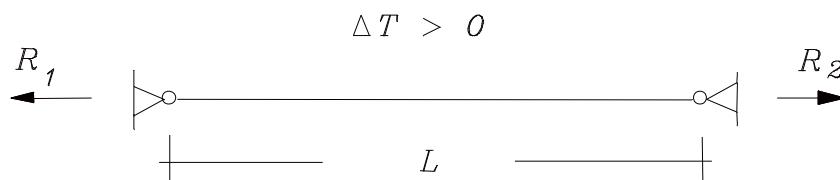
Nota-se que a reação apresenta um sinal negativo e que, portanto, o ajuste de montagem provoca compressão sobre a barra.

Como a força normal interna tem valor igual ao da reação calculada, a tensão normal em qualquer ponto da barra segundo um plano ortogonal ao seu eixo resulta:

$$\sigma = -\frac{E\delta}{L}$$

que é a resposta procurada.

**Exemplo 9:** Admita-se que uma barra prismática de comprimento inicial  $L$ , vinculada nas suas duas extremidades por apoios fixos, venha a ser submetida a um acréscimo de temperatura  $\Delta T$ . Pede-se determinar as tensões normais resultantes.



**Figura 1.21 - Barra submetida a variação de temperatura**

Devido ao acréscimo de temperatura, a barra tenderá a sofrer uma variação positiva de comprimento, mas que será inibida pela vinculação: desse modo aparecem reações nos apoios, iguais entre si, conforme ilustra a figura 1.21 e, conseqüentemente, uma distribuição de força normal constante ao longo da barra.

Neste caso a condição de compatibilidade é similar à do exemplo anterior, isto é: imaginando-se que um dos vínculos tenha sido liberado, a reação de apoio é de tal intensidade que a variação de comprimento por ela provocada anula a variação de comprimento devida à temperatura.

A variação de comprimento devida à força de reação é determinada de forma imediata por:  $\Delta L_R = \frac{RL}{EA}$ .

Para o cálculo da variação de comprimento devida à temperatura,  $\Delta L_T$ , emprega-se a relação clássica da dilatação linear:  $\Delta L_T = \alpha L \Delta T$ , onde  $\alpha$  representa o coeficiente de dilatação linear do material da barra.

Impondo-se, então, a condição de compatibilidade, obtém-se:

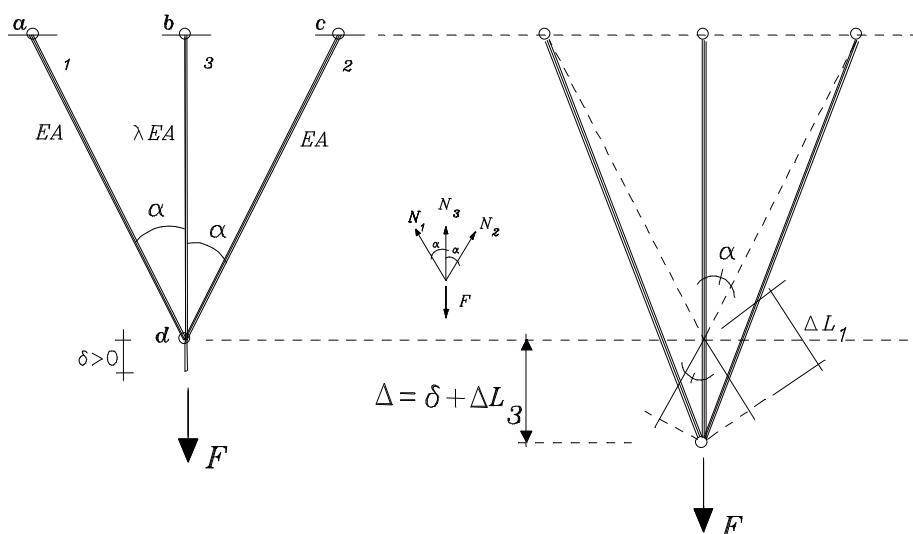
$$\Delta L_R + \Delta L_T = 0 \quad \rightarrow \quad R = -\alpha EA \Delta T$$

e, portanto, conclui-se que a variação positiva de temperatura provoca um esforço normal de compressão sobre a barra.

Finalmente, a tensão normal resulta:  $\sigma = -\alpha E \Delta T$

É de se notar, em primeiro lugar, a similaridade que existe entre os problemas da folga e da temperatura. Além disso, ressalta-se, novamente, que dentro dos limites do regime elástico e dos pequenos deslocamentos, quando houver tanto folga quanto temperatura a serem considerados, os efeitos podem ser superpostos diretamente entre si e, posteriormente, com os efeitos do carregamento externo que vier a ser aplicado.

**Exemplo 10:** Neste caso, numa treliça plana formada por duas barras prismáticas, de mesmos comprimentos e áreas de seções transversais, pretende-se incorporar, na vertical, uma terceira barra que possui comprimento maior do que o necessário, conforme indica a figura 1.22a. Uma vez montado o sistema aplica-se uma força vertical  $F$ . Sendo  $\lambda$  a proporção entre as áreas das seções transversais da terceira barra e das primeiras, pede-se determinar: os esforços em cada uma delas, levando-se em conta os efeitos da montagem e do carregamento, e o deslocamento vertical do seu ponto de união com relação à posição inicial.



**Figura 1.22 - Treliça plana com imperfeição inicial**

Para se trabalhar com sinais positivos para os esforços, admite-se que na situação equilibrada as forças nas barras sejam de tração. Assim sendo, por equilíbrio do nó (v.fig.1.22b), obtêm-se as seguintes relações:

$$N_1 \operatorname{sen} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad ; \quad N_1 \operatorname{cos} \alpha + N_2 \operatorname{cos} \alpha + N_3 - F = 0$$

$$\therefore N_1 = \frac{(F - N_3)}{2 \operatorname{cos} \alpha}$$

A compatibilidade impõe uma dependência entre o deslocamento vertical do nó e as variações de comprimentos das barras (visualizadas mediante projeção ortogonal daquele deslocamento sobre as direções *iniciais* das barras, v.fig. 1.22c).

A condição de compatibilidade se expressa na forma:

$$\Delta L_3 + \delta = \frac{\Delta L_1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

As variações de comprimentos das barras podem ser escritas em função dos esforços normais por:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L}{(EA)_1 \operatorname{cos} \alpha} \quad e \quad \Delta L_3 = \frac{N_3 L}{(EA)_3} .$$

Substituindo-se as relações acima na condição de compatibilidade e combinando-se com a relação de equilíbrio resultam, sucessivamente:

$$\frac{N_3 L}{(EA)_3} = \frac{N_1 L}{(EA)_1 \operatorname{cos}^2 \alpha} - \delta$$

$$\frac{N_3}{\lambda} = \frac{(F - N_3)}{2 \operatorname{cos}^3 \alpha} - \frac{\delta (EA)_1}{L} \quad \therefore \quad N_3 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2 \operatorname{cos}^3 \alpha} \right) = \frac{F}{2 \operatorname{cos}^3 \alpha} - \frac{\delta (EA)_1}{L}$$

O deslocamento vertical do nó é calculado por:



$$\Delta = \Delta L_3 + \delta$$

Observa-se que a solução obtida contém a superposição dos efeitos do defeito inicial e do carregamento, de maneira que, se necessário, é possível identificar as contribuições de cada um deles resolvendo-se as relações anteriores com valores nulos para  $F$  ou para  $\delta$ .

No sentido de determinar valores numéricos, adotam-se para a treliça em questão os seguintes dados:  $A_1 = 4,0 \text{ cm}^2$ ;  $\lambda = 1,5$ ;  $\cos\alpha = 0,50$ ;  $\delta = 0,10 \text{ cm}$ ;  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ;  $F = 30 \text{ kN}$ ;  $L = 400 \text{ cm}$ .

Considerando-se esse conjunto de dados resultam:

$$N_3 = 21,43 \text{ kN} \quad ; \quad N_1 = 8,57 \text{ kN} \quad ; \quad \Delta = 0,1743 \text{ cm}$$

Em particular, sendo  $\delta = 0$ :

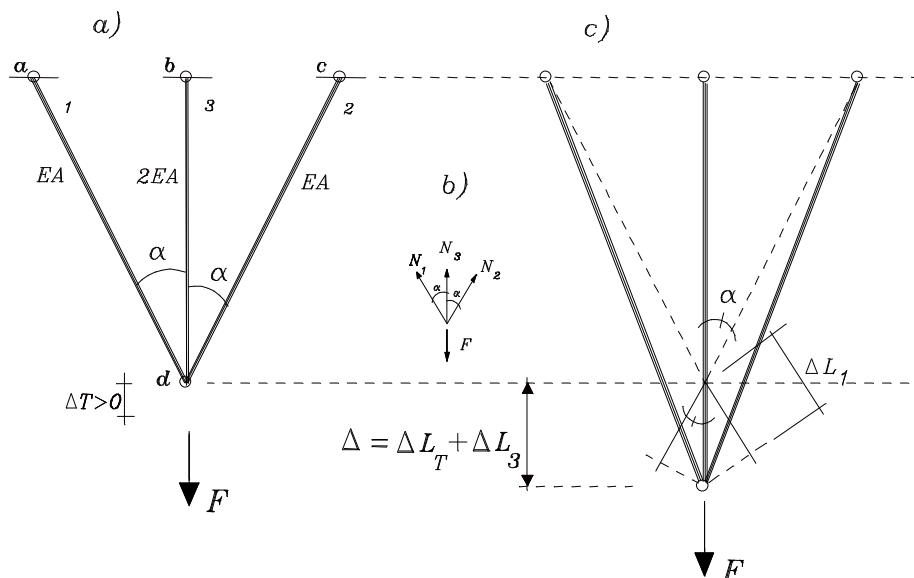
$$N_3 = 25,71 \text{ kN}; N_1 = 4,29 \text{ kN}; \Delta_F = \Delta L_3 = 0,0857 \text{ cm}$$

$$\text{Sendo } F = 0: N_3 = -4,28 \text{ kN}; N_1 = 4,28 \text{ kN}; (\Delta L_3)_\delta = -0,0143 \text{ cm}$$

$$\text{Então: } \Delta = \Delta_F + (\Delta L_3)_\delta + \delta = 0,1743 \text{ cm}$$

□.

**Exemplo 11:** Considere-se a treliça plana ilustrada na figura 1.23a, a qual não apresenta qualquer defeito inicial. Admita-se que a barra central sofra um acréscimo de temperatura  $\Delta T$ . Determinar o esforço normal na barra central e o deslocamento vertical do nó de ligação entre as barras adotando-se os seguintes valores:  $A_1 = A_2 = 4,0 \text{ cm}^2$ ;  $\lambda = A_3/A_1 = 2,0$ ;  $\cos\alpha = 0,50$ ;  $\Delta T = 27^\circ\text{C}$ ;  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ;  $L = 400 \text{ cm}$  e  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ .



**Figura 1.23 - Efeito de temperatura na treliça**

Ao sofrer a variação de temperatura, devida à dilatação, a barra central tenderá a aumentar seu comprimento, que será restringido, em parte, pelas outras barras. Essa restrição parcial introduz esforços normais nas barras da treliça.

Admitindo-se que todas as barras venham estar tracionadas na posição deslocada, o equilíbrio do nó (v.fig.1.23b) fica expresso por:

$$N_1 \operatorname{sen} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad ; \quad N_1 \operatorname{cos} \alpha + N_2 \operatorname{cos} \alpha + N_3 = 0$$

$$\therefore N_1 = -\frac{N_3}{2 \operatorname{cos} \alpha}$$

A compatibilidade se expressa da seguinte forma: o deslocamento vertical do nó resulta da variação total de comprimento da barra vertical. Mas essa variação é composta por uma parcela devida à temperatura e outra que representa a deformação elástica associada à força normal imposta pela restrição das outras barras à livre dilatação. Nessas condições, observando-se a figura 1.22c resulta:

$$\Delta L_3 + \Delta L_T = \frac{\Delta L_1}{\cos \alpha}$$

Levando-se em conta as mesmas relações entre variações de comprimentos e esforços normais nas barras, já conhecidas, e a relação que define a variação de comprimento devido à temperatura, a combinação das condições de equilíbrio e de compatibilidade fornece:

$$N_3 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \right) = -\alpha \Delta T (EA)_1$$

$$\Delta = \Delta L_3 + \alpha L \Delta T$$

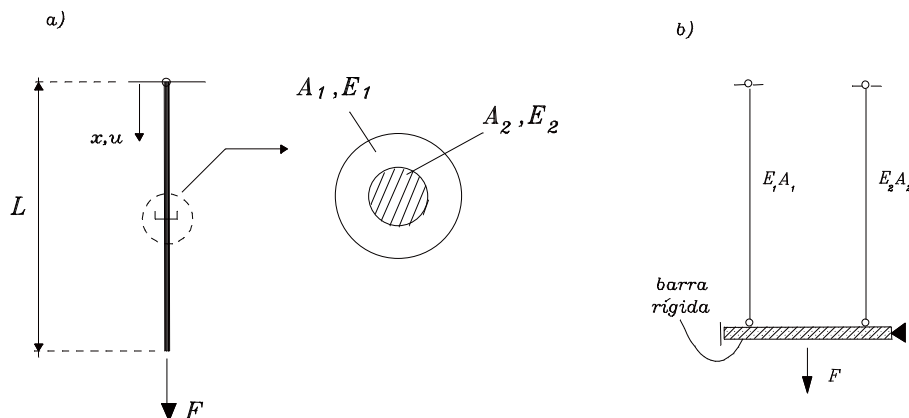
Substituindo-se os valores numéricos resultam:

$$N_3 = -5,76 \text{ kN} ; \Delta = 0,115 \text{ cm} \quad .\square$$

Ressalta-se novamente a semelhança com o exemplo da folga. De fato o problema de temperatura pode ser interpretado como um de folga cujo valor é determinado por:  $\delta = \alpha L \Delta T$ .

### 1.2.7 Barras constituídas por dois materiais

Considere-se uma barra prismática de comprimento  $L$ , composta por dois materiais distribuídos simetricamente na seção e sujeita a uma força  $F$  em sua extremidade livre, conforme ilustra a figura 1.24. Cada material ocupa uma porção da área da seção transversal, a qual está sendo representada por uma forma circular apenas por simplificação, uma vez que, de fato, a geometria pode ser qualquer.



**Figura 1.24 - a) barra composta de dois materiais distintos  
b) condição de compatibilidade equivalente a um arranjo em paralelo**

Neste tipo de barra, cada um dos materiais suporta uma parte da carga aplicada, de modo que, numa dada seção, a força normal total  $\mathbf{N}$  é igual à soma de duas parcelas.

O problema que se coloca consiste em determinar as parcelas do esforço normal que cada material resiste e as correspondentes tensões normais.

Inicialmente, por equilíbrio, vale a seguinte relação:

$$N_1 + N_2 = F$$

onde  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  representam as parcelas de força normal de cada um dos materiais.

O problema, como se observa, resulta internamente uma vez hiperestático, pois existem duas incógnitas e somente uma equação de equilíbrio. Há, portanto, a necessidade de se considerar uma relação de compatibilidade.

A condição de compatibilidade, por sua vez, deriva da aplicação da mesma hipótese cinemática adotada para a barra homogênea. Mesmo neste caso de seção composta, é razoável admitir que a seção transversal inicialmente plana permaneça plana e ortogonal ao eixo após a deformação. Assim, são iguais as variações de comprimentos  $\Delta L$  de cada uma das partes,

observadas isoladamente sob as ações de suas correspondentes forças normais.

Essencialmente a compatibilidade em questão equivale a idealizar o comportamento da barra composta como sendo o comportamento de um sistema de duas barras dispostas em paralelo e ligadas entre si por outra barra indeformável e sem peso, que pode se deslocar mantendo-se paralela a si mesma (v.fig.1.24b). Em tal situação a barra indeformável impõe a igualdade dos deslocamentos e a divisão proporcional da força normal total.

Nessas condições resulta que também a deformação longitudinal de cada uma das barras é a mesma:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ .

Por sua vez, as tensões normais, expressas pelas relações:  $\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$ ;  $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2$  passam a ter uma relação de dependência em razão da compatibilidade. Portanto, como  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ :

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \text{ou} \quad \sigma_1 = n \sigma_2$$

onde  $n = \frac{E_1}{E_2}$ .

Voltando à condição de equilíbrio e considerando-se que  $N_1 = \sigma_1 A_1$  e  $N_2 = \sigma_2 A_2$ , determinam-se, por substituição:

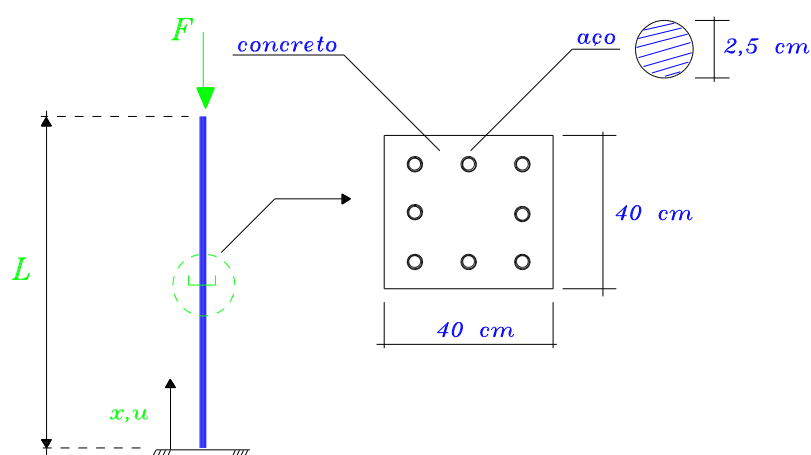
$$\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = F \quad \rightarrow \quad \sigma_2 (n A_1 + A_2) = F$$

Definindo-se  $A_f = n A_1 + A_2$  como uma área fictícia<sup>(\*)</sup> resultam:

$$\sigma_1 = n \frac{F}{A_f} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_f}$$

**Exemplo 12:** Como aplicação dos conceitos apresentados, considere-se o caso prático de um pilar em concreto armado,

ilustrado na figura 1.25, apresentando comprimento  $L=200$  cm e comprimido por uma força axial  $F=1500$  kN. Os materiais que compõem o pilar são o concreto e o aço, este identificado na forma de barras discretas dispostas ao longo de todo o comprimento. Respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal do concreto e do aço são:  $E_a=21000$  kN/cm<sup>2</sup> e  $E_c=3000$  kN/cm<sup>2</sup>. O objetivo do exemplo em questão é determinar o deslocamento vertical da extremidade livre do pilar por efeito do carregamento aplicado, desprezando-se o peso próprio.



**Figura 1.25 - Pilar em concreto armado**

Os dados complementares do exemplo são os seguintes:

$$n = E_a/E_c = 7 ; A_a = A_1 = 39,27 \text{ cm}^2 ; A_c = A_2 = 1560,73 \text{ cm}^2$$

Inicialmente a área fictícia (no caso, uma área equivalente de concreto) resulta:

$$A_f = A_c + n A_a = 1835,62 \text{ cm}^2$$

Aplicando-se diretamente as relações deduzidas determinam-se os valores das tensões normais que atuam em cada um dos

---

(\*) A área fictícia é uma área homogênea equivalente ocupada pelo material 2.

materiais:

$$\sigma_2 = \sigma_c = -\frac{1500}{1835,62} = -0,817 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma_a = -7 \cdot 0,817 = -5,72 \text{ kN/cm}^2$$

sendo que o sinal negativo é imposto pelo sentido da força aplicada: de compressão.

O deslocamento da extremidade livre decorre da integração da equação diferencial da barra, e aí se pode fazer referência a qualquer um dos materiais, uma vez que a deformação é a mesma. Tomando-se, por exemplo, a deformação calculada pelo concreto segue que:

$$u' = \frac{N_c}{E_c A_c} \quad \text{ou, como} \quad N_c = \frac{F A_c}{A_f}$$

$$u' = \frac{F}{E_c A_f} \quad \therefore \quad u = \frac{F x}{E_c A_f} + C_1$$

onde  $x$  tem origem na extremidade fixa.

A condição de contorno a ser imposta é justamente o deslocamento nulo em  $x = 0$ , o que leva a  $C_1 = 0$ . Finalmente, obtém-se:

$$u(200) = -\frac{1500 \cdot 200}{3000 \cdot 1835,62} = -0,054 \text{ cm}$$

É possível, ainda, determinar as parcelas de esforço normal que cabem a cada um dos materiais:

$$N_c = -0,817 \cdot 1560,73 \cong -1275 \text{ kN}$$

$$N_a = -5,72 \cdot 39,27 \cong -225 \text{ kN}$$

Outra questão de importância no caso das barras em material composto, e que pode ser abordada seguindo-se o mesmo procedimento anterior, diz respeito a tensões iniciais que aparecem por efeito de uma variação de temperatura.

Como o sistema é *internamente* hiperestático, as tensões iniciais podem surgir mesmo que a vinculação externa não imponha qualquer restrição à livre deformação da barra (como no caso de um sistema *externamente* isostático).

Seja, então, uma barra composta por dois materiais, com eixo fixo numa de suas extremidades e livre na outra, que venha a ser submetida a um acréscimo de temperatura  $\Delta T$ . Considere-se, ainda, que não haja qualquer carregamento externo aplicado e que seja desprezado o peso próprio da barra.

Cada um dos materiais possui um coeficiente de dilatação térmica característico e, portanto, tende a ter uma resposta, em termos de dilatação, diferente entre si. Acontece que ambos os materiais estão, por hipótese, perfeitamente ligados e devem se deformar em conjunto. Assim, cada um deles impõe uma restrição à livre dilatação do outro e, conseqüentemente, aparecem internamente esforços normais associados à essa restrição.

As forças normais que se desenvolvem em cada um dos materiais devem verificar a condição de equilíbrio que, neste caso de ausência de força externa aplicada, se resume a:

$$N_1 + N_2 = 0 \quad \text{ou : } N_1 = -N_2$$

Por outro lado, admitindo-se que a condição de compatibilidade permaneça a mesma, vale escrever que:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} .$$

Há neste ponto um aspecto que deve ser ressaltado: as deformações indicadas no parágrafo anterior são as *deformações totais* de cada uma das partes da barra. *Mas a deformação total de cada parte é composta de uma parcela devida à variação de temperatura e de outra, dita elástica, devida ao esforço normal.*

É importante notar que a lei de Hooke estabelece uma relação linear entre a tensão normal e a parcela elástica da deformação total; assim sendo, valem as relações:



$$\varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta T + \frac{N_1}{(EA)_1} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \alpha_2 \Delta T + \frac{N_2}{(EA)_2}$$

Igualando-se essas relações devido à compatibilidade, e combinando-se com a condição de equilíbrio resulta:

$$N_1 \left( \frac{1}{(EA)_1} + \frac{1}{(EA)_2} \right) = (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T$$

Definindo-se, então, um produto de rigidez fictício e um coeficiente de dilatação térmica fictício por:

$$\frac{1}{(EA)_*} = \frac{1}{(EA)_1} + \frac{1}{(EA)_2} \quad ; \quad \alpha_* = \alpha_2 - \alpha_1$$

segue que:  $N_1 = (EA)_* \alpha_* \Delta T$  e  $N_2 = -N_1$ .

As tensões normais em cada um dos materiais podem, então, ser calculadas por:  $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}$  e  $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$ .

**Exemplo 13:** Para uma barra composta por aço e latão, com comprimento de 50 cm, determinar as forças e tensões normais em cada material devidas a uma variação positiva de temperatura  $\Delta T = 20^\circ C$ . A área de seção transversal ocupada pelo aço ( $A_1$ ) é de 37,1 cm<sup>2</sup> e a área ocupada pelo latão ( $A_2$ ) é de 7,07 cm<sup>2</sup>.

Dados relativos ao aço:  $E_1 = 21000 \text{ kN/cm}^2$  ;  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$  .

Dados relativos ao latão:  $E_2 = 10500 \text{ kN/cm}^2$  ;  $\alpha_2 = 19 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$  .

Aplicando-se diretamente as relações deduzidas, obtêm-se:

$$(EA)_* = 67778 \text{ kN} \quad ; \quad \alpha_* = 7,0 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$$

$$N_1 = 9,49 \text{ kN} \quad ; \quad N_2 = -9,49 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = 0,255 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = -1,34 \text{ kN/cm}^2$$

### 1.2.8 Barras em regime elasto-plástico perfeito

Em todo o estudo até agora desenvolvido, admitiu-se que o material apresenta uma resposta do tipo elástico linear isto é : *com proporcionalidade entre tensão e deformação e ausência de deformações residuais num ciclo carregamento-descarregamento.*

Entretanto, muitos materiais possuem uma significativa resistência para além do regime elástico. Essa reserva de resistência fora dos limites do regime elástico decorre do encruamento que o material pode sofrer devido à sua grande deformabilidade e ao aparecimento de deformações permanentes.

Modelos de comportamento de materiais que permitem levar em conta a capacidade adicional de resistência e o aparecimento de deformações permanentes são denominados de elasto-plásticos e a hipótese fundamental neles inserida é que a deformação total é composta de uma parcela recuperável e outra parcela permanente.

Uma vantagem adicional dos modelos elasto-plásticos é que permitam estimar a máxima capacidade de carregamento de estruturas. Sistemas estruturais constituídos por esses materiais possuem, de fato, certa capacidade adicional de suporte de carga, totalmente desconsiderada nos cálculos em regime elástico. Entretanto, como uma compensação do fato de permitirem descrever o comportamento estrutural em regime não-linear, os modelos elasto-plásticos são conceitualmente mais complexos e levam a análises mais laboriosas, que quase sempre exigem o emprego de técnicas aproximadas de resolução.

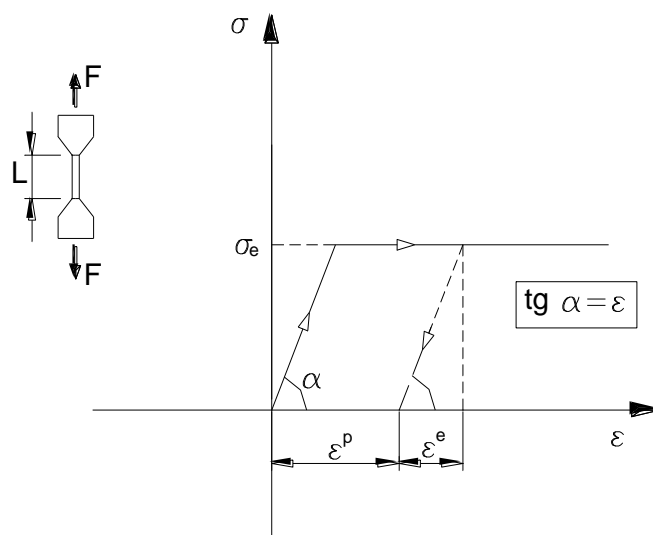
Obviamente tais modelos não serão tratados neste texto, porém, mantendo-se dentro dos limites do curso, é possível abordar versões menos complexas, que proporcionam análises simplificadas, mas que ilustram convenientemente alguns aspectos de interesse do comportamento estrutural em regime não-linear.

Um modelo de resposta idealizada não-linear do material, que serve para um estudo preliminar, é o chamado elasto-plástico perfeito, nos quais se consideram as deformações

permanentes, porém desconsidera-se o encruamento por elas provocado.

Segundo este modelo, o material apresenta um regime inicial elástico-linear que se estende até um limite caracterizado por uma tensão de escoamento  $\sigma_e$ , a partir do qual não mais se admitem acréscimos de tensão e as deformações evoluem indefinidamente.

A figura 1.26 ilustra a resposta em questão a partir de um diagrama tensão-deformação para uma barra submetida a tração uniaxial.



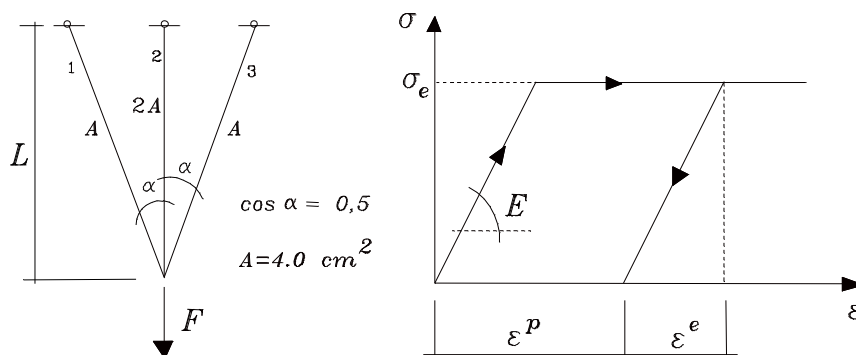
**Figura 1.26 - Barra em regime elastoplástico perfeito**

Neste modelo de comportamento são importantes duas outras características que se revelam uma vez atingido o patamar de escoamento. Em primeiro lugar, realizando-se um descarregamento a partir de um nível de deformação arbitrário, a trajetória de descarregamento segue uma reta com inclinação paralela àquela do regime elástico inicial; em segundo lugar, aparece uma deformação permanente, dita plástica, que pode ser avaliada completando-se o descarregamento até o nível zero de tensão.

Assim sendo, na resposta elasto-plástica a deformação total  $\epsilon$  é composta de uma parcela elástica  $\epsilon^e$ , recuperável, e de outra plástica  $\epsilon^p$  ou irrecuperável.

Este tipo de resposta idealizada, apesar de simplificada, aplica-se aos materiais com grande capacidade de deformação e serve para simular, em particular, o comportamento dos aços estruturais ditos doces; para tais tipos de materiais, o valor da tensão de escoamento pode ser identificado em laboratório num ensaio de tração uniaxial.

**Exemplo 13:** Neste exemplo, o material que compõe as barras da treliça plana apresenta um comportamento elasto-plástico perfeito, como ilustra a figura 1.27.



**Figura 1.27- Treliça plana formada por barras com comportamento elasto-plástico**

Pede-se determinar a resposta da estrutura para um ciclo de carga  $F$ .

Até determinado nível de carregamento todas as barras se mantêm em regime elástico-linear. Portanto, até esse nível, vale um mesmo tipo de análise como a desenvolvida no exemplo 10, considerando-se folga nula, obviamente. Assim sendo, impondo-se equilíbrio e compatibilidade, as forças normais nas barras se relacionam com a força  $F$  aplicada pelas seguintes relações:

$$N_2 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \right) = \frac{F}{2 \cos^3 \alpha} \quad ; \quad N_1 = \frac{(F - N_2)}{2 \cos \alpha}$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  referem-se às forças normais nas barras inclinada e

vertical, respectivamente;  $\lambda$  é o valor do quociente entre as áreas das seções transversais das barras vertical e inclinada.

Considerando-se os dados do exemplo, indicados na figura 1.27, obtêm-se:  $N_1 = \frac{F}{9}$  ;  $N_2 = \frac{8F}{9}$  .

Portanto a barra mais solicitada é a vertical, e ela entrará em escoamento quando a tensão normal igualar  $\sigma_e$  <sup>(\*)</sup>, ou ainda, quando a força normal atingir o seguinte valor:

$$N_2 = \frac{8F}{9} = \sigma_e \cdot 2A .$$

Sendo  $A = 4 \text{ cm}^2$ , pela expressão de  $N_2$  conclui-se que o valor da carga correspondente ao limite do comportamento elástico da estrutura é:  $F_e = 9\sigma_e$  .

Nesse nível de carregamento, a força normal nas barras inclinadas, em valor numérico, resulta de:  $N_1 = \sigma_e$  .

Além disso, o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga é determinado por:

$$d_e = \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{E2A} = \frac{\sigma_e L}{E}$$

Aumentando-se o valor do carregamento, a tensão na barra vertical, pelo modelo constitutivo, se mantém constante e, por conseqüência, o mesmo acontece com a força normal. Nessas condições, a condição de equilíbrio passa a ser expressa na forma:

$$F = 2 \cos\alpha N_1 + \sigma_e 2A$$

O carregamento pode continuar aumentando até as barras inclinadas entrarem em escoamento, isto é, quando as respectivas forças normais atingirem o valor  $\sigma_e A$ . Assim, a máxima carga que o sistema admite pode ser calculada por:

---

(\*) Faz-se referência, naturalmente, à tensão normal medida segundo um plano ortogonal ao eixo da barra; como a força normal é constante, a tensão tem o mesmo valor em todos os pontos da barra.

$$F_{lim} = \sigma_e 2A(1 + \cos\alpha) = 12 \sigma_e$$

É possível, ainda, determinar o deslocamento do ponto de aplicação da carga no instante em que ela atinge o valor limite, considerando-se que até este limite as barras inclinadas respondem elasticamente:

$$d_{lim} = \frac{\Delta L_l}{\cos\alpha} = \frac{N_1 L}{EA \cos^2 \alpha} \quad \therefore \quad d_{lim} = \frac{d_e}{\cos^2 \alpha} = \frac{4 \sigma_e L}{E}$$

Outro aspecto interessante de ser analisado neste exemplo é a resposta final do sistema após um descarregamento total; para isto imagina-se a aplicação de uma força de compressão de valor  $-12 \sigma_e$  exatamente contrária ao valor da carga limite.

A resposta da estrutura ao descarregamento é puramente elástica, pois esta é uma característica do modelo elasto-plástico. Assim sendo, as forças normais nas barras resultam:

$$N_2 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \right) = \frac{F}{2 \cos^3 \alpha} \quad \rightarrow \quad N_2 = -10,67 \sigma_e$$

$$N_1 = \frac{(F - N_2)}{2 \cos \alpha} \quad \rightarrow \quad N_1 = -1,33 \sigma_e$$

As forças normais das barras nas etapas de carregamento e de descarregamento se superpõem, de modo que ao final do ciclo resultam:

$$N_1 = 2,67 \sigma_e \quad ; \quad N_2 = -2,67 \sigma_e$$

Isto significa que no sistema descarregado as barras apresentam tensões normais não nulas, isto é: *a plastificação também proporciona o aparecimento de tensões residuais.*

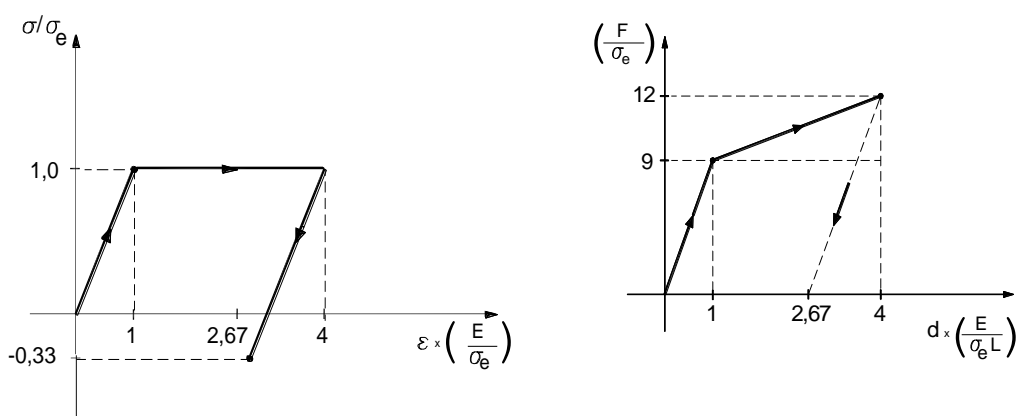
Finalmente, o deslocamento do ponto de aplicação da carga na etapa de descarregamento pode ser calculado por:

$$d = \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{E 2A} = -1,33 \frac{\sigma_e L}{E}$$

que é a parcela recuperável do deslocamento total. A parcela irre recuperável, ou permanente, resulta então:

$$d_i = 4,0 \frac{\sigma_e L}{E} - 1,33 \frac{\sigma_e L}{E} \cong 2,67 \frac{\sigma_e L}{E}$$

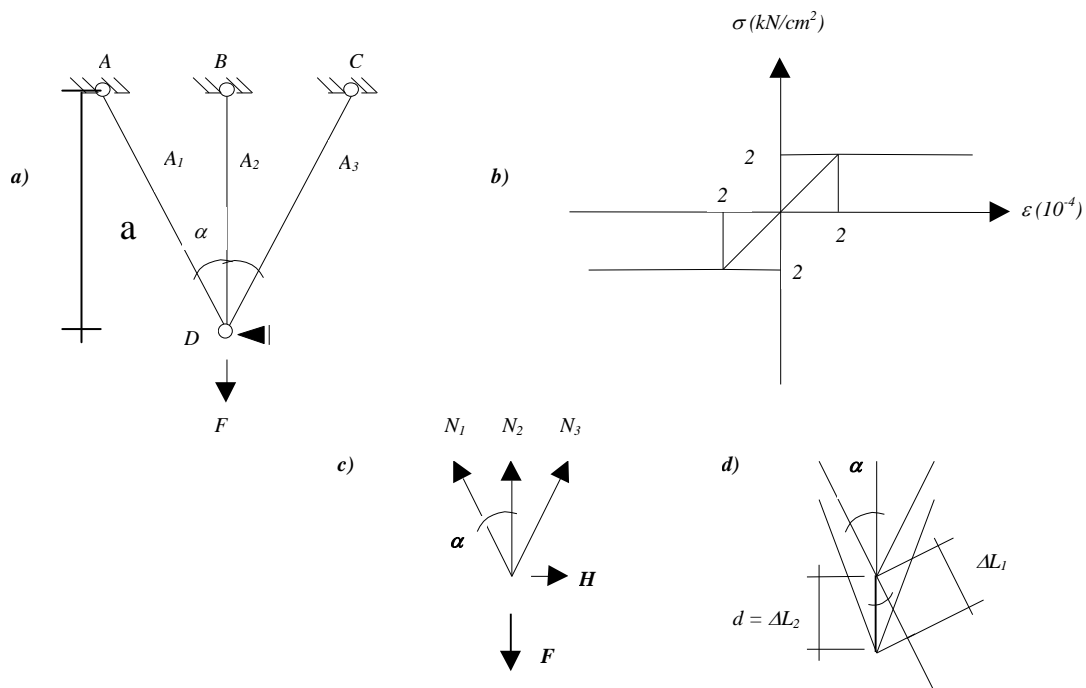
A resposta do sistema está ilustrada na figura 1.28, reunindo-se os diagramas de carga contra deslocamento do nó e de tensão-deformação na barra vertical para o ciclo carregamento e descarregamento.



**Figura 1.28 - Resposta da barra inclinada e global do sistema**

**Exemplo 14:** O material das barras da treliça indicada na figura 1.29a segue o diagrama "tensão x deformação", ilustrado através da figura 1.29b. A carga  $F$  aplicada cresce linearmente de 0 (zero) até 44 kN e depois decresce até -19 kN. Pedese representar a resposta da estrutura num gráfico força aplicada contra deslocamento do seu ponto de aplicação, " $F \times v_D$ ", para os intervalos de carga (0 a 44 kN) e (44 kN a -19 kN).

Dados complementares:  $A_1 = 4 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 16 \text{ cm}^2$ ,  $A_3 = 12 \text{ cm}^2$ ,  $E = 10000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $a = 200 \text{ cm}$  e  $\cos \alpha = 0,5$ .



**Figura 1.29 - Treliça plana em regime elasto-plástico**

Nota-se que o grau de hiperstaticidade da estrutura é igual a dois. Portanto, para a determinação dos esforços nas barras, além das equações de equilíbrio serão também necessárias duas condições de compatibilidade entre o deslocamento do nó D e as variações de comprimentos das barras.

O equilíbrio das componentes verticais das forças no nó D, v. fig. 1.29c, fornece:

$$(N_1 + N_3)\cos\alpha + N_2 = F$$

Por outro lado, v. fig. 1.29d, o deslocamento do ponto D se relaciona com as variações de comprimentos das barras por :

$$d = \Delta L_2 \quad ; \quad \Delta L_1 = \Delta L_3 = d \cos\alpha$$

$$\therefore \Delta L_1 = \Delta L_3 = \Delta L_2 \cos\alpha$$

Portanto, segue que, nos limites do regime elástico linear, valem as relações:



$$\frac{N_1 \left( \frac{a}{\cos \alpha} \right)}{E A_1} = \frac{N_2 a}{E A_2} \cos \alpha \quad ; \quad \frac{N_1}{E A_1} = \frac{N_3}{E A_3}$$

Substituindo-se os valores conhecidos de  $a$ ,  $\alpha$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , obtêm-se:

$$N_3 = 3 N_1 \quad ; \quad N_2 = 16 N_1$$

Combinando-se as relações anteriores com a de equilíbrio, obtêm-se os valores dos esforços normais nas barras:

$$N_1 = \frac{F}{18} \quad N_2 = 16 \frac{F}{18} \quad N_3 = 3 \frac{F}{18}$$

Essas expressões são válidas para uma força  $F$  tal que as tensões resultantes nas barras não ultrapassem o valor limite de proporcionalidade de  $2 \text{ kN/cm}^2$ .

Observando-se que a barra vertical é a primeira a atingir o limite elástico, pode-se determinar o valor da força aplicada correspondente a esse limite por:

$$F = \frac{18 N_2}{16} = \frac{18 \cdot 2 \cdot 16}{16} \rightarrow F = 36 \text{ kN}$$

Para esse nível de força aplicada, os correspondentes valores de forças normais e tensões sollicitantes nas barras da treliça são:

$$N_1 = N_3 = 2 \text{ kN} \quad ; \quad N_2 = 32 \text{ kN} \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 0,5 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 2 \text{ kN/cm}^2 .$$

O deslocamento vertical do nó pode ser calculado por compatibilidade considerando-se, indiferentemente, as variações de comprimentos de cada uma das barras. Dessa forma resulta:

$$v_D = \Delta L_2 = \frac{32 \cdot 200}{10000 \cdot 16} = 0,04 \text{ cm}$$

Em seguida, ao crescer o valor do carregamento até  $F = 44 \text{ kN}$ , a barra vertical estará submetida a um nível constante de

força normal igual a 32 kN; portanto, todo o acréscimo de carregamento deverá ser suportado pelas barras inclinadas.

Naturalmente, a barra vertical sofrerá um acréscimo de comprimento imposto pela compatibilidade com as variações elásticas de comprimentos das barras inclinadas e com o deslocamento do nó D.

Procurando-se, então, determinar a resposta do sistema ao incremento de carregamento, valem as seguintes relações de equilíbrio e compatibilidade:

$$(R_1 + R_3) \cos \alpha = \Delta F \quad ; \quad \Delta L_1^a = \Delta L_3^a$$

onde  $\Delta L_1^a$  e  $\Delta L_3^a$  são as variações adicionais de comprimentos das barras inclinadas, enquanto que  $R_1$  e  $R_3$  são os correspondentes incrementos de força normal.

Admitindo-se a hipótese de que as barras inclinadas permaneçam em regime elástico linear, a condição de compatibilidade em combinação com a lei de Hooke fornece:

$$R_3 = 3R_1$$

Das expressões anteriores segue que:  $R_1 = 4 \text{ kN}$  e  $R_3 = 12 \text{ kN}$ . Assim sendo, as forças e tensões normais acumuladas nas barras até o nível de  $F = 44 \text{ kN}$  assumem os seguintes valores:

$$N_1 = 6 \text{ kN}; N_3 = 18 \text{ kN}; N_2 = 32 \text{ kN}; \sigma_1 = \sigma_3 = 1,5 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = 2 \text{ kN/cm}^2$$

Deve-se ressaltar que as tensões nas barras AD e CD não atingiram o limite de proporcionalidade, e, portanto, permanecem em regime elástico linear, comprovando-se a hipótese adotada sobre suas respostas ao acréscimo de carga.

Para o atual nível de carregamento, o deslocamento vertical do nó D pode ser calculado por compatibilidade a partir da variação de comprimento da barra AD:

$$\Delta L_1 = \frac{6 \cdot 400}{10000 \cdot 4} = 0,06 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad v_D = \frac{\Delta L_1}{\cos \alpha} = \frac{0,06}{0,5} = 0,12 \text{ cm}$$

Observa-se que o deslocamento vertical total do nó  $D$  é composto de uma parcela elástica  $DD'=0,04$  cm, correspondente ao nível carregamento  $F=36$  kN, e de uma parcela plástica  $D'D''=0,08$  cm, correspondente ao nível  $F=44$  kN (v.fig.1.30a).

Durante o descarregamento de 44 kN até o nível zero e posteriormente prosseguindo com um carregamento negativo até -19 kN o sistema responde elasticamente. Portanto, nessa nova etapa, as forças normais nas barras podem ser calculadas por:

$$N_1 = \frac{F}{18} \quad N_2 = 16 \frac{F}{18} \quad N_3 = 3 \frac{F}{18}$$

entendendo-se  $F$  como uma força negativa de intensidade crescente de zero a -63 kN. Obviamente que para compor a resposta global do sistema, os resultados desta etapa se somam àqueles da etapa anterior.

Essa nova etapa apresenta um resultado intermediário interessante. Para uma força de -36 kN, que corresponde a um nível total acumulado de 8 kN, os valores acumulados das forças normais nas barras são :  $N_1=4$  kN,  $N_3=12$  kN e  $N_2=0$ . Portanto, a barra vertical fica descarregada.

Para um nível de força na etapa de -63 kN, que corresponde a um carregamento total de -19 kN, os valores de forças e tensões normais finais acumuladas nas barras resultam:

$$N_1 = 2,5 \text{ kN}; N_3 = -24 \text{ kN}; N_2 = 7,5 \text{ kN}; \sigma_1 = \sigma_3 = 0,625 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = -1,5 \text{ kN/cm}^2$$

O deslocamento final do ponto  $D$  pode ser calculado de duas maneiras.

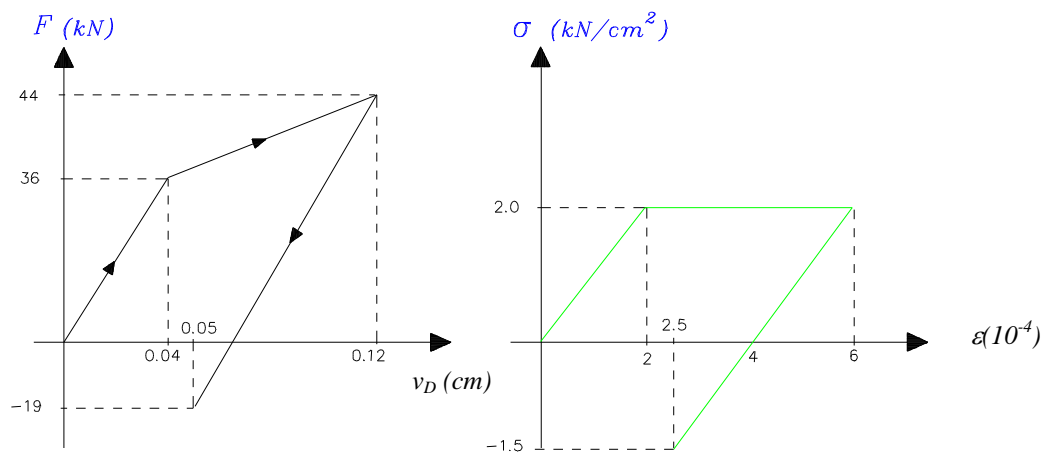
Na primeira, leva-se em conta o fato de que a barra inclinada  $AD$ , por exemplo, se mantém em regime elástico durante toda a trajetória de carregamento. Nessas condições, basta empregar a condição de compatibilidade com o seu acréscimo de comprimento:

$$\Delta L_I = \frac{2,5 \cdot 400}{10000 \cdot 4} = 0,025 \text{ cm} \rightarrow v_D = \frac{\Delta L_I}{\cos \alpha} = \frac{0,025}{0,5} = 0,05 \text{ cm}$$

A segunda maneira consiste em adicionar algebricamente ao deslocamento correspondente ao nível de força aplicada de 44 kN, a parcela elástica da etapa de carregamento negativo até o nível acumulado de -19 kN. Essa parcela pode ser calculada considerando-se diretamente a variação elástica de comprimento da barra central:

$$v_D = 0,12 - \frac{56 \cdot 200}{10000 \cdot 16} = 0,05 \text{ cm}$$

Na figura 1.30 apresentam-se os diagramas carga-deslocamento e tensão-deformação da barra vertical, para a trajetória completa de carga (0 até 44 kN ; 44 kN até -19 kN).



**Figura 1.30- Resposta global do sistema e da barra vertical**

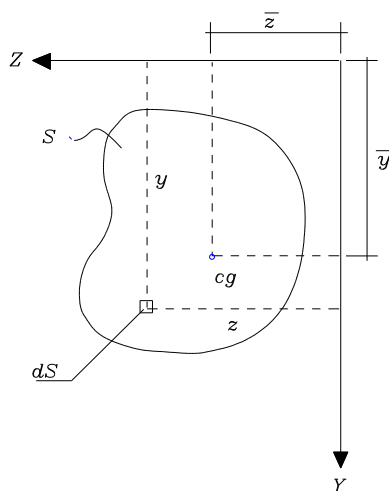
## 2 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DAS SEÇÕES

Apesar do conteúdo deste capítulo ter relação direta com o estudo das estruturas de barras em flexão, todos os conceitos serão apresentados num contexto puramente geométrico.

Com respeito à nomenclatura adotada, nota-se que algumas definições, como centro de gravidade e momento de inércia, aqui apresentadas envolvendo integrais sobre áreas, também aparecem com essa mesma denominação na mecânica, porém considerando-se integrais na massa distribuída no volume do corpo. A situação aqui estudada tem características bastante particulares em relação àquela da mecânica, pois se trata de uma análise no plano, sem qualquer referência à massa. De qualquer modo, o centro de gravidade no contexto geométrico, ou melhor, denominado *centroide*, pode ser assimilado como o centro de massa, no sentido físico, nas situações em que houver uma distribuição homogênea de massa associada à área da figura plana.

### 2.1 Momento estático e o centro de gravidade de figuras planas

Considere-se uma figura de área  $S$  e forma genérica, definida no plano  $Y-Z$ . Nessa área, identifica-se um elemento infinitesimal  $dS$  por suas coordenadas em relação ao sistema de eixos de referência adotado no plano (v.fig.2.1).



**Figura 2.1 - Seção com geometria qualquer no plano**

O momento estático da área  $S$  em relação ao eixo  $Y$  é definido pela seguinte integral:

$$M_{S_y} = \int_S z dS \quad (2.1)$$

Analogamente, o momento estático da área  $S$  em relação ao eixo  $Z$  é dado por:

$$M_{S_z} = \int_S y dS \quad (2.2)$$

O momento estático é, essencialmente, o produto de uma área por uma distância (sua unidade é  $m^3$ ,  $cm^3$ , etc) e pode apresentar sinal positivo ou negativo, dependendo da posição da figura em relação aos eixos de referência.

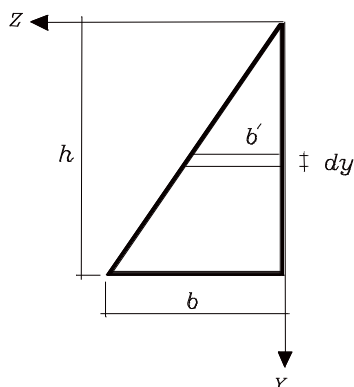
O centro de gravidade é definido como o ponto do plano da figura cujas coordenadas satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} M_{S_y} &= \int_S z dS = \bar{z} S \\ M_{S_z} &= \int_S y dS = \bar{y} S \end{aligned} \quad (2.3 \text{ a,b})$$

O momento estático de uma área com relação a um eixo de simetria, se houver, é nulo. Nessas condições, pelas (2.3) conclui-se que o centro de gravidade está localizado sobre o eixo de simetria da figura. Havendo dois ou mais eixos de simetria, o centro de gravidade estará sobre o centro de simetria.

Por outro lado, se a origem do sistema coincidir com o c.g., então  $\bar{z} = \bar{y} = 0$  e, também pelas (2.3), conclui-se que o centro de gravidade pode ser definido como o ponto em relação ao qual o momento estático da figura é nulo por qualquer eixo que passe por ele.

**Exemplo 1:** Para a seção indicada na figura 2.2, determinar o momento estático em relação ao eixo  $Z$  e a ordenada  $\bar{y}$  do centro de gravidade.



**Figura 2.2 - Seção transversal de forma triangular**

Para o cálculo do momento estático, deve-se realizar a integração indicada na relação (2.2).

Neste caso, é possível realizar a integração na área, por meio de uma integração dupla. Opera-se primeiro segundo  $z$ , no intervalo  $0-b'$  fixando-se a coordenada  $y$ ; em seguida, integra-se segundo  $y$  no intervalo  $0-h$ . Desse modo, também tomando partido da geometria triangular, que fornece a proporção  $b'(y) = \frac{b}{h}y$ , a dupla integração resulta:

$$\int_S y dS = \int_0^h \int_0^{hb'} y dz dy = \int_0^h \frac{b}{h} y^2 dy = \frac{bh^2}{3}$$

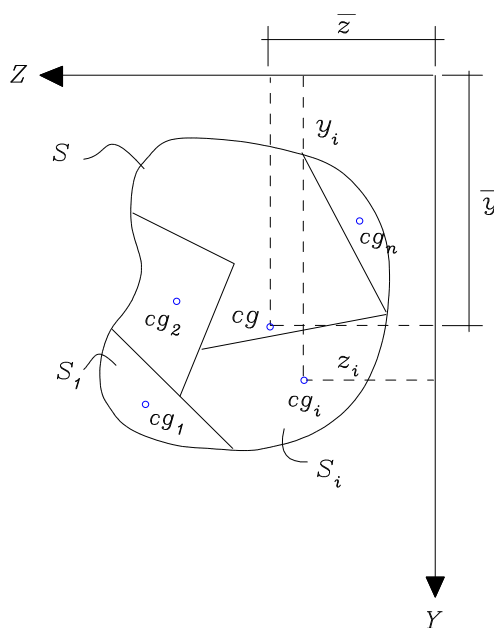
A ordenada do centro de gravidade segue pela (2.2b):

$$M_{S_z} = \int_S y dS = \bar{y} S \rightarrow \frac{bh^2}{3} = \bar{y} \frac{bh}{2} \quad \therefore \bar{y} = \frac{2}{3}h$$

De modo absolutamente análogo, pode-se determinar a coordenada  $\bar{z}$  do centro de gravidade. Nesse caso, porém, a integração referente ao momento estático em relação ao eixo  $y$  passa a ser dada por:

$$\int_S z dS = \int_0^h \int_0^{bh'} z dz dy = \int_0^h \frac{b^2}{2h^2} y^2 dy = \frac{b^2 h}{6}$$

Existem algumas figuras geométricas cuja área pode ser decomposta em áreas de geometria mais simples (v.fig.2.3).



**Figura 2.3 - Área de geometria composta**

Nesses casos, a integral sobre toda a área, que define o momento estático, pode ser dividida na soma de integrais sobre as áreas componentes:

$$\begin{aligned} M_{S_z} &= \int_S y dS = \int_{S_1} y dS + \int_{S_2} y dS + \dots + \int_{S_n} y dS \\ M_{S_y} &= \int_S z dS = \int_{S_1} z dS + \int_{S_2} z dS + \dots + \int_{S_n} z dS \end{aligned} \quad (2.4 \text{ a,b})$$

Por outro lado, para a área total valem as relações:

$$M_{S_y} = \int_S z dS = \bar{z} S \quad \text{e} \quad M_{S_z} = \int_S y dS = \bar{y} S \quad (2.5 \text{ a,b})$$



onde, agora,  $\bar{z}$  e  $\bar{y}$  são as coordenadas do seu centro de gravidade.

Analogamente, para as áreas menores segue que:

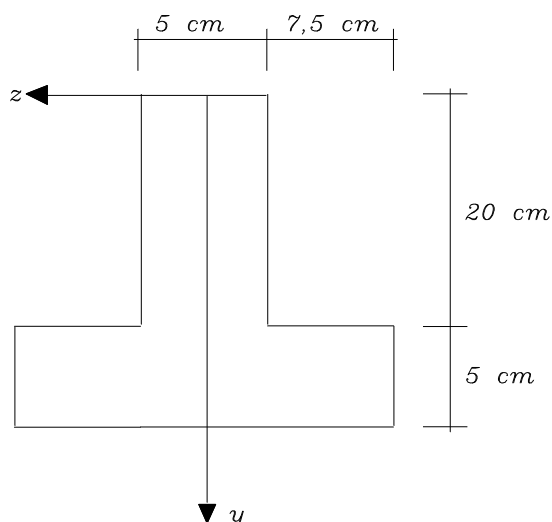
$$\int_{S_i} z dS = \bar{z}_i S_i \quad \text{e} \quad \int_{S_i} y dS = \bar{y}_i S_i \quad (2.5 \text{ c,d})$$

onde  $\bar{z}_i$  e  $\bar{y}_i$  são as coordenadas dos centros de gravidade individuais de cada uma das áreas.

Fazendo-se uso de uma notação de somatória, as (2.4) e (2.5) combinadas fornecem expressões práticas para a determinação das coordenadas do centro de gravidade de uma figura composta:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (2.6 \text{ a,b})$$

**Exemplo 2:** Determinar a posição do centro de gravidade da seção ilustrada na figura 2.4.



**Figura 2.4 - Área de geometria composta por retângulos**

A posição procurada é obtida em relação a certo referencial adotado convenientemente. De início, sabendo-se que o centro de gravidade está sobre o eixo de simetria da figura, faz-se com que um dos eixos do referencial coincida com o de simetria.

É usual adotar a origem do referencial dentro dos limites da seção, como a que está indicada na figura 2.4. A partir daí, a decomposição da área total em áreas mais simples geometricamente pode ser feita arbitrariamente, desde que a soma das áreas componentes seja igual à área total. No caso, é mais evidente a divisão em dois retângulos de área (5x20), aplicando-se, em seguida, as relações (2.6).

Assim procedendo, resulta:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \frac{S_1 \bar{y}_1 + S_2 \bar{y}_2}{S_1 + S_2} = \frac{5.20.10 + 5.20.22,5}{2.5.20} = 16.25 \text{ cm}$$

Obviamente, devido à simetria,  $\bar{z} = 0$ .

É importante observar que seja qual for a escolha sobre a posição da origem do referencial, ou mesmo da divisão da área total, a posição do centro de gravidade é única.

## 2.2 Momentos de segunda ordem

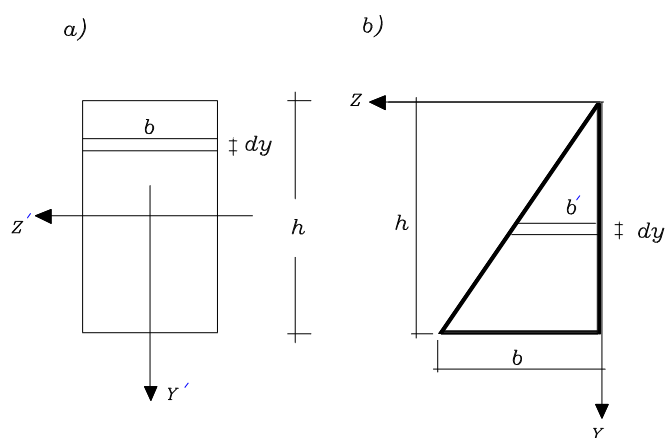
Considerando-se a mesma seção genérica ilustrada na figura 2.1, os momentos de segunda ordem são definidos pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_S z^2 dS \\ I_z &= \int_S y^2 dS \\ I_{yz} &= \int_S z y dS \end{aligned} \quad (2.7a, b, c)$$

onde  $I_y$  e  $I_z$  são denominados momentos de inércia em relação aos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $I_{yz}$  é denominado momento centrífugo ou produto de inércia.

Nota-se que os momentos de segunda ordem têm unidades de comprimento à quarta ( $\text{cm}^4$ ,  $\text{mm}^4$ , etc.), sendo que os momentos de inércia são essencialmente positivos, enquanto que o produto de inércia pode ser positivo ou negativo.

**Exemplo 3:** Determinar uma expressão para o momento de inércia em relação ao eixo  $z'$  do retângulo indicado na figura 2.5a.



**Figura 2.5 - a) seção retangular; b) seção triangular**

Neste caso a integral dupla pode ser reduzida a uma integral simples, definindo-se o elemento de área por:  $dS = b dy$ . Dessa forma resulta:

$$I_{z'} = \int_S y^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{b}{3} [y^3]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

**Exemplo 4:** Determinar uma expressão para o produto de inércia da área triangular indicada na figura 2.5b em relação aos eixos  $z$  e  $y$ .

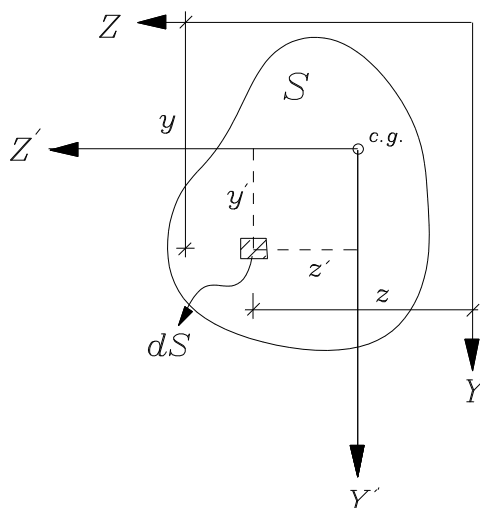
Tomando-se partido da transformação da integral e da proporção indicadas no exemplo 1, segue a solução:

$$\int_S yz \, dS = \int_0^h y \left( \int_0^{b'} z \, dz \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^h \frac{b'^2}{h^2} y^3 \, dy = \frac{b'^2 h^2}{8}$$

Nota-se que o sinal resultou positivo, como era de se esperar, uma vez que a seção está totalmente contida no quadrante positivo do sistema de referência.

### 2.3 Transportes dos momentos de segunda ordem por efeito da translação de eixos

Considerem-se conhecidos os momentos de segunda ordem de uma seção em relação a eixos arbitrários cuja origem está num ponto qualquer do plano da figura (v.fig.2.6). Em relação a esses eixos valem as definições (2.7).



**Figura 2.6 - Translação de eixos**

Seja, agora, outro par de eixos de referência,  $(z', y')$ , paralelo ao primeiro, porém com origem posicionada no centro de gravidade da seção. Em relação a esses novos eixos, momentos de segunda ordem podem ser calculados por meio de expressões análogas às (2.7):

$$\begin{aligned}
 I_{y'} &= \int_S z'^2 dS \\
 I_{z'} &= \int_S y'^2 dS \\
 I_{y'z'} &= \int_S z' y' dS
 \end{aligned}
 \tag{2.8a,b,c}$$

Tendo-se em vista que em relação aos eixos  $z$  e  $y$  o centro de gravidade da seção apresenta coordenadas  $c$  e  $d$ , respectivamente (v.fig.2.6), pode-se afirmar que as coordenadas de qualquer ponto da seção em relação aos dois sistemas de referência apresentam a seguinte correspondência:

$$y = y' + d \quad ; \quad z = z' + c \tag{2.9a,b}$$

Assim sendo, o momento de inércia  $I_z$  pode ser expresso na forma:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_S y^2 dS = \int_S (y' + d)^2 dS \\
 &= \int_S y'^2 dS + 2d \int_S y' dS + d^2 \int_S dS
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Cada uma das integrais que aparecem na (2.10) possui um significado. A primeira parcela é, por definição, o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $z'$ ; a segunda parcela é nula, porque o eixo de referência passa pelo centro de gravidade da seção; a última parcela é o produto do quadrado da distância entre os eixos coordenados  $z$  e  $z'$  pela área da seção. Portanto, a (2.10) pode ser escrita na forma:

$$I_z = I_{z'} + S \cdot d^2 \tag{2.11}$$

Essa última relação é usualmente referenciada como relação de transporte de inércia.

Analogamente, considerando-se o momento de inércia  $I_y$  pode-se deduzir a seguinte relação de transporte de inércia:

$$I_y = I_{y'} + S \cdot c^2 \tag{2.12}$$

Finalmente, uma relação de transporte para o produto de inércia pode também ser deduzida:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_S (y' + d)(z' + c) dS \\ &= \int_S y' z' dS + d \int_S z' dS + z \int_S y' dS + d c \int_S dS \end{aligned}$$

$$\therefore I_{yz} = I_{y'z'} + S \cdot c \cdot d \quad (2.13)$$

#### 2.4 Momentos de segunda ordem de figuras compostas

No caso de uma seção que possa ser decomposta em áreas de geometria mais simples, as integrais que definem os momentos de segunda ordem podem ser desmembradas na soma de integrais sobre as áreas menores, como indicam as relações que seguem:

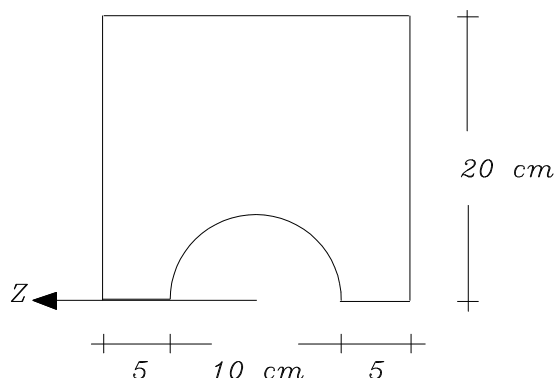
$$\begin{aligned} I_z &= \int_S y^2 dS = \int_{S_1} y^2 dS + \int_{S_2} y^2 dS + \dots + \int_{S_n} y^2 dS \\ I_y &= \int_S z^2 dS = \int_{S_1} z^2 dS + \int_{S_2} z^2 dS + \dots + \int_{S_n} z^2 dS \\ I_{yz} &= \int_S z y dS = \int_{S_1} z y dS + \int_{S_2} z y dS + \dots + \int_{S_n} z y dS \end{aligned} \quad (2.14a, b, c)$$

Como cada uma das áreas  $S_i$  possui centros de gravidade posicionados com coordenadas  $c_i$  e  $d_i$  em relação ao referencial adotado para escrever as (2.14), podem-se incluir as relações de transporte nas (2.14) e reescrevê-las nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_{i=1}^n (I_{y'_i} + S_i \cdot c_i^2) \\ I_z &= \sum_{i=1}^n (I_{z'_i} + S_i \cdot d_i^2) \\ I_{yz} &= \sum_{i=1}^n (I_{y'_i z'_i} + S_i \cdot c_i d_i) \end{aligned} \quad (2.15a, b, c)$$

**Exemplo 5:** Determinar o momento de inércia da seção indicada na figura 2.7, em relação ao eixo  $z$ .

A seção em questão pode ser formada pela diferença entre as áreas de um quadrado de lado 20 cm e um semicírculo de raio 5 cm. Por consequência, o momento de inércia da seção fica dado também pela diferença entre os respectivos momentos de inércia.



**Figura 2.7- Seção composta**

Empregando-se as regras de transporte, a solução do problema pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$I_{z_1} = I_{z_1}' + d^2 \cdot S = \frac{20 \cdot 20^3}{12} + 10^2 \cdot 20^2 = 53333,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{z_2} = I_{z_2}' + c^2 \cdot S = 0,1098 \cdot 5^4 + \left(\frac{4,5}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi 10^2}{8} = 624,18 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_z = I_{z_1} - I_{z_2} = 52709,15 \text{ cm}^4$$

**Exemplo 6:** Deduzir uma expressão para o cálculo do produto de inércia do triângulo da figura 2.5b em relação a eixos paralelos aos lá indicados e que passam pelo seu c.g.

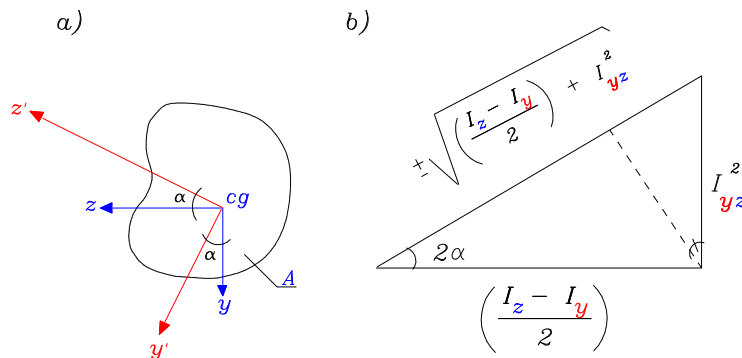
Neste caso, podem-se aproveitar os resultados dos exemplos 1 e 4 e utilizar a expressão do transporte 2.13:

$$I_{y'z'} = I_{yz} - S \cdot c \cdot d = \frac{b^2 h^2}{8} - \frac{bh}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{b^2 h^2}{72}$$

Nota-se o sinal positivo, indicando que para o sistema de eixos em questão é maior a contribuição das partes de área que possuem produto de inércia positivo. O sinal poderia resultar positivo para outra orientação dos eixos.

### 2.5 Efeito da rotação dos eixos sobre o cálculo dos momentos de segunda ordem

Uma situação que se apresenta com frequência é a necessidade de se determinar como variam os valores dos momentos de segunda ordem quando aos eixos de referência se impõe uma defasagem, ou giro de certo ângulo  $\alpha$  em relação às direções iniciais. A figura 2.8a ilustra a situação em análise.



**Figura 2.8 - a) eixos de referência defasados de um ângulo  $\alpha$   
b) interpretação geométrica da relação entre os momentos de segunda ordem**

Como convenção, a rotação é considerada positiva quando realizada no sentido horário. Entre as coordenadas dos pontos da seção, segundo os eixos iniciais e os defasados, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= z \cos \alpha - y \sin \alpha \\ \bar{y} &= z \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}\tag{2.16a, b}$$

Por outro lado, os momentos de segunda ordem podem ser calculados com relação aos novos eixos aplicando-se as definições:



$$\begin{aligned}
I_{\bar{y}} &= \int_S \bar{z}^2 dS \\
I_{\bar{z}} &= \int_S \bar{y}^2 dS \\
I_{\bar{y}\bar{z}} &= \int_S \bar{z} \bar{y} dS
\end{aligned}
\tag{2.18 a,b,c}$$

Substituindo-se nas definições acima, as (2.17), resultam:

$$\begin{aligned}
I_{\bar{z}} &= \int_S (z \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha)^2 dS = I_z \operatorname{cos}^2 \alpha + I_y \operatorname{sen}^2 \alpha + 2I_{yz} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \\
I_{\bar{y}} &= \int_S (z \operatorname{cos} \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)^2 dS = I_z \operatorname{sen}^2 \alpha + I_y \operatorname{cos}^2 \alpha - 2I_{yz} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \\
I_{\bar{y}\bar{z}} &= \int_S (z \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha)(z \operatorname{cos} \alpha - y \operatorname{sen} \alpha) dS \\
&= I_{yz} (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (I_y - I_z) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha
\end{aligned}
\tag{2.19 a,b,c}$$

Uma observação inicial que decorre das (2.19) é que a soma dos momentos de inércia é invariante em relação a um giro do sistema de referência, ou seja:

$$I_{\bar{z}} + I_{\bar{y}} = I_z + I_y \tag{2.20}$$

A outra observação é que os momentos de segunda ordem possuem uma variação contínua com  $\alpha$ , o que leva ao questionamento sobre a existência de direções particulares para os eixos em relação às quais correspondam, para aqueles momentos, valores extremos, máximo ou mínimo. Com relação à pesquisa de valores extremos, aquela que mais interessa é a dos momentos de inércia.

Nesse sentido, impondo-se a nulidade da primeira derivada da expressão de  $I_{\bar{z}}$  com relação a  $\alpha$ , obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{dI_{\bar{z}}}{d\alpha} = I_{yz} (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (I_y - I_z) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = I_{\bar{z}\bar{y}} = 0 \tag{2.21}$$

Portanto, conclui-se que segundo a direção em que o momento de inércia assume um valor extremo, o produto de inércia se anula.

Da (2.21) segue uma expressão para o cálculo do ângulo  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \quad (2.22)$$

relação que pode ser satisfeita para um certo ângulo  $\alpha$  e também por  $\alpha \pm \pi/2$ ; ou seja, os ângulos que satisfazem a (2.22) definem direções ortogonais entre si, devendo corresponder a cada uma delas um valor máximo ou mínimo do momento de inércia.

A substituição da (2.22) na (2.19a), leva às expressões para o cálculo dos valores máximo e mínimo dos momentos ditos principais de inércia, respectivamente aqui denotados por  $I_1$  e  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.23 \text{ a,b})$$

$$I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Uma maneira simples de se chegar às expressões (2.23) consiste em inicialmente reescrever a (2.19a) para a seguinte forma:

$$I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \left(\frac{I_z - I_y}{2}\right) \cos 2\alpha + I_{yz} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.24)$$

onde se empregaram as relações:  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$  e

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Na seqüência da dedução, a interpretação geométrica da

(2.22) proporcionada pela figura 2.8b, permite concluir que:

$$\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right) \cos 2\alpha + I_{yz} \operatorname{sen} 2\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.25)$$

de onde resultam as (2.23).

Uma observação importante neste ponto é sobre a utilização das expressões deduzidas.

Supondo que se queira determinar os momentos principais de inércia e suas direções a partir de valores de momentos de segunda ordem conhecidos em relação a um dado sistema de referência, as (2.23) permitem calcular diretamente os valores principais; já a (2.22) fornece as direções principais.

Entretanto, não se pode identificar, de imediato, a correspondência entre valor e direção principal. Isto é, para estabelecer corretamente a correspondência, é necessário um último passo que consiste em substituir o valor de um dos ângulos determinado pela (2.22), na expressão de  $I_{\bar{z}}$ , por exemplo. Necessariamente o valor resultante deverá coincidir com o valor de  $I_1$  ou de  $I_2$ , indicando que à direção definida por aquele ângulo corresponde a maior ou menor inércia, respectivamente.

Entretanto há uma alternativa para a prática descrita acima e consiste em determinar uma relação que forneça diretamente a correspondência entre direções e valores principais.

Com esse objetivo, seja, por hipótese,  $\alpha_1$  o ângulo de giro que deve ser dado ao eixo z para que o mesmo passe a ser o eixo de maior inércia  $\bar{z}$ . Então, da (2.19a) segue que:

$$I_1 = I_z \cos^2 \alpha_1 + I_y \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + 2I_{yz} \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 \quad (2.26)$$

Essa relação pode ser reescrita na forma:

$$I_1 - I_z = (I_y - I_z) \text{sen}^2 \alpha_1 + I_{yz} \text{sen} 2\alpha_1 \quad (2.27)$$

Mas o ângulo  $\alpha_1$  também satisfaz a (2.22), de onde se pode escrever que:

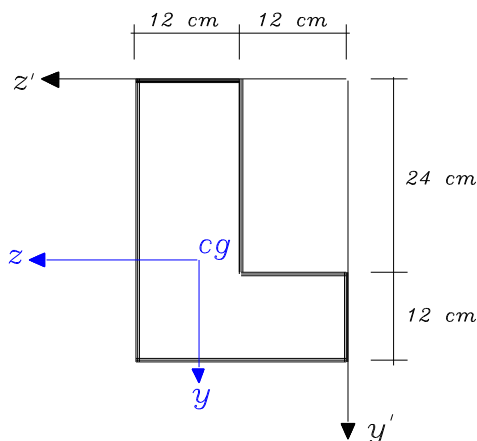
$$I_z - I_y = \frac{2I_{yz} \cos 2\alpha_1}{\text{sen} 2\alpha_1} \quad (2.28)$$

Substituindo-se a (2.28) na (2.27), e levando-se em conta que  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$ , após algumas passagens simples, obtém-se a relação procurada:

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{I_1 - I_z}{I_{yz}} \quad (2.29)$$

Portanto, vale frisar que  $\alpha_1$  é o ângulo entre o eixo  $z$  e o eixo ao qual se associa a maior inércia, devendo ser marcado no sentido horário se tiver valor positivo.

**Exemplo 7:** Determinar os momentos centrais principais de inércia, e as respectivas direções principais, da seção ilustrada na figura 2.9:



**Figura 2.9 - Seção de geometria composta**

Inicialmente, com relação a um sistema auxiliar de eixos, determina-se a posição do centro de gravidade da seção:

$$z_{cg} = \frac{(24 \cdot 12) \cdot 18 + (24 \cdot 12) \cdot 12}{2 \cdot (24 \cdot 12)} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

$$y_{cg} = \frac{(24 \cdot 12) \cdot 12 + (24 \cdot 12) \cdot 30}{2 \cdot (24 \cdot 12)} = 21 \text{ cm}$$

Para a determinação dos momentos principais, tomam-se como referência os eixos sobre o centro de gravidade da seção:

$$I_z = \frac{12 \cdot 24^3}{12} + (12 \cdot 24)(-9)^2 + \frac{24 \cdot 12^3}{12} + (12 \cdot 24)(9)^2 = 63936 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{24 \cdot 12^3}{12} + (12 \cdot 24)(3)^2 + \frac{12 \cdot 24^3}{12} + (12 \cdot 24)(-3)^2 = 22464 \text{ cm}^4$$

$$I_{zy} = (24 \cdot 12)(9)(-3) + (12 \cdot 24)(-9)(3) = -15552 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 43200 + 25920 = 69120 \text{ cm}^4$$

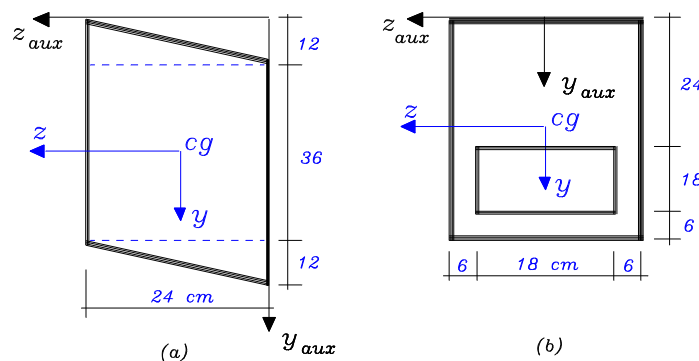
$$I_2 = 43200 - 25920 = 17280 \text{ cm}^4$$

O ângulo entre o eixo z e o eixo principal de maior inércia resulta:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{69120 - 63936}{-15552} = -0,3333 \rightarrow \alpha_1 = -18,43^\circ$$

□.

**Exemplo 8:** determinar os momentos centrais principais de inércia das seções indicadas na figura 2.10.



**Figura 2.10 - Seções de geometria composta**

A posição do centro de gravidade da figura 2.10a é imediata. Os momentos de segunda ordem em relação aos eixos centrais resultam:

$$I_z = \frac{24 \cdot 36^3}{12} + \left( \frac{24 \cdot 12^3}{36} + \frac{12 \cdot 24}{2} \cdot 22^2 \right) \cdot 2 = 235008 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{36 \cdot 24^3}{12} + \left( \frac{12 \cdot 24^3}{36} + \frac{12 \cdot 24}{2} \cdot 4^2 \right) \cdot 2 = 55296 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 2 \cdot \left( -\frac{12^2 \cdot 24^2}{72} + \frac{12 \cdot 24}{2} \cdot (4) \cdot (-22) \right) = -27648 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_1 = 239165 \text{ cm}^4 ; I_2 = 51139 \text{ cm}^4 \rightarrow \alpha_1 = -8,6^\circ$$

Para a seção b), que possui um eixo de simetria, o centro de gravidade estará sobre este eixo e as direções principais ficam também previamente definidas. Portanto, segue que:

$$y_{cg} = \frac{30 \cdot 48 \cdot 24 - 18 \cdot 18 \cdot 33}{30 \cdot 48 - 18 \cdot 18} = 21,38 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{30 \cdot 48^3}{12} + (30 \cdot 48)(2,61)^2 - \frac{18 \cdot 18^3}{12} + (18 \cdot 18)(11,61)^2 = 233868 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{48 \cdot 30^3}{12} - \frac{18^4}{12} = 99252 \text{ cm}^4$$

Assim sendo:  $I_1 = I_z$  e  $I_2 = I_y$

### 3 ESTUDO DA FLEXÃO

#### 3.1 Introdução

No caso de barras de eixo reto e com um plano longitudinal de simetria, quando o carregamento externo (incluindo-se forças distribuídas, concentradas ou mesmo momentos aplicados em pontos determinados) está contido naquele plano e possui componente transversal ao eixo, observa-se um comportamento particular dito de flexão.

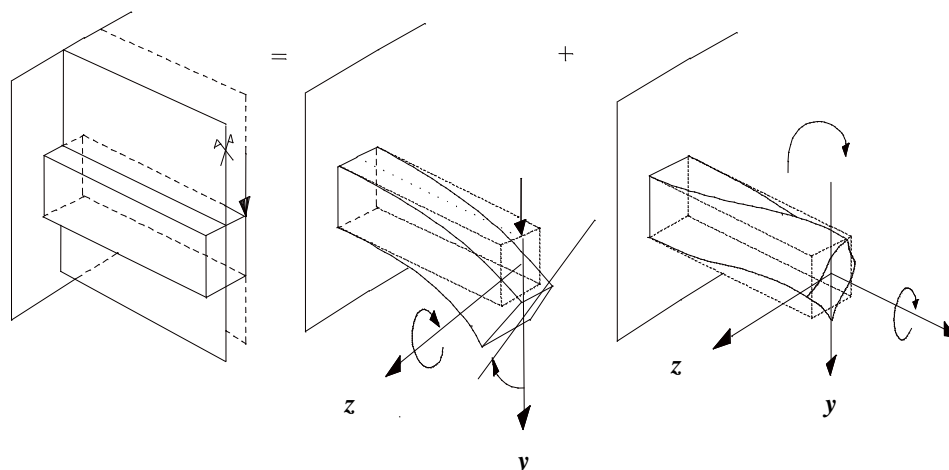
Genericamente o termo flexão indica uma mudança de curvatura do eixo. No caso das barras em consideração, como inicialmente a curvatura é nula, ela passa a ser diferente de zero, uma vez aplicado o carregamento.

Eventualmente, outro comportamento que a barra pode apresentar é a torção. Esta resposta tende a aparecer sempre que o plano de carregamento não coincida com o plano longitudinal de simetria; ou então, de modo mais geral, válido inclusive para as barras cujas seções transversais não apresentam qualquer eixo de simetria, quando o plano de carregamento não contenha pontos geométricos, que podem ser identificados em cada uma das seções, denominados centros de torção (\*).

Para diferenciar melhor os dois comportamentos, tome-se por base uma situação onde o carregamento é transversal ao eixo indeslocado. Geometricamente, enquanto que na flexão as seções transversais giram em torno de um eixo contido no plano da seção e que passa pelo centro de gravidade, na torção elas giram em torno de um eixo perpendicular ao plano e que passa pelo centro de torção (as posições do centro de gravidade e do centro de torção coincidem nas seções com dois ou mais eixos de simetria). A figura 3.1 ilustra os comportamentos em questão.

---

(\*) A determinação da posição do centro de torção será objeto de capítulo específico.



**Figura 3.1 - Comportamentos de flexão e de torção**

Vale adiantar também que, em geral, por efeito da torção a seção transversal deixa de ser plana, num fenômeno denominado de empenamento (v.fig.3.1). A torção é ainda dita livre quando os vínculos não impõem qualquer impedimento ao empenamento.

Quando coexistem flexão e torção tem-se, na barra, um estado dito de torção composta.

Admitindo-se válidas as hipóteses de proporcionalidade entre carga e deslocamento e de que os vínculos permitem a livre torção, os efeitos de flexão e de torção apresentam-se desacoplados e podem ser estudados independentemente; em outras palavras, vale a superposição de efeitos (v.fig.3.1).

No estudo que se desenvolve neste capítulo, aborda-se exclusivamente o efeito de flexão provocado pelo carregamento aplicado, sendo que a torção será tratada em capítulo próprio.

### 3.2 A flexão composta e os casos mais simples

Inicialmente considere-se, de outro ponto de vista, não o carregamento aplicado, mas os esforços momento fletor, cortante e normal, por ele provocado nas seções transversais ao longo da barra. Sob esse ponto de vista, diz-se que a flexão é uma resposta para a qual contribuem cada um daqueles esforços, sendo, por este motivo, denominada flexão composta.



A flexão composta constitui um caso geral. Entretanto, em algumas situações pode haver flexão sem que o conjunto de esforços mencionados esteja completo, isto é: mesmo na ausência de força normal ou das forças normal e cortante.

Por exemplo, considerem-se as vigas <sup>(\*)</sup>. Nos casos em que por efeito do carregamento e da vinculação apresentada não haja força normal nas seções transversais, as vigas podem exibir modos mais básicos de flexão, assim denominados: flexão simples e flexão pura. Tais modos decorrem da existência ou não, respectivamente, de força cortante acompanhando o momento fletor na seção.

No que segue, desenvolve-se o estudo da flexão em seus diferentes modos: pura, simples e composta, deduzindo-se expressões para o cálculo de deslocamentos, deformações e tensões nos pontos da barra.

Destaca-se, particularmente, dentro do item da flexão pura, a hipótese cinemática geral, válida para todos os modos, que tem como finalidade dar uma interpretação simples para o comportamento das barras em regime de flexão.

Nota-se que a seqüência de apresentação é a mesma adotada no estudo das barras submetidas a esforço normal isto é: estabelecida a hipótese cinemática, obtém-se, para cada um dos casos, as expressões para a determinação dos valores das componentes de deformação e de tensão.

Como se mostrará, as expressões para as componentes de deformação derivam da compatibilidade com o campo de deslocamentos e as de tensão por coerência com o modelo constitutivo adotado, que será, inicialmente, o elástico-linear.

### *3.3 Flexão pura normal*

Considere-se, inicialmente, uma viga, como a ilustrada na figura 3.2a, prismática, simplesmente apoiada e cujas seções

---

<sup>(\*)</sup> Barras dispostas horizontalmente, com um ou mais apoios e com carregamento transversal ao seu eixo.

transversais apresentam um eixo de simetria. O carregamento externo é constituído por momentos contidos no plano longitudinal de simetria e aplicados nas extremidades apoiadas da viga.

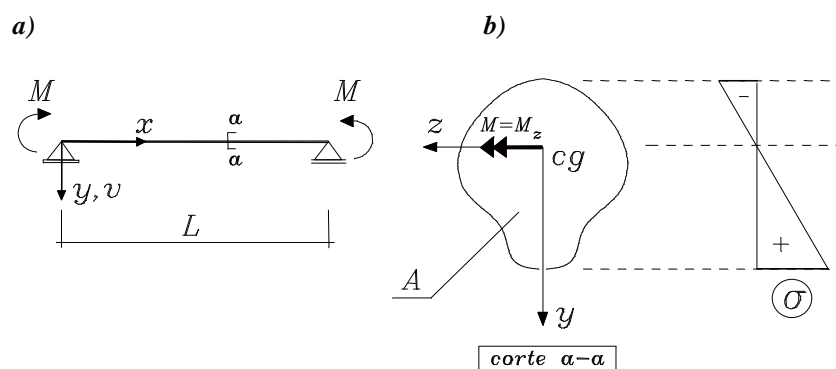
Numa análise preliminar sobre o comportamento da viga, é razoável imaginar que a deformação resultante leva ao aparecimento de tensões normais de tração e de compressão em pontos de uma seção transversal genérica.

De fato, imaginando-se que a barra seja composta pela superposição de um número grande de lâminas, a mudança de curvatura imposta a todo o conjunto pelo carregamento externo faz com que algumas das lâminas sofram alongamento enquanto outras apresentem encurtamento; haverá, inclusive, uma delas que não apresentará qualquer alteração de seu comprimento. Observando-se, então, as variações de comprimento de cada lâmina isoladamente, compreende-se que a essas variações devam estar associadas tensões normais longitudinais.

Nesse modelo simples de comportamento é usual desconsiderar a pressão exercida de uma lâmina sobre a outra, desprezando-se, por consequência, tensões normais com direção transversal ao eixo.

As tensões normais de tração e de compressão na seção transversal devem ter resultantes iguais em módulo, uma vez que não há força normal à seção, provocada pelo carregamento aplicado, a ser equilibrada internamente. Entretanto essas mesmas resultantes devem gerar um momento que equilibra o momento aplicado pelo carregamento externo.

Numa situação como esta, em que nas seções transversais existe somente um momento aplicado e que está contido no plano de simetria da seção, conforme ilustrado na figura 3.2b, caracteriza-se a chamada flexão pura normal.



**Figura 3.2- Flexão pura normal**

Nota-se que na figura 3.2b) está representado o vetor do momento fletor, marcado perpendicularmente ao plano de atuação do momento e com sentido definido pela regra da mão direita.

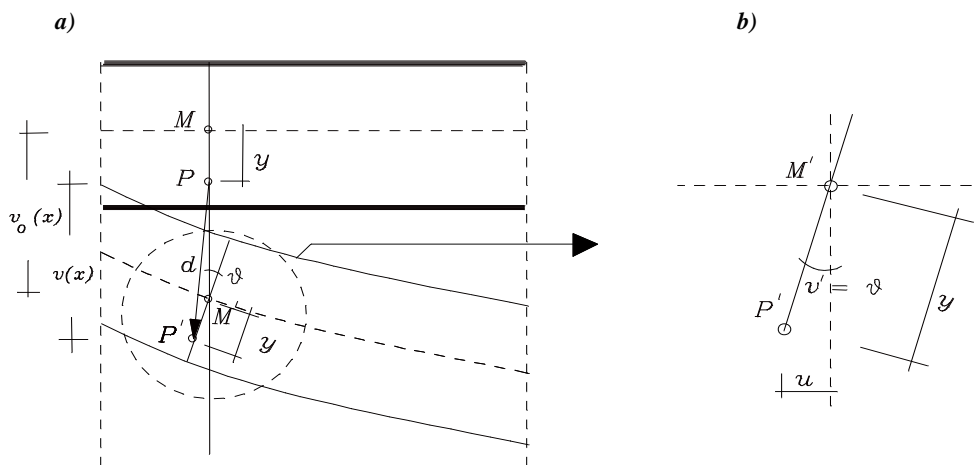
Nessa análise preliminar, nada se pode afirmar quanto à distribuição das tensões na seção. Como se mostrará, ela é consequência do regime de deformações e das propriedades do material. Como, por sua vez, as deformações derivam do campo de deslocamentos, todo o equacionamento matemático decorre da hipótese adotada sobre o mesmo, a chamada hipótese cinemática.

### 3.3.1 Hipótese cinemática de Bernoulli-Navier e relação deformação-deslocamento

Uma hipótese razoável para a flexão pura, justificada por observação experimental, é que o campo de deslocamentos seja tal que as seções transversais inicialmente planas permaneçam planas e ortogonais ao eixo deslocado.

Decorrem dessa hipótese as seguintes relações para as componentes vertical e horizontal do vetor deslocamento  $d$  de um ponto  $P$  qualquer da viga (v.fig.3.3a):

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0(x) - y(1 - \cos\theta) \\ u(x) &= -y \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \quad (3.1a,b)$$



**Figura 3.3 - Representação da hipótese cinemática num corte longitudinal**

Uma vez que a seção permanece plana e ortogonal ao eixo deslocado, o ângulo  $\theta$  confunde-se com a primeira derivada da função  $v(x)$ . Por outro lado, nas situações em que o giro  $\theta$  da seção é muito pequeno, valem as aproximações:  $\cos\theta \approx 1$ ;  $\sin\theta \approx \text{tg}\theta \approx \theta$ .

Assim, resultam as seguintes formas simplificadas para as componentes horizontal e vertical do deslocamento:

a-) O deslocamento vertical de um ponto qualquer da viga é função somente da sua coordenada longitudinal  $x$  e igual ao deslocamento do ponto de mesma coordenada situado sobre o eixo:

$$v(x) = v_0(x) \quad (3.1c)$$

b-) O deslocamento horizontal de um ponto da viga é proporcional ao produto de sua distância ao eixo pela derivada da função deslocamento (v.fig.3.3b):

$$u(x) = -y \frac{dv(x)}{dx} = -yv'(x) \quad (3.1b)$$

onde o sinal negativo indicada que, para um produto  $yv'(x)$  positivo, o deslocamento é contrário ao sentido apontado pelo eixo  $x$ .

Observa-se que todo o comportamento da viga está sendo descrito no seu plano longitudinal de simetria, onde variam as coordenadas  $x$  e  $y$ ; de fato, o campo de deslocamentos independe da coordenada  $z$ . Portanto, usando-se de uma notação vetorial, e simbolizando-se por  $d$  o vetor deslocamento de um ponto qualquer, vale a seguinte relação:

$$d(x, y) = u(x, y)e_1 + v(x)e_2 + 0e_3 = -[yv'(x)]e_1 + v(x)e_2 \quad (3.2)$$

onde  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  são versores associados aos eixos de referência.

Tendo sido caracterizado o campo de deslocamentos, as deformações seguem por compatibilidade.

Para o cálculo das componentes de deformação, valem as relações gerais (1.11), (1.12) e (1.13), deduzidas no capítulo 1 e que as definem no plano. Aplicando-se aquelas relações resultam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = -yv''(x) \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -v' + v' = 0 \quad (3.5)$$

Nota-se, de imediato, que somente uma das componentes não é nula e isto é uma consequência direta da hipótese cinemática adotada.

### 3.3.2 Relações tensão-deformação

As expressões das componentes de tensão no mesmo plano  $(x,y)$  resultam da consideração de uma resposta elástica linear para o material. Valem, naturalmente, as relações gerais que estendem a aplicação da lei de Hooke para o caso plano.

Neste modelo simplificado, porque somente uma das componentes de deformação é não nula e também porque se despreza a tensão  $\sigma_y$  (o que, de forma equivalente, implica em considerar nulo o efeito de Poisson)<sup>(\*)</sup>, resultam:

$$\sigma_x = -E y v''(x) ; \quad \sigma_y = 0 ; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.6 \text{ a,b,c})$$

Fixando-se numa certa seção, observa-se que  $\sigma_x$  se distribui linearmente ao longo da altura. Por outro lado, tem valor constante para todos os pontos que ocupam uma mesma cota  $y$ , ou seja: invariável na largura por ser independente de  $z$ .

Nota-se, também, que a (3.6a) indica que a tensão normal é nula nos pontos em que  $y = 0$ , os quais se situam sobre o eixo  $z$ ; além disso, esse eixo divide a seção em zonas tracionada e comprimida (os sinais das tensões mudam), recebendo, por isso, o nome de Linha Neutra.

### 3.3.3 Relações de equilíbrio

O equilíbrio estático deve ser atendido de uma forma geral. Assim, as resultantes das tensões normais e de cisalhamento na seção devem ser iguais, respectivamente, aos esforços normal e cortante oriundos do carregamento externo; além disso, as tensões normais devem também gerar um momento resultante na seção igual ao momento fletor calculado em função do carregamento externo. Portanto, valem as seguintes condições:

---

<sup>(\*)</sup> A seção gira permanecendo rígida no seu plano.

$$V = \int_A \tau_{xy} dA \quad (3.7 \text{ a})$$

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (3.7 \text{ b})$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \quad (3.7 \text{ c})$$

No caso estudado, sabe-se que o carregamento externo não provoca na seção transversal esforço normal e esforço cortante; portanto, segue que  $V = 0$  e  $N = 0$ .

Por um lado, a condição de esforço cortante nulo é trivialmente atendida tendo-se em vista a (3.6c); por outro lado, substituindo-se a (3.6 a) na (3.7b) segue que:

$$N(x) = -Ev''(x) \int_A y dA \quad (3.8)$$

Portanto, para que o esforço normal calculado pelas tensões  $\sigma_x$  seja nulo então:  $\int_A y dA = 0$ , o que é possível se o eixo  $z$ , com relação ao qual se medem as distâncias  $y$ , passar pelo centro de gravidade da seção. Conclui-se, por conseqüência, que neste caso a linha neutra deve conter o centro de gravidade da seção.

### 3.3.4 O problema de análise estrutural

Conhecidos o carregamento e as condições de contorno, o problema de análise estrutural consiste em determinar os campos de deslocamento, deformação e de tensão em qualquer ponto da viga.

A resposta para este problema pode ser encontrada combinando-se as (3.6a) e (3.7c), o que, em última análise, é a combinação das relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva. Dessa forma resulta:

$$M_z(x) = -E v''(x) \int_A y^2 dA = -EI_z v''(x) \quad (3.9)$$

onde  $I_z = \int_A y^2 dA$  é o momento de inércia da seção em relação ao eixo z.

A (3.9) constitui-se em expressão geral para o cálculo da componente vertical do deslocamento dos pontos da viga em função da distribuição de momentos devida ao carregamento aplicado, devendo-se, naturalmente, acrescentar as condições de contorno. A forma mais usual para aquela expressão é a seguinte:

$$v''(x) = -\frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (3.10a)$$

Essa última forma é também denominada relação momento-curvatura, uma vez que, sendo os giros muito pequenos,  $v''(x)$  pode ser interpretada como a curvatura da elástica no ponto. De fato, da geometria diferencial, a curvatura ( $1/r$ ) num ponto de uma curva qualquer definida pela função  $v(x)$  é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{v''(x)}{[1 + v'^2(x)]^{3/2}} \quad (3.10b)$$

Então se  $v'^2(x) \ll 1$  resulta que  $\frac{1}{r} \approx v''(x)$ , onde  $r$  é o raio de curvatura no ponto.

Para exemplificar a integração da (3.10a), no caso em análise o momento tem distribuição constante ao longo do comprimento, de modo que se pode deduzir facilmente a seguinte relação para  $v(x)$ :

$$v(x) = A_1 + A_2 x - \frac{M_z x^2}{2EI_z} \quad (3.11)$$

Impondo-se as condições de contorno que consistem em deslocamento vertical nulo nas extremidades da viga, conforme



ilustrado na figura (3.2a), as constantes  $A_1$  e  $A_2$  ficam determinadas por:

$$v(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0 ; \quad v(L) = 0 \rightarrow A_2 = \frac{M_z L}{2EI_z}$$

Assim, os deslocamentos verticais podem ser calculados por:

$$v(x) = \frac{M_z L^2}{2EI_z} \left[ \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

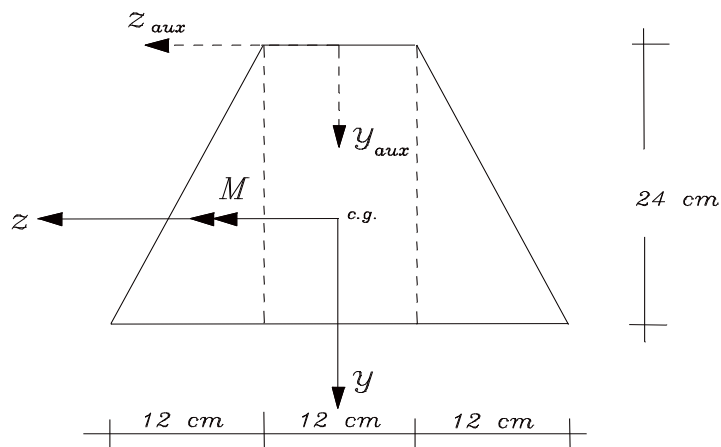
Um aspecto importante a ressaltar é que combinando as (3.6a) e (3.9) de tal modo a eliminar a curvatura, obtém-se uma expressão que permite determinar a tensão normal em qualquer ponto da seção transversal diretamente em função de sua geometria e do momento imposto pelo carregamento externo:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (3.13)$$

Essa relação mostra que a distribuição de  $\sigma_x$  é linear na altura da seção (v.fig.3.2b).

**Exemplo 1a:** Admita-se que a viga da figura 3.2 tenha seção transversal trapezoidal, com um eixo vertical de simetria e com as dimensões indicadas na figura 3.4. Pede-se determinar o maior valor do momento fletor que pode ser aplicado de modo que a tensão normal em módulo não exceda  $5,0 \text{ kN/cm}^2$ .

Para a solução deste problema deve-se procurar o ponto da viga mais solicitado à tensão normal e impor que o seu valor não exceda o limite de  $5,0 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 3.4 - Seção trapezoidal**

Como se trata de uma viga submetida a uma distribuição constante de momento fletor ao longo do seu comprimento, o regime de tensão se repete em todas as seções. Numa seção arbitrária os pontos mais solicitados serão aqueles mais afastados do eixo  $z$ , que passa pelo centro de gravidade. O valor da tensão normal será então determinado pela aplicação da relação (3.13).

Um passo essencial na resolução é a determinação da posição do centro de gravidade da seção. Para esse fim um sistema auxiliar de referência deve ser posicionado no plano da seção. Tomando-se partido do fato de que a seção apresenta um eixo de simetria e, portanto, necessariamente o centro de gravidade estará sobre este eixo, um sistema auxiliar pode ser aquele indicado na figura 3.5.

Por outro lado, a forma trapezoidal pode ser dividida em áreas de geometrias mais simples, como a triangular e a retangular, conforme indicado na figura 3.5.

Aproveitando-se da divisão de áreas sugerida, a área total  $S$  da seção fica expressa por:

$$S = 12 \cdot 24 + 2 \cdot \frac{12 \cdot 24}{2} = 2 \cdot 12 \cdot 24 \text{ cm}^2$$

Por sua vez a coordenada  $y_{cg}$  pode ser calculada por:

$$y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i y_i}{S} = \frac{12.24.16 + 12.24.12}{2.12.24} = 14 \text{ cm}$$

Determinada a posição do centro de gravidade, pode-se posicionar o sistema de referência com origem nele, mantendo-se o eixo  $y$  coincidente com o eixo de simetria da seção.

Nessas condições, o momento de inércia de toda a seção com relação ao eixo central  $z$  pode ser calculado pela contribuição de cada uma das áreas mais simples anteriormente definidas. Faz-se uso da regra de transporte de inércia para a estimativa de cada uma das parcelas:

$$I_z = \left[ \frac{12.24^3}{12} + 12.24.(-2)^2 \right] + \left[ \frac{24.24^3}{36} + 12.24.(2)^2 \right] = 25344 \text{ cm}^4$$

Determinadas as características geométricas, passa-se ao cálculo das tensões normais nos pontos mais afastados do eixo  $z$ , já impondo que os respectivos valores não ultrapassem o limite fixado.

Assim, para um ponto de coordenada  $y = 10 \text{ cm}$  resulta:

$$\sigma_x = \frac{M}{25344} \cdot 10 \leq 5,0 \rightarrow M \leq 12672 \text{ kN.cm}$$

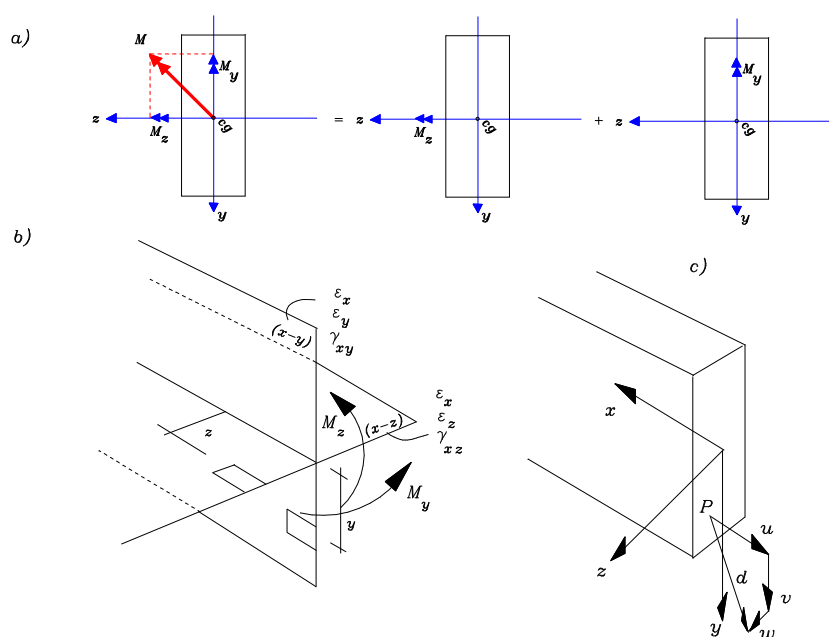
Para um ponto de coordenada  $y = -14 \text{ cm}$ , obtém-se:

$$\sigma_x = \frac{M}{25344} \cdot -14 \geq -5,0 \rightarrow M \leq 9051,4 \text{ kN.cm}$$

Portanto a resposta é:  $M \leq 9051,4 \text{ kN.cm}$

### 3.4 Flexão pura oblíqua

Numa segunda situação, admita-se que a viga em estudo, apresente uma seção transversal com dois eixos de simetria e que o momento atue segundo um plano inclinado com relação aos eixos de simetria: trata-se de uma flexão pura oblíqua (fig.3.5a).



**Figura 3.5- Decomposição de vetor momento segundo os eixos de simetria**

Tendo-se em vista a possibilidade de decomposição do momento em componentes segundo os eixos de simetria e fazendo-se uso da superposição de efeitos, a nova expressão para o vetor deslocamento global é a seguinte (v.fig.3.25c):

$$d = u(x, y, z)e_1 + v(x)e_2 + w(x)e_3 = -[yv'(x) + zw'(x)]e_1 + v(x)e_2 + w(x)e_3 \quad (3.14)$$

onde  $v(x)$  e  $w(x)$  denotam as componentes do deslocamento transversal ao eixo, segundo os planos  $x-y$  e  $x-z$ , respectivamente.

O estado de deformação é, em princípio, mais complexo do que no caso anterior, uma vez que, considerando-se válida a superposição de efeitos, ele apresenta componentes de deformação segundo os planos  $x-y$  e  $x-z$  (v.fig.3.25b).

Assim, no plano  $x-y$  existem  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  enquanto que no plano  $x-z$  existem  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_z$  e  $\gamma_{xz}$ . Entretanto, apesar da aparente

complexidade, somente uma das componentes é diferente de zero conforme se mostra em seguida.

As relações entre deformação e deslocamento no plano x-y são iguais àquelas determinadas no item anterior pelas (3.3), (3.4) e (3.5); no plano x-z as correspondentes componentes de deformação são determinadas por relações análogas. As relações de compatibilidade são:

$$\varepsilon_x = -y v'' - z w'' \quad (3.15 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x)}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w(x)}{\partial z} = 0 \quad (3.15 \text{ b, c})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -v' + v' = 0 \quad (3.16 \text{ a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x)}{\partial x} = -w' + w' = 0 \quad (3.16 \text{ b})$$

A aplicação direta da Lei de Hooke permite determinar de imediato a expressão para a única componente de tensão não nula (\*):

$$\sigma_x = -y E v'' - z E w'' \quad (3.17)$$

Nota-se que essa tensão normal possui uma distribuição linear sobre a seção e tem valor nulo particularmente no ponto de coordenadas  $y = z = 0$ .

Naturalmente a resultante das tensões normais sobre a seção deve ser nula, uma vez que não há força normal aplicada:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (3.18)$$

Substituindo-se a (3.17), resulta:

$$N = -E v''(x) \int_A y dA - E w'' \int_A z dA = 0 \quad (3.19)$$

---

(\*) A exemplo do primeiro caso, como  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$  o efeito de Poisson é desconsiderado.

Nota-se que as integrais representam momentos estáticos, ou momentos de primeira ordem, com relação aos eixos de referência contidos no plano da seção. Assim, a condição de força normal nula pode ser atendida tomando-se o centro de gravidade da seção para origem dos eixos de referência.

Por outro lado, as resultantes dos momentos das forças elementares  $\sigma_x dA$  com relação aos eixos  $z$  e  $y$  devem ser iguais às componentes  $M_z$  e  $M_y$  do momento aplicado, respectivamente:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma_x y dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA \end{aligned} \quad (3.20 \text{ a,b})$$

Substituindo-se as (3.17), resultam:

$$\begin{aligned} M_z &= -E v''(x) \int_A y^2 dA - E w''(x) \int_A y z dA \\ M_y &= -E v''(x) \int_A y z dA - E w''(x) \int_A z^2 dA \end{aligned} \quad (3.21 \text{ a,b})$$

As integrais que aparecem representam grandezas que dependem da geometria da seção, denominadas momentos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A z^2 dA \\ I_{yz} &= \int_A y z dA \end{aligned} \quad (3.22 \text{ a,b,c})$$

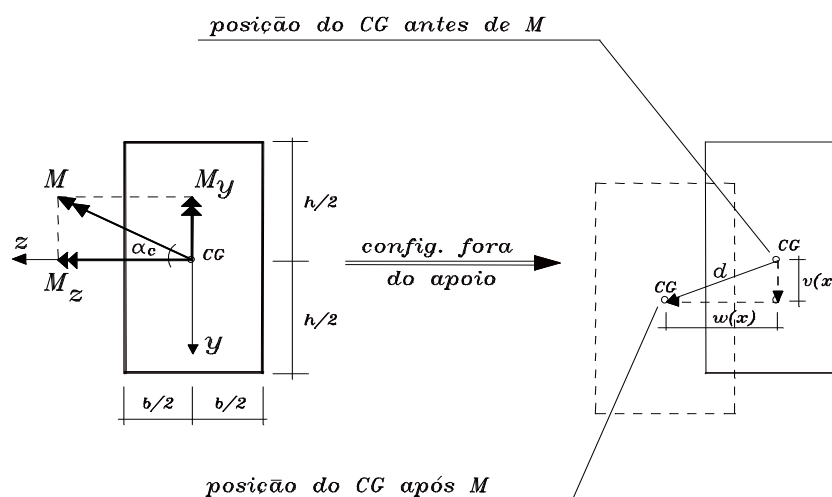
Até este ponto da análise, o fato da seção possuir dupla simetria foi irrelevante, o que significa que o desenvolvimento é válido para qualquer que seja a forma da seção transversal.

As (3.21) assumem uma redação mais simples se coincidirem os eixos de referência com os eixos principais de inércia, pois nesse caso o produto de inércia é nulo. Vale lembrar que nas

seções com dupla simetria, como a indicada na figura 3.5, os eixos de simetria são eixos centrais principais de inércia. Assim, a partir de tal coincidência,  $I_z$  e  $I_y$  podem ser interpretados como momentos principais centrais de inércia e as relações (3.21) passam a:

$$\begin{aligned} M_z(x) &= -EI_z v''(x) \quad ; \\ M_y(x) &= -EI_y w''(x) \end{aligned} \quad (3.23 \text{ a,b})$$

Nessas condições, portanto, as equações diferenciais resultam independentes e suas integrações, em moldes absolutamente idênticos ao apresentado na flexão pura normal, levam à determinação das componentes do deslocamento dos pontos da seção, ilustrados na figura 3.6.



**Figura 3.6 - Componentes do deslocamento dos pontos da seção**

Dessas últimas relações segue ainda que:

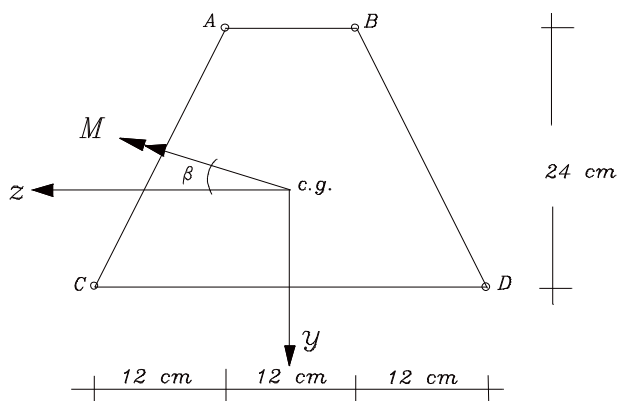
$$Ev''(x) = -\frac{M_z(x)}{I_z} \quad ; \quad Ew''(x) = -\frac{M_y(x)}{I_y} \quad (3.24 \text{ a,b})$$

Combinando-se, finalmente, as (3.23) com a (3.17) conclui-se que tomando como referência no plano da seção os eixos centrais principais de inércia, a tensão normal num ponto qualquer de coordenadas  $y$  e  $z$  pode ser determinada por:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (3.25)$$

É importante observar que a consideração dos eixos principais tem um caráter bastante geral e permite validar a (3.25), e de resto todo o desenvolvimento anterior, também para seções com geometria qualquer. Aliás, nas seções geometricamente quaisquer, a flexão pura normal se caracteriza sempre que o vetor do momento estiver sobre um dos eixos principais.

**Exemplo 1b:** Seja a mesma seção trapezoidal do exemplo 1a, submetida à flexão oblíqua, sendo o vetor do momento inclinado de um ângulo  $\beta$  com relação ao eixo  $z$ , conforme ilustra a figura 3.6a. Impondo-se que a tensão normal não ultrapasse, em módulo, o valor de  $5 \text{ kN/cm}^2$ , pede-se encontrar um valor limite para o momento aplicado. Dado complementar:  $\cos \beta = 0,8$ .



**Figura 3.6a - Flexão oblíqua**

A expressão (3.25) para o cálculo da tensão normal num ponto qualquer da seção assume a forma:

$$\sigma_x = \frac{M \cos \beta}{I_z} y + \frac{M \sin \beta}{I_y} z$$



O elemento geométrico adicional a ser determinado é o momento de inércia segundo o eixo  $y$ . Aproveitando-se da mesma divisão de áreas adotada no exemplo 1.a, resulta:

$$I_y = \left[ \frac{24.12^3}{36} + \frac{12.24}{2} \cdot 10^2 \right] \cdot 2 + \frac{24.12^3}{12} = 34560 \text{ cm}^4$$

Lembrando-se que o momento de inércia segundo o eixo  $z$  é dado por  $I_z = 25344 \text{ cm}^4$ , pode-se passar a analisar a distribuição de tensão normal na seção.

Os pontos mais solicitados certamente estarão no perímetro da seção e, entre eles, é suficiente que sejam considerados os vértices A, B, C e D.

As coordenadas dos vértices são as seguintes:

$$A(y, z) = (-14 ; 6)$$

$$B(y, z) = (-14 ; -6)$$

$$C(y, z) = ( 10 ; 18)$$

$$D(y, z) = ( 10 ; -18)$$

Substituindo-se as coordenadas de cada um dos vértices da seção na expressão de  $\sigma_x$ , e respeitando-se o limite imposto para o valor da tensão normal em módulo, obtêm-se as limitações abaixo apresentadas:

$$\sigma_A = -3,77 \cdot 10^{-4} M \geq -5 \rightarrow M \leq 13262,6 \text{ kN.cm}$$

$$\sigma_B = -5,46 \cdot 10^{-4} M \geq -5 \rightarrow M \leq 9157,5 \text{ kN.cm}$$

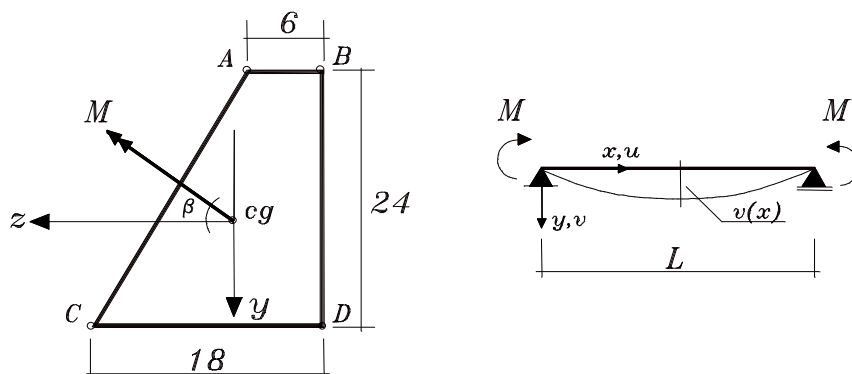
$$\sigma_C = 6,283 \cdot 10^{-4} M \leq 5 \rightarrow M \leq 7959,2 \text{ kN.cm}$$

$$\sigma_D = 3,157 \cdot 10^{-4} M \leq 5 \rightarrow M \leq 15837,8 \text{ kN.cm}$$

A resposta procurada é  $M = 7959,2 \text{ kN.cm}$

**Exemplo 2:** Considere-se que uma viga biapoiada submetida à ação de momentos de flexão aplicados nas suas extremidades, tenha

seção transversal com a forma ilustrada na figura 3.7. No plano da seção o vetor momento está inclinado de um ângulo  $\beta$  com relação a um eixo horizontal  $z$  que passa pelo centro de gravidade, sendo  $\cos\beta = 0,8$ . Impondo-se que a tensão normal não ultrapasse, em módulo, o valor de  $5 \text{ kN/cm}^2$ , pede-se encontrar um valor limite para o momento aplicado.



**Figura 3.7 - Viga com seção transversal trapezoidal submetida a flexão pura oblíqua**

Inicialmente a posição do centro de gravidade da seção pode ser determinada com relação a eixos auxiliares de referência  $z_{aux}$ ,  $y_{aux}$ , que passam pelo ponto B, obtendo-se as seguintes coordenadas:

$$y_{cg} = 14 \text{ cm} ; z_{cg} = 6,5 \text{ cm}.$$

Posicionando-se então os eixos de referência com origem no c.g., conforme ilustra a figura 3.7, os momentos de segunda ordem resultam:

$$I_z = [(6 \cdot 24^3)/12] + [6 \cdot 24 \cdot (-2^2)] + [(13 \cdot 24^3)/36] + [6 \cdot 24 \cdot (2^2)] = 12672 \text{ cm}^4$$

$$I_y = [(24 \cdot 6^3)/12] + [6 \cdot 24 \cdot (-3,5^2)] + [(24 \cdot 12^3)/36] + [6 \cdot 24 \cdot (3,5^2)] \\ = 5112 \text{ cm}^4$$

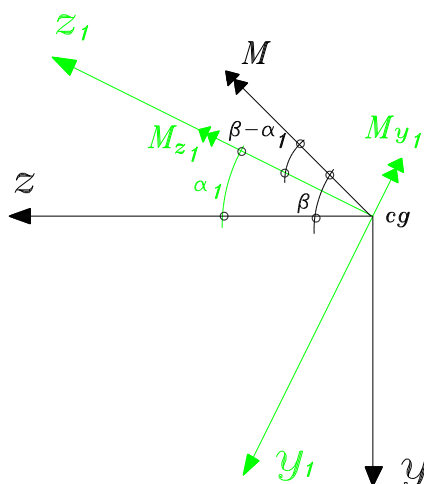
$$I_{yz} = (6 \cdot 24) \cdot (-2) \cdot (-3,5) + (12^3 \cdot 24^2)/72 + (6 \cdot 24) \cdot (2) \cdot (3,5) = 3168 \text{ cm}^4$$

Nessas condições, pode-se calcular os valores dos momentos principais de inércia  $I_1$  e  $I_2$  e a inclinação  $\alpha_1$  do eixo principal de maior inércia com relação ao eixo  $z$ . Assim, resultam:

$$I_1 = 13824 \text{ cm}^4; I_2 = 3960 \text{ cm}^4 \text{ e } \alpha_1 = 19,98^\circ$$

Na figura 3.8, representa-se a decomposição do vetor momento  $M$  com relação aos eixos principais, apresentando os seguintes valores:

$$M_{z_1} = M \cos(\beta - \alpha_1) = \frac{22,4 M}{\sqrt{548}} \quad ; \quad M_{y_1} = M \sin(\beta - \alpha_1) = \frac{6,8 M}{\sqrt{548}}$$



**Figura 3.8 - Decomposição do vetor momento fletor segundo os eixos centrais principais de inércia**

Finalmente, sempre com relação aos eixos principais, a expressão para o cálculo da tensão normal em qualquer ponto da seção assume a forma:

$$\sigma_x = \frac{M}{\sqrt{548}} \left[ \frac{22,4}{13.824} y_1 + \frac{6,8}{3.960} z_1 \right]$$

Para a determinação do valor limite de  $M$  é necessário limitar a tensão normal (em módulo) do ponto mais solicitado, que seguramente deverá coincidir com um dos vértices.

Num passo anterior é necessário determinar as coordenadas dos pontos A, B, C e D segundo os eixos principais, usando-se as relações de transformação:  $y_1 = y \cos\alpha_1 + z \sin\alpha_1$  e  $z_1 = -y \sin\alpha_1 + z \cos\alpha_1$ , onde  $\alpha_1$  entra com seu valor em módulo. Operando-se as transformações resultam:

$$A(y, z) = (-14 ; -0,5) \rightarrow A(y_1, z_1) = (-13,326 ; 4,314)$$

$$B(y, z) = (-14 ; -6,5) \rightarrow B(y_1, z_1) = (-15,378 ; -1,324)$$

$$C(y, z) = (10 ; 11,5) \rightarrow C(y_1, z_1) = (13,326 ; 7,39)$$

$$D(y, z) = (10 ; -6,5) \rightarrow D(y_1, z_1) = (7,177 ; -9,526)$$

Substituindo-se as coordenadas de cada um dos vértices da seção na expressão de  $\sigma_x$ , e respeitando-se o limite imposto para o valor da tensão normal em módulo, obtêm-se as limitações abaixo apresentadas:

$$\sigma_A = -6,0606 \cdot 10^{-4} M \geq -5 \rightarrow M \leq 8250,0 \text{ kN.cm}$$

$$\sigma_B = -1,1616 \cdot 10^{-3} M \geq -5 \rightarrow M \leq 4304,34 \text{ kN.cm}$$

$$\sigma_C = 1,4646 \cdot 10^{-3} M \leq 5 \rightarrow M \leq 3413,79 \text{ kN.cm}$$

$$\sigma_D = 2,0203 \cdot 10^{-4} M \leq 5 \rightarrow M \leq 24750,0 \text{ kN.cm}$$

Conclui-se, portanto, que o valor limite para o momento solicitado é:  $M = 3413,79 \text{ kN.cm}$

### 3.5 Determinação da linha neutra

O estudo da flexão pura oblíqua se completa com a determinação da posição da linha neutra.

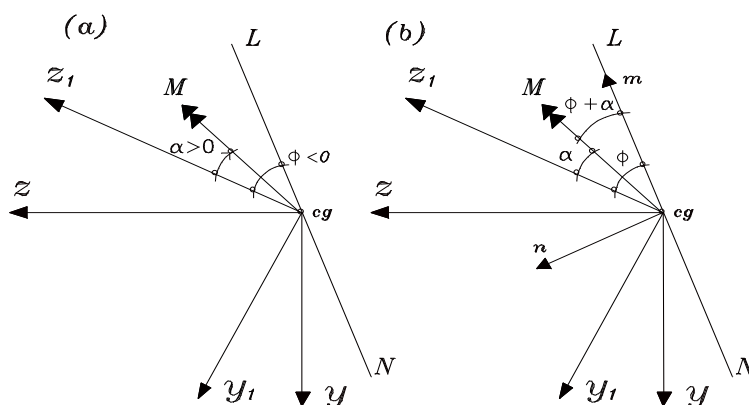
Como visto na flexão pura normal, a linha neutra é o lugar geométrico dos pontos de tensão normal nula e divide a seção em zonas tracionada e comprimida; esta definição também é válida na flexão oblíqua.

Na figura 3.9a, representa-se graficamente, em posição genérica, uma linha neutra (LN) inclinada de  $\alpha$  com relação ao eixo principal  $z_1$ . Para a dedução da expressão que permite calcular  $\alpha$  aplica-se a definição de linha neutra, o que equivale a impor na (3.25)  $\sigma_x = 0$ .

Denotando-se por  $\alpha$  o ângulo do vetor  $M$  do momento de flexão com relação ao eixo principal  $z_1$ , (positivo quando marcado no

sentido horário do eixo para o vetor, conforme indicado na figura 3.9) resulta:

$$\sigma_x = M \left( \frac{\cos \alpha}{I_{z_1}} y_1 + \frac{\sin \alpha}{I_{y_1}} z_1 \right) = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 = - \left[ \frac{\sin \alpha I_{z_1}}{\cos \alpha I_{y_1}} z_1 \right] \quad (3.26)$$



**Figura 3.9 - Representação genérica da linha neutra**

Note-se que a equação da linha neutra independe do valor do momento aplicado, importando somente a sua inclinação  $\alpha$ .

De uma forma geral, por se tratar de uma reta que contém a origem do sistema, para a equação da linha neutra vale a relação:

$$y_1 = \operatorname{tg} \phi z_1 \quad \text{ou ainda} \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y_1}{z_1}$$

onde  $\operatorname{tg} \phi > 0$  se a reta passa pelo primeiro quadrante do sistema  $y_1-z_1$ . Igualando-se os coeficientes segue que:

$$\operatorname{tg} \phi = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_{z_1}}{I_{y_1}} \quad (3.27)$$

Nota-se que na relação anterior  $\frac{I_{z_1}}{I_{y_1}} > 0$ , portanto, levando-se em conta as convenções para  $\alpha$  e  $\operatorname{tg} \phi$ , o coeficiente angular negativo para a reta implica em  $\phi$  representado no mesmo sentido de  $\alpha$ .

Além disso, se  $I_{z_1} > I_{y_1}$  (ou o eixo  $y_1$  é o de menor inércia), então  $|\phi| > |\alpha|$ ; se  $I_{z_1} < I_{y_1}$  (ou o eixo  $z_1$  é o de menor inércia), então  $|\phi| < |\alpha|$ . Conclui-se, portanto, que a linha neutra estará sempre situada entre o vetor do momento e o eixo de menor inércia.

Nos casos particulares em que  $I_{z_1} = I_{y_1}$ , a L.N. tem a direção do momento aplicado.

Como última variação neste estudo da linha neutra, admita-se, por outro lado, um sistema de eixos centrais  $(m, n)$ , ilustrado na figura 3.9b, onde  $m$  está alinhado com a L.N.. Com relação a esses eixos, a expressão da tensão normal num ponto genérico da seção transversal pode ser escrita na forma:

$$\sigma = K_1 m + K_2 n \quad (3.28)$$

A partir da condição que em qualquer ponto sobre a linha neutra (portanto com coordenada  $n = 0$ ) a tensão normal é nula, conclui-se que  $K_1 = 0$ . A constante  $K_2$  resulta da condição de igualdade entre o momento das tensões normais em relação ao eixo  $m$  e a componente do momento solicitante  $M$  com relação à linha neutra:

$$\begin{aligned} M_{ln} &= \int_A \sigma n dA \\ &= K_2 \int_A n^2 dA \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como a integral que aparece representa o momento de inércia da seção com relação ao eixo  $m$  ( $I_{ln}$ ), resulta que:

$$\sigma = \frac{M_{ln}}{I_{ln}} n \quad (3.30)$$

onde:

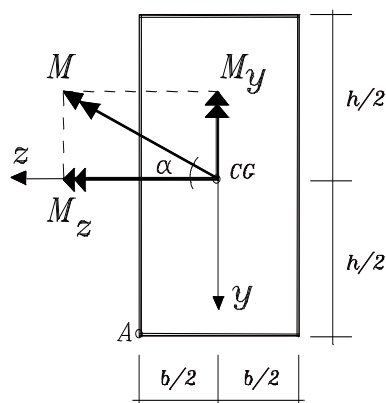
$M_{ln}$  = momento projetado sobre a linha neutra (eixo  $m$ );

$I_{ln}$  = momento de inércia da seção com relação ao eixo  $m$  (que pode ser obtido a partir das inércias principais e do ângulo  $\phi$ ).

**Exemplo 3:** Uma forma de verificação da validade da (3.30), consiste em comparar os valores para a tensão normal, num ponto de uma seção transversal, obtidos com aquela relação e da (3.25).

Na figura 3.10, ilustra-se, por simplificação, uma seção retangular para a qual os eixos principais de inércia são de determinações imediatas e coincidentes com os eixos de simetria. Na seção atua um momento fletor  $M$  inclinado de  $\alpha$  em relação ao eixo  $z$ . Considerando-se que os momentos de inércia segundo os eixos  $z$  e  $y$ , respectivamente, são dados por:  $I_z = \frac{bh^3}{12}$  e  $I_y = \frac{hb^3}{12}$ , pela (3.25), a tensão normal no ponto A resulta:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= M \left( \frac{\cos\alpha_c}{I_z} \frac{h}{2} + \frac{\sin\alpha_c}{I_y} \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{6M}{bh} \left( \frac{\cos\alpha_c}{h} + \frac{\sin\alpha_c}{b} \right)\end{aligned}$$



**Figura 3.10 - Seção retangular em flexão oblíqua**

Por outro lado, com vistas à utilização da (3.30), o momento de inércia da seção com relação à linha neutra pode ser determinado

empregando-se a seguinte expressão geral:

$$I_{ln} = I_z \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi + 2 I_{yz} \sin \phi \cos \phi = I_z \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi$$

Por sua vez, o momento solicitante projetado na direção da L.N. fica determinado por:

$$M_{ln} = M \cos(\phi + \alpha)$$

Aqui cabe uma observação: como o sinal de  $\phi$  sai da (3.26), então na relação anterior considera-se a soma direta dos ângulos.

Levando-se em conta a transformação de coordenadas que permite passar dos eixos z-y para m-n ( $n = y \cos \phi + z \sin \phi$ ;  $m = z \cos \phi - y \sin \phi$ ) resulta, pela (3.25):

$$\sigma_A = \frac{M \cos(\phi + \alpha)}{I_{ln}} \left( \frac{h}{2} \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \right)$$

Essa relação pode sofrer sucessivas transformações. Em primeiro lugar, o momento de inércia com relação à linha neutra resulta:

$$I_{ln} = \frac{bh}{12} \left( h^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi \right)$$

de modo que obtém-se a seguinte forma para  $\sigma_A$

$$\sigma_A = \frac{6M \cos(\phi + \alpha)}{bh(h^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)} (h \cos \phi + b \sin \phi)$$

Por outro lado, da (3.26), para a seção em estudo segue que:

$$\sin \phi \cos \alpha = -\sin \alpha \cos \phi \frac{h^2}{b^2}$$

de modo que o produto indicado no numerador da última expressão resulta:



$$\cos(\phi + \alpha)(h \cos \phi + b \sin \phi) = \left( \frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right) (h^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)$$

Assim sendo, resulta, finalmente que:

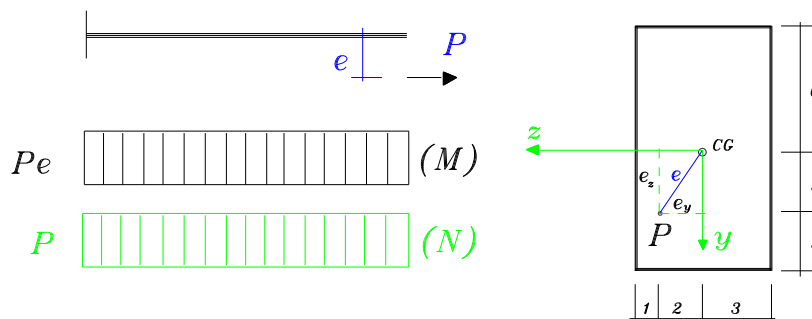
$$\sigma_A = \frac{6M}{bh} \left( \frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right)$$

que coincide com o resultado obtido pela aplicação da (3.25) .□

### 3.6 Flexão composta: tração ou compressão excêntricas

Todos os casos de flexão até aqui estudados estão relacionados à existência apenas de momentos fletores nas seções.

Pode-se, no entanto, admitir a existência de flexão provocada por forças normais de direção paralela, porém não coincidente com a do eixo; nesse caso tem-se a tração (ou compressão) excêntrica.



**Figura 3.11 - Tração excêntrica**

Considere-se então a viga prismática em balanço ilustrada na figura 3.11, sujeita a uma carga P de tração axial com excentricidade e em relação ao eixo.

Um problema que se põe consiste em determinar a intensidade da carga P, de modo que as tensões normais na seção transversal não ultrapassem um determinado valor.

Transportando-se a carga P para o centro de gravidade da seção, conclui-se que seu efeito é equivalente ao de uma flexão

oblíqua, decorrente do momento de valor P.e, superposto a uma tração axial.

Admitindo-se válida, também neste caso, a hipótese cinemática de Bernoulli-Navier sobre a deformação das seções, a flexão oblíqua gera um campo de deslocamentos idêntico àquele estudado no item anterior, enquanto que a tração acrescenta, em todos os pontos da seção, um acréscimo no deslocamento axial.

Nessas condições, o campo vetorial de deslocamentos  $d$  dos pontos da seção genérica é descrito por:

$$d = [u(x) - yv'(x) - zw'(x)]e_1 + v(x)e_2 + w(x)e_3 \quad (3.31)$$

Por compatibilidade, o campo de deformações apresenta uma única componente não-nula,  $\varepsilon_x$ , sendo expressa na forma :

$$\varepsilon_x = u'(x) - yv''(x) - zw''(x) \quad (3.32)$$

A tensão normal  $\sigma_x$  fica determinada diretamente pela aplicação da lei de Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \varepsilon_x \\ &= Eu' - E yv'' - E z w'' \end{aligned} \quad (3.33)$$

A partir da condição de equilíbrio e por substituição das relações constitutiva e de compatibilidade, obtém-se uma relação entre a primeira derivada da componente axial do deslocamento e a força aplicada:

$$\begin{aligned} N = P &= \int_A \sigma_x dA \\ &= EA u' \end{aligned} \quad (3.34a)$$

$$\therefore u' = \frac{P}{EA} \quad (3.34b)$$

lembrando-se que  $\int_A y dA = \int_A z dA = 0$ , pois a origem do sistema de referência no plano da seção está no centro de gravidade.

Por sua vez, do equilíbrio de momentos em relação aos eixos centrais principais (os quais coincidem com os eixos de simetria para a seção retangular ilustrada na figura 3.11) e seguindo o mesmo procedimento de substituição das relações constitutiva e de compatibilidade, resultam expressões para a determinação das componentes  $v(x)$  e  $w(x)$  do deslocamento

transversal em função da força  $P$  aplicada:

$$M_z = P e_z = \int_A \sigma_x y dA = -E v'' \int_A y^2 dA \quad (3.36a)$$

$$= -E v'' I_z \quad \rightarrow \quad v'' = -\frac{P e_z}{E I_z} \quad (3.36a)$$

$$\rightarrow \quad v'' = -\frac{P e_z}{E I_z}$$

$$M_y = P e_y = \int_A \sigma_x z dA = -E w'' \int_A z^2 dA \quad (3.36b)$$

$$= -E w'' I_y \quad \rightarrow \quad w'' = -\frac{P e_y}{E I_y}$$

$$M_y = P e_y = \int_A \sigma_x z dA = -E w'' \int_A z^2 dA \quad (3.36c)$$

$$= -E w'' I_y \quad \rightarrow \quad w'' = -\frac{P e_y}{E I_y}$$

Finalmente, substituindo-se as relações (3.36) e (3.35) na (3.33), deduz-se a expressão geral para o cálculo da tensão normal num ponto da seção de coordenadas  $(y, z)$ :

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{P e_z}{I_z} y + \frac{P e_y}{I_y} z \quad (3.37)$$

A expressão anterior permite resolver o problema de determinar a intensidade da carga  $P$  respeitando-se um limite para o valor da tensão normal.

### 3.6.1 Linha neutra

Como se sabe, na linha neutra as tensões normais são nulas, portanto:

$$\frac{P}{A} + \frac{P e_z}{I_z} y + \frac{P e_y}{I_y} z = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{e_z}{I_z} y + \frac{e_y}{I_y} z = -\frac{I}{A} \quad (3.38)$$

A expressão 3.38 é a equação da reta representativa da linha neutra. Observa-se que os parâmetros da equação independem do valor da carga  $P$  e que a reta não passa pela origem do sistema de referência; no entanto, com respeito à sua inclinação, mantêm-se as mesmas conclusões da flexão pura, isto é: a linha neutra está entre o vetor do momento ( $M = P e$ ) e o eixo de menor inércia.

A determinação da posição da L.N. no plano da seção pode ser feita conhecendo-se os pontos onde ela corta os eixos coordenados  $z$  e  $y$ :

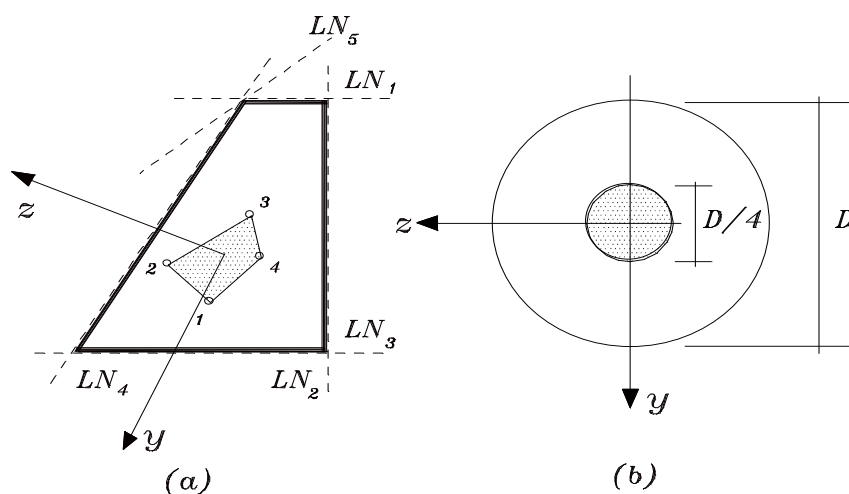
$$\cdot \text{ p/ } y = 0 \quad \rightarrow \quad z = -(I_y) / (Ae_y)$$

$$\cdot \text{ p/ } z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -(I_z) / (Ae_z)$$

É imediato observar que a localização da linha neutra depende da excentricidade da carga aplicada. Em particular, na medida em que a carga aproxima-se do c.g.,  $e_y \rightarrow 0$  e  $e_z \rightarrow 0$ , indicando que a L.N. pode fugir dos limites geométricos da seção tendendo para o infinito no caso extremo de carga centrada. Portanto, pode haver situações normais em que, dependendo do posicionamento da carga, toda a seção resulte contida de um lado da linha neutra; este fato é de grande interesse para algumas aplicações práticas, como se verá em seguida.

### 3.6.2 Núcleo central (de inércia)

Como visto, a posição da linha neutra no plano da seção depende da excentricidade da carga axial aplicada, tendendo a cruzar os eixos centrais de referência em pontos indefinidamente distantes da origem, na medida em que a carga se aproxima do centro de gravidade da seção. Independentemente de sua eventual posição, a linha neutra continua a dividir o plano da seção em zonas tracionada e comprimida.



**Figura 3.12 - Núcleos centrais de inércia**

Em algumas situações práticas é interessante garantir que toda a seção resulte de um lado da linha neutra e, conseqüentemente, esteja submetida a tensões normais de mesmo sinal. Satisfazendo essa condição pode existir um conjunto bastante grande de 'pontos-posição de aplicação da carga'. Na verdade, se mostrará, em seguida, que tal conjunto define uma região no plano da seção denominada núcleo central.

No sentido de determinar a posição do núcleo, considere-se, como exemplo, a seção trapezoidal indicada na figura 3.12a.

Na figura estão indicadas quatro linhas neutras coincidentes com os segmentos de reta que compõem os limites da seção e uma quinta, genérica, que contém somente um vértice do

trapézio.

Todas as situações indicadas constituem casos limites a partir dos quais a seção apresenta-se totalmente contida em um dos lados da linha neutra.

Seja, então, a equação (3.38) reescrita convenientemente na seguinte forma:

$$y = -\frac{e_y I_z}{e_z I_y} z - \frac{I_z}{e_z A} \quad (3.39)$$

Sendo a (3.39) a equação de uma reta, ela também pode ser colocada numa forma geral:

$$y = \bar{A} z + \bar{B} \quad (3.40)$$

onde:  $\bar{A} = -\frac{e_y I_z}{e_z I_y}$  e  $\bar{B} = -\frac{I_z}{e_z A}$  .

Qualquer linha neutra dada deve verificar a relação (3.40), de modo que igualando os coeficientes podem-se determinar as excentricidades  $e_y$  e  $e_z$ , que são as coordenadas do ponto de aplicação da carga que provoca a linha neutra conhecida.

Considere-se a determinação das coordenadas dos pontos de aplicação das cargas que provocam as linhas neutras indicadas na figura 3.13.

Por conveniência, os casos indicados estão divididos em dois grupos:

- a) Casos em que a linha neutra coincide com um dos lados da seção (linhas neutras de 1 a 4);
- b) Caso em que a linha neutra passa por um dos vértices do polígono representativo da seção (linha neutra 5).

No primeiro grupo, as constantes  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são determinadas univocamente impondo-se a verificação da equação geral. Desse modo as coordenadas dos correspondentes pontos de aplicação das

cargas resultam de:

$$e_y = \frac{\bar{A} I_z}{\bar{B} A} ; e_z = -\frac{I_z}{\bar{B} A} \quad (3.41a,b)$$

No segundo grupo, porém, resulta uma dependência entre as constantes  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  expressa pela relação:

$$\bar{B} = \bar{y} - \bar{A} \bar{z} \quad (3.42)$$

Substituindo-se na (3.42) as expressões das constantes em função das excentricidades apresentadas junto com a (3.40) resulta:

$$\frac{e_z}{I_z} \bar{y} + \frac{e_y}{I_y} \bar{z} = -\frac{I}{A} \quad (3.43)$$

A (3.43) mostra que os pares  $e_y$  e  $e_z$  verificam a equação de uma reta. Em outras palavras, as coordenadas dos pontos de aplicação das cargas que provocam todas as linhas neutras que passam em  $(\bar{y}, \bar{z})$  estão alinhadas.

No caso em estudo, a linha neutra 5 está entre as linhas 1 e 4 (v.fig.3.12a). Portanto, as excentricidades correspondentes definem um ponto que deve estar alinhado com os pontos correspondentes às linhas 1 e 4.

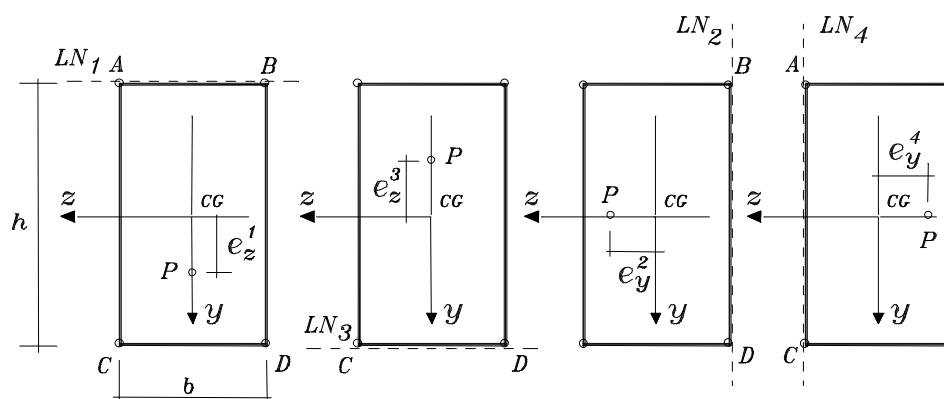
Assim sendo, unindo-se todos os pontos que tem correspondência com cada uma das linhas neutras, caracteriza-se no plano da seção o contorno de uma região que define o núcleo central. Se a carga axial vier a ser aplicada em qualquer ponto no interior do núcleo, a linha neutra estará seguramente fora dos limites da seção, tendendo para o infinito na medida em que a carga se aproximar do centro de gravidade.

Nota-se que no caso ilustrado pela seção trapezoidal da figura 3.11a, o número de lados do polígono que define o núcleo

central é igual ao número de lados da seção.

Como resultado geral, em seções poligonais convexas, o núcleo central é também poligonal com igual número de lados; em seções poligonais não-convexas o núcleo tem ainda forma poligonal porém com um número menor de lados. Por extensão, pode-se mostrar que numa seção transversal circular com diâmetro  $D$ , o núcleo central resulta na forma de um círculo com diâmetro  $D/4$ , conforme ilustra a figura 3.12b (\*).

**Exemplo 4:** Pede-se determinar o núcleo central para a seção retangular ilustrada na figura 3.13.



**Figura 3.13 - Determinação do núcleo central para seção retangular3**

Como a seção retangular é um polígono convexo, o núcleo será também limitado por um polígono de quatro lados. Como estratégia de solução, é mais simples determinar as posições dos vértices do núcleo e uni-los, posteriormente, por segmentos de retas.

Os vértices, por sua vez, são pontos de aplicação da carga que provocam linhas neutras coincidentes com os lados da seção retangular.

(\*) Nas seções vazadas, na definição de convexidade considera-se somente o contorno externo.



Seja como primeiro vértice a determinar, aquele que provoca a linha neutra L.N.1 (v.fig.3.13).

Neste tipo de problema, em lugar das (3.41a,b), é mais conveniente trabalhar com a (3.39), impondo-se que as coordenadas de dois pontos da linha neutra dada a satisfaçam. Com isto, monta-se um sistema de equações nas incógnitas  $e_y$  e  $e_z$ . Por conveniência, normalmente os dois pontos da linha neutra que servem à verificação, coincidem com os vértices da seção.

A L.N.1 passa pelos vértices A e B de coordenadas dadas por:

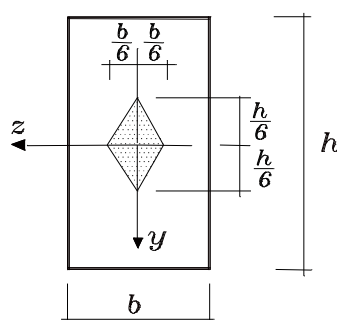
$$B(y,z)=(-h/2; -b/2) \quad ; \quad A(y,z)=(-h/2; b/2)$$

Substituindo-se na (3.39) e resolvendo-se o sistema, obtém-se:  $e_y = 0$  ;  $e_z^1 = \frac{h}{6}$ .

Os outros vértices são obtidos das expressões das linhas neutras que se confundem com os outros lados do retângulo.

Assim para uma linha neutra L.N.3 passando por C e D, chega-se a  $e_z^3 = -h/6$ . Analogamente para linhas neutras passando por B e D e por A e C, resultam  $e_y^2 = -e_y^4 = b/6$ .

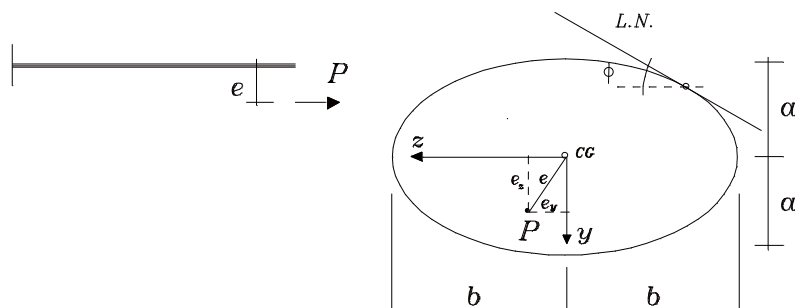
A região do núcleo central é definida pela união dos vértices  $(e_z^1, e_z^3, e_y^2, e_y^4)$ , gerando-se o losango ilustrado na figura 3.14.



**Figura 3.14 - Núcleo central da seção retangular**

**Exemplo 5:** Outro caso interessante diz respeito à obtenção do núcleo central para uma seção transversal elíptica.

Seja então uma viga em balanço com uma carga  $P$  de direção axial e excentricidade  $e$  aplicada na extremidade livre, como ilustra a figura 3.15.



**Figura 3.15 - Núcleo central para seção transversal elíptica**

Na figura está representada uma linha neutra genérica tangenciando o contorno da seção transversal.

Geometricamente as coordenadas do ponto de tangência podem ser determinadas impondo-se a interseção da reta com a elipse, cujas expressões, respectivamente, são:

$$y = \lambda - \tan \phi z = \lambda - \beta z \quad (3.44 \text{ a})$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow b^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2 \quad (3.44 \text{ b})$$

com uma substituição de (3.44a) em (3.44b), chega-se a uma equação do segundo grau em  $z$ , cujo discriminante deve ser nulo ( $\Delta=0$ ) para garantir condição de solução única; de tal condição resulta uma relação para  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} b^2(\lambda - \beta y)^2 + a^2 z^2 &= a^2 b^2 \\ \rightarrow z^2(a^2 + \beta^2 b^2) - 2\lambda\beta b^2 z + b^2(\lambda^2 - a^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = B_1^2 - 4A_1 C_1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = a^2 + \beta^2 b^2 \quad (3.44 \text{ c})$$

Na condição de discriminante nulo, e levando-se em conta o valor de  $\lambda^2$  definido pela (3.44c), a raiz da equação do segundo grau resulta:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\lambda\beta b^2}{2(a^2 + \beta^2 b^2)} \\ &= \frac{\lambda\beta b^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{\beta b^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.44 \text{ d})$$

A outra coordenada do ponto de interseção determina-se pela substituição de  $\lambda$  e  $z$  na (3.44a):

$$y = \lambda - \frac{\beta^2 b^2}{\lambda} = \frac{a^2}{\lambda} \quad (3.44 \text{ e})$$

Voltando à questão do núcleo central, o ponto de interseção verifica também, a condição de tensão normal nula, por se localizar sobre a linha neutra. Então valem as relações dadas na (3.40):

$$y = \bar{A}z + \bar{B} \quad c/ \quad \bar{A} = -\frac{e_y I_z}{e_z I_y} \quad e \quad \bar{B} = -\frac{I_z}{e_z A}$$

Então, como  $\bar{B} = \lambda$  e  $\bar{A} = \beta$  segue que:

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{e_y I_z}{e_z I_y} \quad e \quad \lambda = -\frac{I_z}{e_z A} \\ \therefore e_z &= -\frac{I_z}{A\lambda} \quad e \quad e_y = \beta \frac{I_y}{A\lambda} \end{aligned} \quad (3.45 \text{ b, c})$$

No caso da seção elíptica são conhecidos:  $I_z = (\pi b a^3)/4$ ,  $I_y = (\pi a b^3)/4$  e  $A = \pi a b$ , de modo que:

$$e_z = -\frac{a^2}{4\lambda} \quad ; \quad e_y = \beta \frac{b^2}{4\lambda} \quad (3.46 \text{ a, b})$$

As duas últimas relações podem ser combinadas da seguinte forma:

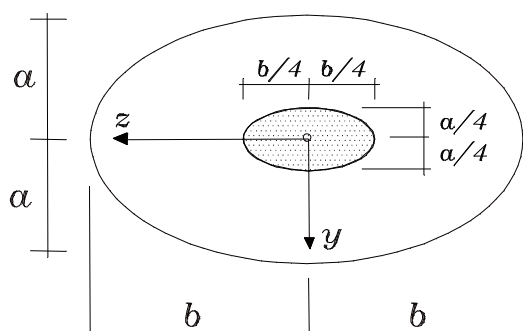
$$\begin{aligned} \left(\frac{4e_z}{a}\right)^2 + \left(\frac{4e_y}{b}\right)^2 &= \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{\beta^2 b^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{a^2 + \beta^2 b^2}{\lambda^2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.47 \text{ a})$$

o que mostra que o contorno do núcleo central é também uma elipse. Os raios principais dessa elipse resultam de:

$$p/ e_y = 0 \rightarrow \frac{4e_z}{a} = 1 \rightarrow e_z = \frac{a}{4} \quad (3.47 \text{ b})$$

$$p/ e_z = 0 \rightarrow \frac{4e_y}{b} = 1 \rightarrow e_y = \frac{b}{4} \quad (3.47 \text{ c})$$

A figura 3.15 ilustra o núcleo obtido.

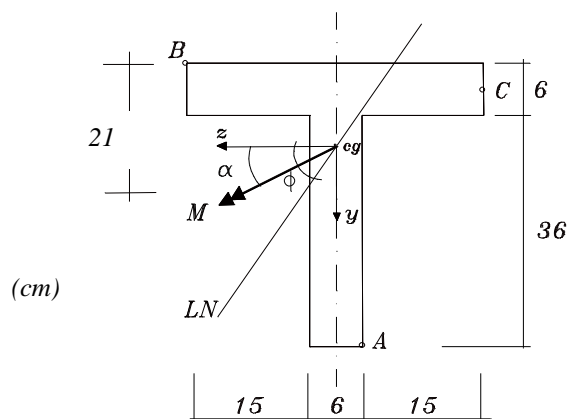


**Figura 3.16 - Núcleo central para seção elíptica**

.□

**Exemplo 6:** Outro problema de interesse é o da análise inversa, onde se conhece a linha neutra e se deve determinar o momento ou a força normal que a provoca.

Considere-se uma seção em tê e uma linha neutra definida sobre ela, como ilustrado na figura 3.17. Deseja-se determinar o valor máximo do momento aplicado, sendo que as tensões de tração e de compressão não devem exceder  $0.8 \text{ kN/cm}^2$  e  $1.2 \text{ kN/cm}^2$  (em módulo), respectivamente.



**Figura 3.17 - Análise inversa**

Com os dados geométricos da seção, calculam-se as coordenadas do centro de gravidade em relação a um sistema auxiliar posicionado no ponto C:

$$z_{cg,aux} = 18 \text{ cm (imediato);}$$

$$y_{cg,aux} = (6 \cdot 36 \cdot 21) / (3 \cdot 6 \cdot 36) = 10,5 \text{ cm}$$

Com os novos eixos posicionados no c.g. resultam:

$$I_z = 71604 \text{ cm}^4; \quad I_y = 23976 \text{ cm}^4.$$

Por outro lado, em função da L.N. dada:

$$\tan \phi = -\tan \alpha \frac{I_z}{I_y} \rightarrow \tan \alpha = -\tan \phi \frac{I_y}{I_z} = -\left(\frac{7,5}{3}\right) \left(\frac{23976}{71604}\right)$$

$$\therefore \alpha = -39,9^\circ \rightarrow \cos \alpha = 0,77; \quad \sin \alpha = -0,64.$$

Com esses valores, a equação geral da tensão normal, referida aos eixos principais de inércia, resulta:

$$\sigma = M \left( \frac{\cos \alpha}{I_z} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} z \right) = M \left( \frac{0,77}{71604} y - \frac{0,64}{23976} z \right)$$

Entendendo-se que os pontos A e B são os mais afastados da linha neutra, impõe-se a condição de que os valores das

tensões normais que lhes correspondem não excedam os limites impostos, (onde A pertence à região tracionada e B à comprimida) obtendo-se:

No ponto A:  $\sigma_A = 3,866 \cdot 10^{-4} M \leq 0,8 \rightarrow M \leq 2069,6 \text{ kN.cm}$  ;

No ponto B:  $\sigma_B = -6,257 \cdot 10^{-4} M \geq -1,2 \rightarrow M \leq 1918 \text{ kN.cm}$  .

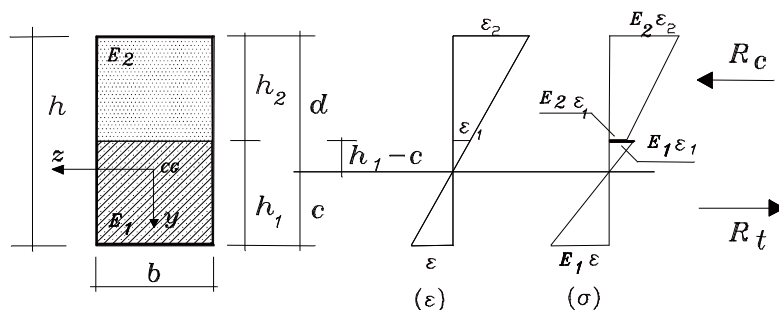
A resposta procurada é:  $M \leq 1918 \text{ kN.cm}$  .□

### 3.7 Vigas compostas por dois materiais

Um estudo de interesse refere-se à determinação das tensões normais em vigas cuja seção transversal é composta de dois materiais distintos.

Uma primeira particularidade neste tipo de seção é que o centro de gravidade tem posição diferente daquela do centro geométrico. Entretanto, a hipótese cinemática geral ainda se mantém isto é: as deformações se dão com a seção permanecendo plana.

Por exemplo, considere-se a seção ilustrada na figura 3.18, submetida a um momento de flexão  $M$ , onde também aparecem os diagramas de deformação e de tensão normal. Na mesma figura  $R_t$  e  $R_c$  são as resultantes de tensão normal correspondentes a cada um dos materiais.



**Figura 3.18 - Seção composta por dois materiais**

Nesse caso, as expressões do campo de deslocamentos, da deformação  $\varepsilon_x$  e das tensões correspondentes à cada material, em ponto da seção em questão, são:

$$\begin{aligned} d = (-yv')e_1 + v(x)e_2 &\rightarrow \varepsilon_x = -yv'' \\ &\rightarrow \sigma_x^1 = -yE_1v'' \quad ; \quad \sigma_x^2 = -yE_2v'' \end{aligned} \quad (3.48 \text{ a,b,c,d})$$

onde  $y$  é uma coordenada medida a partir do centro de gravidade.

Das relações para as tensões normais resulta:

$$\frac{\sigma_x^1}{\sigma_x^2} = \frac{E_1}{E_2} = n \quad (3.49)$$

Uma primeira condição que deve ser verificada é que o esforço normal resultante das tensões  $\square$  deve ser nulo:

$$N = \int_{A_1} \sigma_x^1 dA_1 + \int_{A_2} \sigma_x^2 dA_2 = -v'' \left[ E_1 \int_{A_1} y dA_1 + E_2 \int_{A_2} y dA_2 \right] = 0 \quad (3.50)$$

Desta condição obtém-se a posição do centro de gravidade.

De fato, as integrais que aparecem na (3.50) são momentos estáticos de cada uma das partes da seção, ocupadas por certo material, em relação ao centro de gravidade.

Tomando-se partido da geometria indicada, tais integrais resultam <sup>(\*)</sup>:

$$E_1 b h_1 \left( c - \frac{h_1}{2} \right) - E_2 b h_2 \left( d - \frac{h_2}{2} \right) = 0 \quad (3.51)$$

Considerando-se que  $E_1 = nE_2$  e que  $d = h_1 + h_2 - c$ , segue que:

$$n b h_1 c - n b \frac{h_1^2}{2} - b h_2 (h_1 + h_2 - c) + b \frac{h_2^2}{2} = 0 \quad (3.52)$$

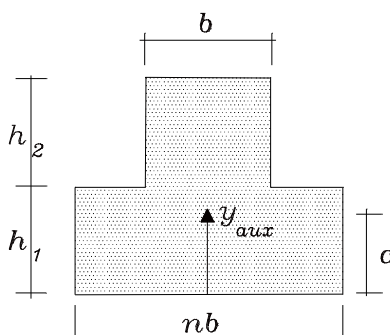
---

<sup>(\*)</sup> É preciso notar que o momento estático da área  $A_1$  é positivo e o de  $A_2$  negativo.

$$\therefore c = \frac{bh_2\left(\frac{h_2}{2} + h_1\right) + nb\frac{h_1^2}{2}}{nbh_1 + bh_2} \quad (3.53)$$

A (3.53) determina a posição do centro de gravidade da seção.

Mas aquela mesma relação também define a posição do c.g. de uma seção com a geometria indicada na figura 3.19:



**Figura 3.19 - Seção equivalente**

A seção assim definida é denominada de seção homogeneizada e está, no caso, ocupada por um material com módulo de elasticidade longitudinal  $E_1$ .

Uma segunda condição a ser verificada é a de igualdade entre o momento das tensões normais e o momento de flexão oriundo do carregamento externo.

$$\begin{aligned} M_z &= \int_{A_1} \sigma_x^1 y dA_1 + \int_{A_2} \sigma_x^2 y dA_2 \\ &= -v'' \left[ E_1 \int_{A_1} y^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y^2 dA_2 \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Reconhece-se no termo entre colchetes os momentos de inércia de cada uma das partes da seção original. Adotando-se, por conveniência a notação:

$$I_{z1} = \int_{A_1} y^2 dA_1 \quad e \quad I_{z2} = \int_{A_2} y^2 dA_2$$



a (3.54) fornece:

$$M_z = -v'' E_2 (nI_{z1} + I_{z2})$$

$$\therefore -v'' E_2 = \frac{M_z}{(nI_{z1} + I_{z2})} \quad (3.55)$$

Observe-se que da geometria dada resulta:

$$I_{z2} + nI_{z1} = \frac{bh_2^3}{12} + bh_2 \left( h - c - \frac{h_2}{2} \right)^2 + n \left[ \frac{bh_1^3}{12} + bh_1 \left( c - \frac{h_1}{2} \right)^2 \right] \quad (3.56)$$

a qual coincide com o momento de inércia da seção homogeneizada em relação a um eixo horizontal que passa pelo seu centro de gravidade. Desse modo, denotando-se por  $I_H$  aquele momento de inércia resultam:

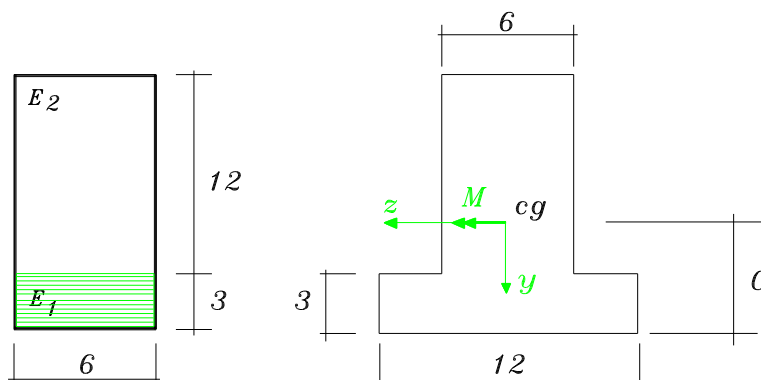
$$-v'' = \frac{M_z}{E_2 I_H}$$

$$= n \frac{M_z}{E_1 I_H} \quad (3.57)$$

Finalmente voltando nas expressões 3.48c e 3.48d obtém-se as relações que permitem estimar as tensões normais nos materiais 1 e 2, respectivamente:

$$\sigma_x^1 = n \frac{M_z}{I_H} y \quad ; \quad \sigma_x^2 = \frac{M_z}{I_H} y \quad (3.58 \text{ a,b})$$

**Exemplo 7:** No sentido de exemplificar a aplicação das expressões deduzidas, sejam os seguintes dados:  $E_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $E_2 = 10^4 \text{ kN/cm}^2$ . O exercício consiste em determinar o maior momento (atuante num plano vertical) que se possa aplicar na seção de modo que  $\sigma_{x \text{ máx}}^1 \leq 20 \text{ kN/cm}^2$  e  $\sigma_{x \text{ máx}}^2 \leq 8 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 3.20 - Seção retangular com dois materiais**

Por serem dois materiais, tem-se que:  $n = 3$ .

Para a seção equivalente homogeneizada (v.fig.3.20) valem:

$$c = 6,5 \text{ cm};$$

$$I_H = 2241 \text{ cm}^4.$$

Finalmente, com as (3.58 a,b) resultam:

$$\sigma_x^1 = 2 (M_z/2241) (6,5) \leq 20 \rightarrow M \leq 3447,69 \text{ kN.cm}$$

$$|\sigma_x^2| = (M_z/2241) (8,5) \leq 8 \rightarrow M \leq 2109,18 \text{ kN.cm}$$

$$\therefore M = 2109 \text{ kN/cm}^2$$

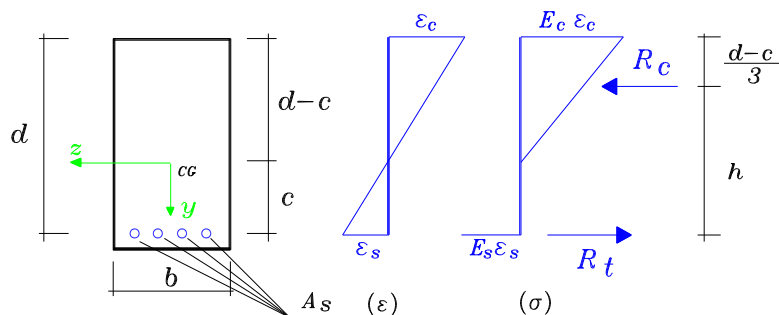
.□

Uma particular aplicação do estudo anterior é no caso de vigas em concreto armado.

Uma hipótese usualmente empregada sobre a resposta do material, diz respeito à não consideração da resistência a tração do concreto, de modo que este esforço, quando houver, deve ser totalmente absorvido pela armadura.

Na figura 3.21 ilustra-se uma seção transversal típica de uma viga em concreto armado, sendo a área total de armadura indicada por  $A_s$ ; indica-se, também, o momento de flexão aplicado.

A hipótese de seção plana na deformação continua válida e por este motivo o diagrama de deformações longitudinais é linear conforme indicado na figura.



**Figura 3.21 - Seção retangular em concreto armado**

Tomando-se partido da simetria da seção, a posição do centro de gravidade segundo o eixo  $y$  fica determinada uma vez conhecido o valor da coordenada  $c$  (uma medida marcada, por conveniência, a partir do c.g. da armadura). Para determiná-la, impõe-se que a resultante das tensões normais seja nula, obtendo-se:

$$\frac{E_c \varepsilon_c (d-c)}{2} b - E_s \varepsilon_s A_s = 0 \quad (3.59 \text{ a,b})$$

ou ainda,

$$\frac{\varepsilon_c (d-c)}{2} b = n \varepsilon_s A_s \quad (3.59 \text{ c})$$

onde  $n = E_s / E_c$  e os sub-índices  $c$  e  $s$  referem-se ao concreto e ao aço, respectivamente.

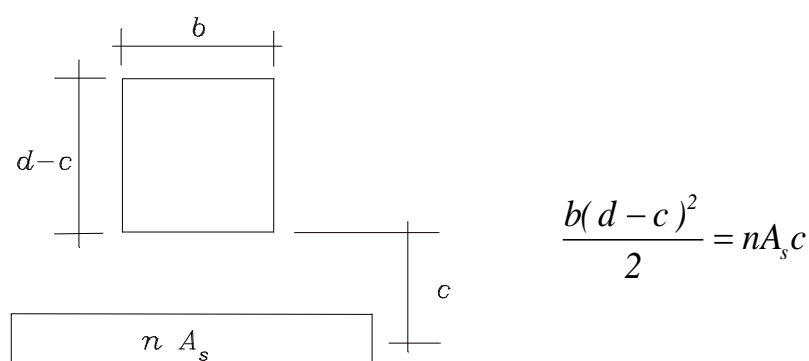
Por outro lado, do diagrama de deformação, (v.fig.3.21), vale a proporção:

$$\varepsilon_c = \frac{(d-c)}{c} \varepsilon_s \quad (3.59 \text{ d})$$

e substituindo-se 3.59d em 3.59c, resulta uma expressão a partir da qual pode-se determinar o valor da coordenada  $c$ :

$$c^2 - 2\left(d + \frac{nA_s}{b}\right)c + d^2 = 0 \quad (3.60)$$

Observa-se que essa relação é exatamente igual àquela obtida para o cálculo do momento estático de uma seção homogeneizada com as características indicadas na figura 3.22:



**Figura 3.22 - Seção homogeneizada**

Conhecida a coordenada  $c$ , ou, o que significa a mesma coisa: a posição da linha neutra, que neste caso de flexão normal passa pelo c.g. e é horizontal, pode-se determinar o momento atuante seja em função das resultantes de tensão normal na armadura, ou de tensão normal em módulo no concreto. Portanto, considerando-se ainda que  $R_t = R_c$ :

$$\begin{aligned} M_z &= R_c h \\ &= R_t h \end{aligned} \quad (3.60c)$$

**Exemplo 8:** Adotando-se  $\phi = 1,25 \text{ cm}$ ,  $d = 40 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,  $\sigma_s (\text{máx}) = 15 \text{ kN/cm}^2$  e  $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$ , pede-se determinar a posição do centro de gravidade da seção homogeneizada e o momento máximo que se pode aplicar.

Com os dados fornecidos, obtêm-se os seguintes resultados:

$$E_c = 21000/10 = 2100 \text{ kN/cm}^2 \quad A_s = [4 \pi (1,25)^2]/4 = 4,91 \text{ cm}^2$$

$$c^2 - 88,18c + 1600 = 0 \rightarrow c = 62,64 \text{ cm} \text{ e } c = 25,54 \text{ cm}$$

Entre os valores de  $c$  determinados, toma-se  $c = 25,54 \text{ cm}$  que implica na L.N. dentro dos limites da seção. Quanto ao valor do momento fletor aplicado, pode-se determiná-lo pelo uso da expressão 3.60c:

$$M_z = R_c h = R_t h = (15 \cdot 4,91) [d - (d - c)/3] = 2591 \text{ kN.cm}$$

### 3.8 Vigas em regime elastoplástico

Admita-se agora, que a seção transversal seja composta de um único material, o qual apresenta uma resposta elasto-plástica perfeita a partir de um determinado nível de tensão, conforme ilustrado no diagrama  $\sigma - \varepsilon$  da figura 3.23.

Dada a distribuição inicialmente linear das tensões na seção, observa-se que a plastificação se inicia nas fibras mais afastadas da linha neutra e evolui progressivamente para o interior da seção na medida em que cresce a intensidade do carregamento (v.fig.3.23).

Tal consideração leva à idéia de se determinar os valores dos momentos fletores correspondentes aos limites elástico (limiar da plastificação) e de plastificação total da seção.

Dentro dos limites do regime elástico, valem as seguintes relações, já considerando a forma retangular da seção:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_z}{I_z} y \\ &= \frac{12Mh}{2bh^3} = \frac{6M}{bh^2} \end{aligned} \quad (3.61 \text{ a})$$

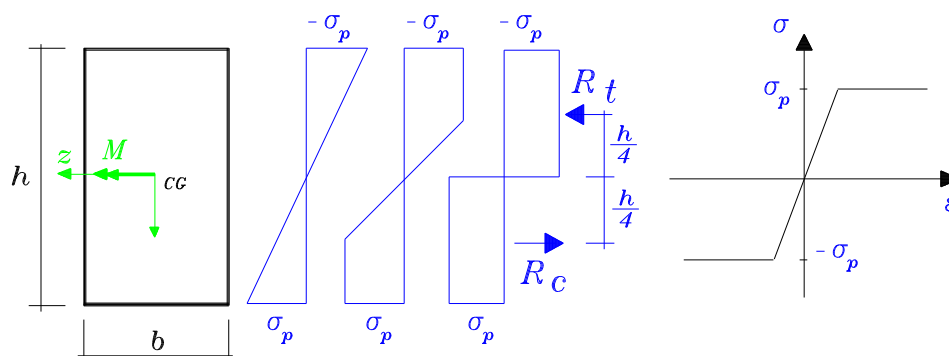
O limite é atingido quando na fibra mais solicitada a tensão normal iguala a tensão de plastificação. Portanto,

nessas condições  $\sigma = \sigma_p$  e  $M = M_e$ , de modo que da (3.61) resulta:

$$M = M_e = \frac{\sigma_p b h^2}{6} \quad (3.61 b)$$

Numa situação última, a seção transversal encontra-se totalmente plastificada e o diagrama de tensão normal apresenta uma forma retangular, conforme indicado na figura 3.23, exaurindo-se toda a capacidade de suporte adicional de carga da seção. O momento da resultante das tensões normais é igual ao momento de plastificação total, podendo ser determinado por:

$$M_p = \sigma_p \frac{bh}{2} h = \frac{\sigma_p b h^2}{4} \quad (3.61 c)$$



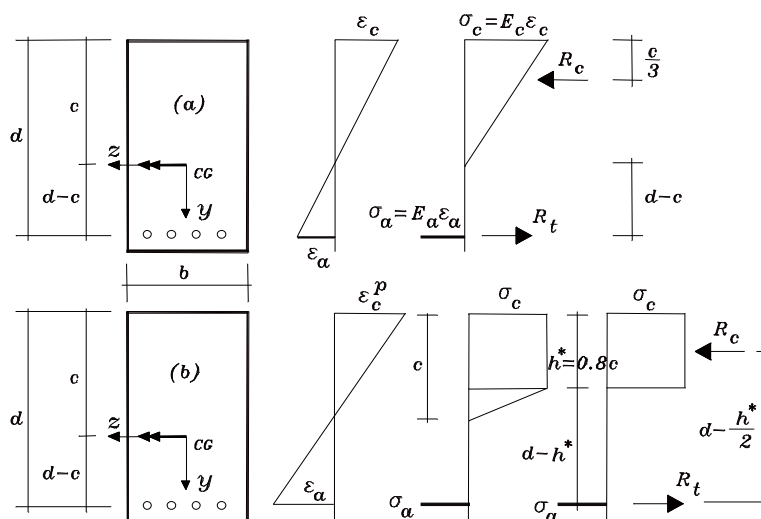
**Figura 3.23 - Resposta elastoplástica**

Comparando-se os dois valores limites do momento fletor, conclui-se que  $M_p = 1.5 M_e$ . Portanto, a seção estará totalmente plastificada ( $\sigma = \sigma_p = cte.$ ), quando o momento atingir um valor 50% maior que o momento elástico limite, correspondente à iminência de plastificação das fibras de base e de topo da seção transversal.

Deve-se ressaltar que durante o processo de plastificação da seção a posição da linha neutra permanece inalterada. Isto porque o material é homogêneo, com resposta elastoplástica que apresenta tensões de escoamento iguais na tração e na compressão, e a seção transversal é duplamente simétrica.

No entanto, para o caso da seção em concreto armado, em virtude da existência de dois materiais diferentes a determinação da posição da linha neutra torna-se um pouco mais complicada. De qualquer modo, sua posição pode ser obtida impondo-se, em qualquer instante do processo de plastificação, a igualdade entre as resultantes das tensões de compressão ( $R_c$ ) e de tração ( $R_t$ ).

Considerando-se, então, os diagramas de tensão e de deformação da seção, para diferentes níveis de sollicitação, como ilustrado na figura 3.24, consideram-se duas situações:



**Figura 3.24 - Respostas elástica e elastoplástica de seção retangular em concreto armado**

a) Dentro dos limites do comportamento elástico (v.fig.3.23a):

$$\sigma_c \frac{bc}{2} = \sigma_a A_a \quad (3.62 a)$$

sendo:

.  $A_a$  a área de armadura;

.  $\sigma_c$  a tensão de compressão limite do comportamento elástico do concreto;

.  $\sigma_a$  a tensão na armadura.

Mas, é possível escrever essa mesma condição envolvendo-se dados geométricos da seção e a relação entre os módulos de

elasticidade dos dois materiais, fazendo-se uso da seguinte proporção extraída do diagrama de deformação:

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_a}{d-c} \rightarrow \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_a} = \frac{c}{d-c} \quad (3.62 \text{ b})$$

onde:

.  $\varepsilon_c$  é a deformação específica longitudinal do ponto mais afastado da linha neutra e pertencente à zona comprimida de concreto;

.  $\varepsilon_a$  é a deformação específica longitudinal do ponto pertencente ao c.g. da armadura.

Combinando-se as duas últimas relações resulta:

$$c^2 + \frac{2nA_a}{b}c - \frac{2nA_a}{b}d = 0 \quad (3.62 \text{ c})$$

onde:

$$. n = \frac{E_a}{E_c};$$

.  $E_a$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;

.  $E_c$  é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

Ainda dentro do regime elástico, o momento atuante pode ser calculado pelo momento das resultantes das tensões de compressão e de tração:

$$\begin{aligned} M_e &= R_c \left( d - \frac{c}{3} \right) = R_t \left( d - \frac{c}{3} \right) \\ &= \sigma_c \frac{bc}{2} \left( d - \frac{c}{3} \right) \\ &= \sigma_a A_a \left( d - \frac{c}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.62 \text{ d})$$

b) No regime de comportamento plástico (v.fig.3.24b):



Nesse regime de comportamento, admite-se ainda que as seções permaneçam planas após a deformação, mas outra aproximação com relação à distribuição de tensões normais é adotada.

Em lugar de se admitir a possibilidade de plastificação total da zona comprimida, como no caso do material homogêneo, define-se um estado dito limite em que a armadura se mantém em regime elástico, porém o concreto comprimido em parte se plastifica, sendo que as tensões limites de compressão espalham-se por uma região de comprimento igual a 80% do valor da distância entre da linha neutra e a borda mais comprimida (desprezando-se a porção restante do diagrama de tensões de compressão, v.fig. 3.24b).

Nessas condições passa a interessar diretamente o cálculo do comprimento da zona em compressão limite. Assim, sendo  $h^*$  o comprimento incógnito e  $c$  a distância da borda comprimida à linha neutra, por definição  $h^* = 0,8c$  e da igualdade entre as resultantes de tensões de compressão no concreto e de tração na armadura resulta:

$$\sigma_c b h^* = \sigma_a A_a \rightarrow h^* = \frac{\sigma_a A_a}{\sigma_c b} \quad (3.63 a)$$

Uma expressão alternativa, e bastante útil, pode ser obtida introduzindo-se a proporção entre as deformações, tirada do diagrama de deformações (v.fig.3.24b):

$$\varepsilon_a = \varepsilon_c^p \frac{(0,8d - h^*)}{h^*} \rightarrow (h^*)^2 = \frac{E_a \varepsilon_c^p (0,8d - h^*) A_a}{\sigma_c b} \quad (3.63 b)$$

Por outro lado, o chamado momento de plastificação da seção pode ser calculado tomando-se os momentos das resultantes de tensões:

$$\begin{aligned}
 M_p &= R_t \left( d - \frac{h^*}{2} \right) = R_c \left( d - \frac{h^*}{2} \right) \\
 &= \sigma_c h^* b \left( d - \frac{h^*}{2} \right) \\
 &= \sigma_a A_a \left[ d - \frac{h^*}{2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.63 c}$$

**Exemplo 9:** Um exercício interessante consiste em determinar a altura útil de modo que seja atingida a deformação última  $\varepsilon_u^p = 0,0035$  na fibra mais comprimida do concreto.

Dados complementares:

$$\begin{aligned}
 E_a &= 21000 \text{ kN/cm}^2 ; \sigma_c = 1,667 \text{ kN/cm}^2 ; \\
 A_a &= 4,91 \text{ cm}^2 ; b = 12 \text{ cm} ; d = 40 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Nesse caso, aplicando-se a (3.63b) resulta:

$$\begin{aligned}
 (h^*)^2 + 18,04h^* - 577,42 &= 0 \\
 \therefore h^* &= 16,65 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Com esse valor de  $h^*$  a deformação no aço resulta igual a  $\varepsilon_a = 0,0032$  (3,2 %) e a tensão correspondente  $\sigma_a = 67,2 \text{ kN/cm}^2$ .

Observa-se que o valor da tensão no aço resultou excessivo, pois se sabe que os valores limites compatíveis com o regime elástico estão entre 25 e 30  $\text{kN/cm}^2$ , caso não ocorram variações significativas de temperatura. A deformação ou a tensão no aço deve, portanto, ser a limitante a ser imposta quando do dimensionamento da seção em estudo.

.□

**Exemplo 10:** com os dados e resultado do exemplo anterior, calcular e comparar os valores dos momentos limites do regime elástico e plástico supondo que a armadura se mantenha sempre em regime elástico. Dado complementar:  $n = 10$ .

No regime elástico, a (3.62c) fornece a altura da linha neutra a partir da borda comprimida:

$$c^2 + \frac{2.10.4,91}{12}c - \frac{2.10.4,91}{12}40 = 0 \rightarrow c = 14,46 \text{ cm}$$

Com a (3.62d) determina-se o momento máximo do regime elástico:

$$\begin{aligned} M_e &= \sigma_c \frac{bc}{2} \left( d - \frac{c}{3} \right) \\ &= 1,667 \cdot \frac{12 \cdot 14,46}{2} \left( 40 - \frac{14,46}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore M_e = 5088,0 \text{ kNcm}$$

O momento de plastificação resulta:

$$\begin{aligned} M_p &= \sigma_c h^* b \left( d - \frac{h^*}{2} \right) \\ &= 1,667 \cdot 16,65 \cdot 12 \cdot \left( 40 - \frac{16,65}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore M_p = 10550,0 \text{ kNcm}$$

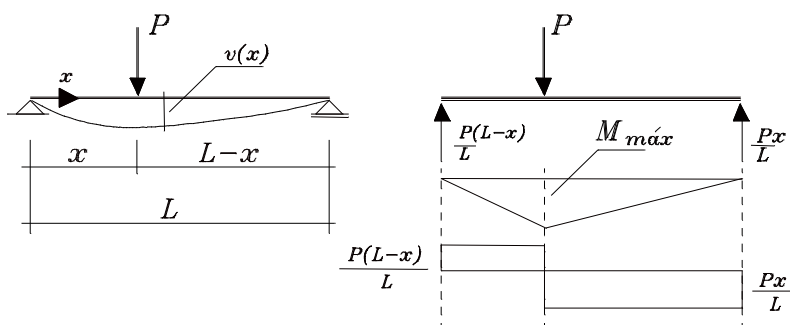
Vale ressaltar que esse exemplo serve, sobretudo, para ilustrar a aplicação das relações deduzidas. A rigor o resultado obtido não é totalmente válido uma vez que, como observado no exemplo anterior, a tensão atuante na armadura deverá superar o limite elástico do aço.

### 3.9 O efeito da força cortante em barras prismáticas

Seja uma viga biapoiada, composta por um material homogêneo de resposta elástica linear e submetida a um carregamento concentrado  $\mathbf{P}$ , aplicado a uma distância  $x$  do apoio esquerdo.

Por equilíbrio, conclui-se que tal carregamento provoca, ao longo da viga, uma distribuição de momentos de flexão  $M$  e de força cortante  $V$ .

Na figura 3.25 representa-se a viga em questão e os diagramas dos esforços  $M$  e  $V$ .



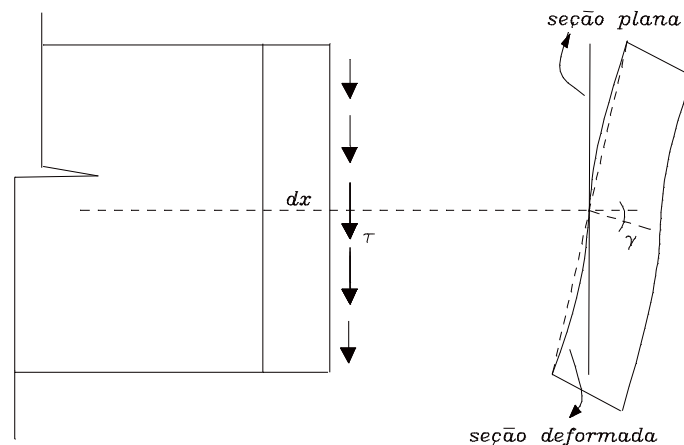
**Figura 3.25 - Viga em flexão simples**

Nesse caso em estudo, devido à existência de momento e cortante, a flexão não é mais pura, passando a ser denominada de flexão simples. Uma primeira dúvida que surge é sobre a possibilidade de extensão, também para esse caso, das hipóteses cinemáticas adotadas na flexão pura. Tais hipóteses, em resumo, afirmam o seguinte:

- a-) os deslocamentos verticais são iguais para todos os pontos contidos numa mesma seção transversal, isto é:  $v = v(x)$ ;
- b-) as seções transversais inicialmente planas e ortogonais ao eixo, permanecem planas e ortogonais ao eixo deslocado.

Primeiramente é importante salientar que a força cortante é resultante de uma distribuição de tensões tangenciais, ou de cisalhamento, na seção transversal. Tais tensões provocam distorções angulares em elementos de lados  $dx$  e  $dy$  contidos em planos longitudinais (v.fig.3.26).

Por sua vez, para que se preserve a continuidade do meio, é necessário que haja uma compatibilidade entre as distorções de elementos adjacentes ao longo da altura da viga, o que acaba por impedir que esta se mantenha plana após a deformação e invalidando, conseqüentemente, a hipótese cinemática (b), conforme ilustrado na figura 3.26.



**Figura 3.26 - Distorção da seção provocada pelo cisalhamento**

Porém, se este efeito for muito pequeno, é possível desprezá-lo, observando-se, mesmo na flexão simples, as hipóteses cinemáticas da flexão pura. Assim sendo, continua valendo a expressão representativa do vetor deslocamento de um ponto qualquer no plano  $(x,y)$ , aqui reescrita na forma usual:

$$d = -(yv')e_1 + v(x)e_2 \quad (3.64)$$

Portanto, do mesmo modo como na flexão pura, as únicas componentes não-nulas de deformação e de tensão, para um material elástico linear, resultam:

$$\varepsilon_x = -yv'' \quad (3.65 a)$$

$$\sigma_x = -yEv'' \quad (3.65 b)$$

Impondo-se ainda a igualdade entre a resultante dos momentos das tensões na seção e o momento aplicado pelo carregamento externo, obtêm-se:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma_x y dA = -Ev'' \int_A y^2 dA \\ &= -Ev'' I_z \rightarrow v'' = -\frac{M_z}{EI_z} \end{aligned} \quad (3.65 c)$$

Combinando-se as (3.65 b,c) resulta:

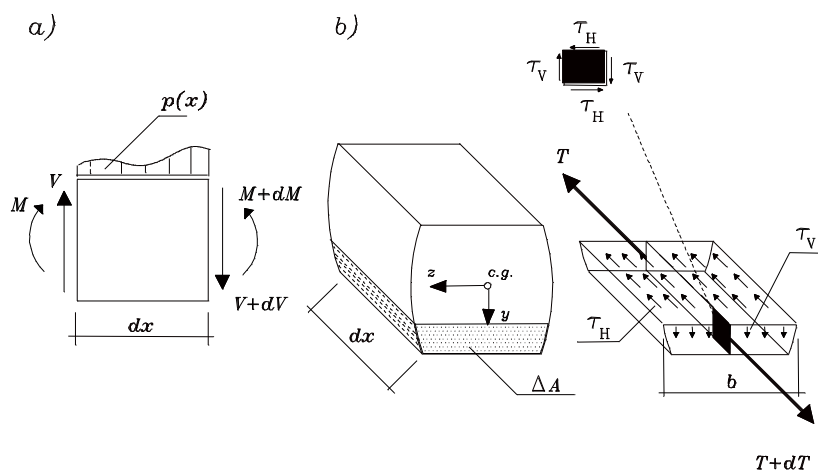
$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (3.65 d)$$

Assim sendo, simplesmente estendendo-se o modelo de deslocamentos da flexão pura (3.64) para a flexão simples, as tensões normais continuam tendo uma distribuição linear ao longo da altura da seção, porém não é possível recuperar uma distribuição de tensões de cisalhamento, apesar da existência da força cortante.

Esta inconsistência pode ser contornada, dentro de certos limites, determinando-se as tensões de cisalhamento diretamente a partir de uma condição de equilíbrio; por conseqüência, a distribuição de tensões de cisalhamento resulta fortemente influenciada pela distribuição de tensões normais.

Vale ressaltar, desde já, que essa forma aproximada de introdução de tensões tangenciais no estudo da flexão simples, é razoável desde que se garanta que sua intensidade seja bastante inferior à das tensões normais.

Passando, então, à questão da determinação das tensões de cisalhamento, de início é conveniente recuperar as relações diferenciais de equilíbrio de um elemento de viga de comprimento  $dx$ , submetido à ação de forças distribuídas por unidade de comprimento e solicitado nas suas extremidades por forças cortantes e momentos fletores (v.fig. 3.27 a).



**Figura 3.27 - a) elemento diferencial de viga  
b) dedução de tensões tangenciais  
por equilíbrio**

As relações diferenciais de equilíbrio resultantes são:

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad ; \quad \frac{dV}{dx} = -p(x) \quad ; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -p(x) \quad (3.66 \text{ a,b,c})$$

Considere-se, em seguida, uma parte daquele elemento de comprimento  $dx$ , extraída por um corte longitudinal, segundo um plano  $z-x$ , realizado numa distância  $y$  a partir do centro de gravidade da seção (v. fig. 3.27b). O novo elemento resultante tem área  $\Delta A$  nas faces ortogonais ao eixo da viga e largura  $b$  na linha correspondente ao plano de corte longitudinal.

Nas faces do elemento, as resultantes das tensões normais devidas a  $M$  e  $M+dM$  são indicadas por  $T$  e  $T+dT$ , respectivamente. Como as resultantes são diferentes, o equilíbrio do elemento na direção  $x$  somente é verificado se houver na face superior de área  $b dx$  uma distribuição de tensões de cisalhamento  $\tau_H$ ; por simplificação essa distribuição é suposta uniforme na largura da face (\*) (v. fig. 3.27 b).

Impondo-se, portanto, o equilíbrio em questão, pode-se obter a expressão das tensões tangenciais através do seguinte procedimento:

$$T + dT - T - \tau_H b dx = 0 \quad \rightarrow \quad dT = \tau_H b dx \quad (3.67 \text{ a})$$

Levando-se em conta a (3.65d) resultam:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y \quad \rightarrow \quad T = \int_{\Delta A} \frac{M}{I_z} y dA \quad (3.67 \text{ b})$$

---

(\*) No final deste item, comenta-se sobre a validade de tal hipótese.

$$\begin{aligned}\sigma_x + d\sigma_x &= \frac{M + dM}{I_z} y \\ \rightarrow T + dT &= \int_{\Delta A} \frac{M}{I_z} y dA + \int_{\Delta A} \frac{dM}{I_z} y dA\end{aligned}\quad (3.67c)$$

Assim sendo, a (3.67a) assume a forma:

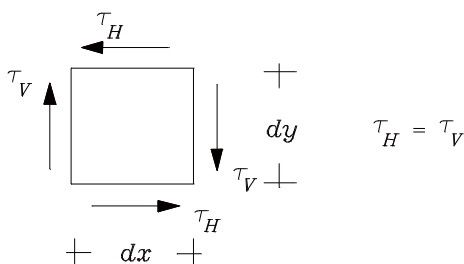
$$\begin{aligned}\int_{\Delta A} \frac{dM}{I_z} y dA &= \tau_H (b dx) \\ \frac{dM}{I_z} M_s &= \tau_H (b dx) \quad \therefore \tau_H = \frac{dM}{b dx I_z} M_s\end{aligned}\quad (3.67 d)$$

Finalmente, levando-se em conta as relações diferenciais de equilíbrio (3.66 a,b), obtém-se:

$$\tau_H = \frac{V dx}{b dx I_z} M_s = \frac{V M_s}{b I_z} \quad (3.67 e)$$

Idealizando-se a viga como a composição de um conjunto de lâminas superpostas ao longo da sua altura, pode-se interpretar que as tensões de cisalhamento horizontais  $\tau_H$  tenham o papel de oferecer resistência ao escorregamento relativo entre as lâminas.

Por outro lado, do equilíbrio de momentos de elementos infinitesimais com espessura unitária, e dispostos em planos longitudinais, é possível demonstrar a igualdade entre as tensões tangenciais horizontais e tensões de cisalhamento verticais contidas nos planos das seções transversais, como ilustram as figuras 3.27b e 3.28.





**Figura 3.28 - Igualdade de tensões tangenciais**

Conseqüentemente, a expressão da tensão tangencial vertical resulta:

$$\tau_V = \tau_{xy} = \frac{V M_s}{b I_z} \quad (3.68)$$

Uma verificação sobre a validade da (3.68) consiste em determinar sua resultante em toda a área  $A$  da seção transversal e mostrar que ela é igual à força cortante atuante. Assim procedendo, obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} \int_A \tau_{xy} dA &= \int_A \frac{V M_s}{b I_z} dA \\ &= \frac{V}{I_z} \int_{y_s}^{y_i} \frac{M_s}{b} b dy = \frac{V}{I_z} \int_{y_s}^{y_i} M_s dy \end{aligned} \quad (3.69 a)$$

onde  $y_s$  e  $y_i$  são, respectivamente, as ordenadas dos pontos pertencentes às bordas superior e inferior da seção.

Considerando-se, por outro lado, que o momento estático da parte de seção abaixo da ordenada  $y$  é dado por:

$$M_s = \int_y^{y_i} yb dy = - \int_{y_i}^y yb dy \rightarrow dM_s = -y dA \quad (3.69 b)$$

e integrando-se por partes a (3.69a), chega-se a:

$$\int_A \tau_{xy} dA = \frac{V}{I} \left[ M_s y \Big|_{y_i}^{y_s} - \int_A y dM_s \right] \quad (3.69 c)$$

O primeiro termo dentro dos colchetes é nulo, pois envolve o momento estático de toda a seção com relação ao centro de gravidade. De fato:

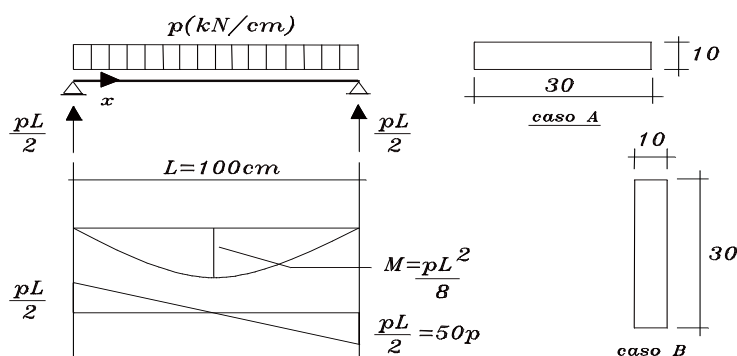
$$M_s(y_s) = \int_{y_s}^{y_i} yb dy = 0 \quad e \quad M_s(y_i) = 0 \quad \therefore \quad M_s(y_s)y_s - M_s(y_i)y_i = 0$$

Portanto, segue que:

$$\int_A \tau_{xy} dA = \frac{V}{I_z} \left[ 0 + \int_A y^2 dA \right] = \frac{V}{I_z} I_z = V \quad (3.69 d)$$

Ressalta-se que a (3.68) vale quando a deformação associada ao cisalhamento for pequena. Então a questão que segue diz respeito ao estabelecimento de um critério para se avaliar previamente se a influência das tensões de cisalhamento será significativa ou não. Para a estrutura estudada, conforme ilustra o exemplo seguinte, um critério bastante simples pode ser estabelecido observando-se que quanto menor a relação entre a altura da seção transversal e o vão, menor a intensidade das tensões de cisalhamento no confronto com as tensões normais.

**Exemplo 11:** Seja uma viga isostática, submetida a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de todo o vão. Para a viga em questão adota-se uma seção transversal retangular que pode ser disposta de dois modos: casos A e B na figura 3.29.



**Figura 3.29 - Viga cuja seção transversal pode ser disposta de dois modos**

O que se pede no exemplo é comparar as intensidades das

máximas tensões normais e de cisalhamento considerando-se as duas disposições para a seção adotada.

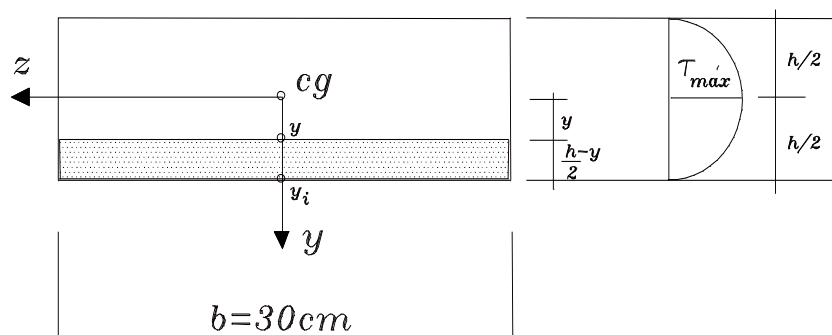
Dado complementar:  $p = 0,10 \text{ kN/cm}$  .

• **CASO A: seção transversal de  $(30 \times 10) \text{ cm}^2$**

A máxima tensão normal ocorrerá na seção mais solicitada ao momento fletor, que é, no caso, a seção central. Assim sendo, levando-se em conta o diagrama de momentos indicado na figura 3.29, e considerando-se a fibra mais afastada do centro de gravidade segue que:

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y = \frac{1250,0,1}{30 \cdot 10^3} \cdot 12 \cdot (5) \rightarrow \sigma_x = 0,25 \text{ (kN/cm}^2 \text{)}$$

Já a tensão de cisalhamento máxima ocorre nas seções adjacentes aos apoios, onde a força cortante é maior em módulo, e no ponto em que é máximo o quociente entre momento estático e a correspondente largura da seção.



**Figura 3.30 - Distribuição das tensões de cisalhamento na seção retangular**

No caso da seção retangular, cuja largura é constante, para o momento estático vale a expressão:

$$M_s = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

O momento estático máximo é obtido com referência ao centro de gravidade; conseqüentemente é na altura do c.g. que a tensão cisalhante é máxima (v.fig.3.30). Portanto, em  $y = 0$ :

$$M_{smáx} = \frac{bh^2}{8}$$

Finalmente, para a tensão de cisalhamento resulta:

$$\tau_{máx} = \frac{0,1 \cdot 100 \cdot 30 \cdot 10^2 \cdot 12}{2 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 8} = 0,025 \text{ kN/cm}^2$$

ou ainda:  $\tau_{máx} = 10\% \sigma_{máx}$  .

• **CASO B: seção transversal de (10x30) cm<sup>2</sup>**

Procedendo-se de forma análoga ao caso anterior, resulta:

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{I_z} y = \frac{1250 \cdot 0,1 \cdot 12}{10 \cdot 30^3} \cdot 15 \rightarrow \sigma_{máx} = 0,083 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{máx} = \frac{50 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 30^2 \cdot 12}{10 \cdot 10 \cdot 30^3 \cdot 8} = 0,025 \text{ kN/cm}^2$$

portanto,  $\tau_{máx} \cong 30\% \sigma_{máx}$  .

Os resultados obtidos mostram que, para seções transversais onde a altura e a largura são muito menores que o comprimento da peça entre os apoios (no caso A,  $h=L/10$ ) a influência da cortante é pequena e pode ser negligenciada. Por outro lado, quando as dimensões da seção são significativas quando comparadas ao vão, tal influência deve ser levada em conta (da ordem de 30% no caso B).

.□

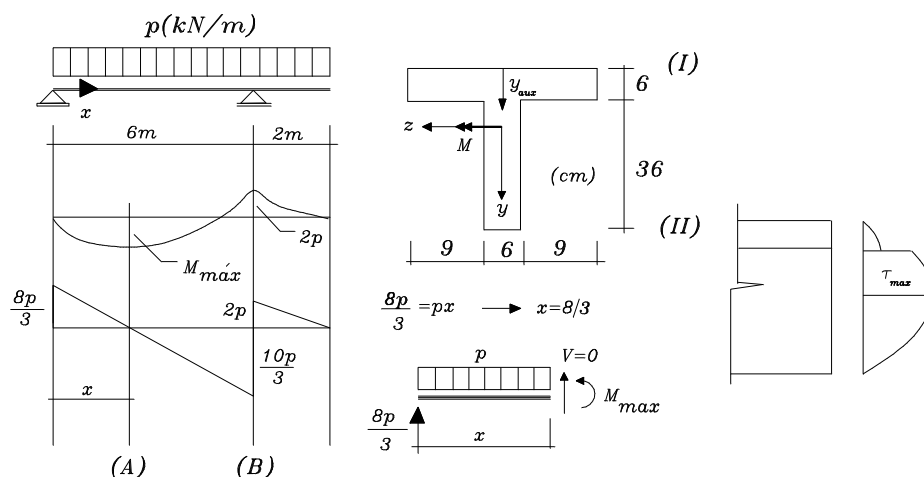
Como regra geral, a partir desse exemplo, as tensões de cisalhamento poderão ser calculadas pela relação (3.68) quando a razão entre a altura e o vão for menor ou igual a 1/5.

**Exemplo 12:** Trata-se de uma viga biapoada submetida a um carregamento uniformemente distribuído e com seção transversal em T. Pede-se:

**a-)** o valor da carga distribuída que pode ser aplicada de modo que as tensões de tração e de compressão não ultrapassem, em módulo, respectivamente os valores  $1,0 \text{ kN/cm}^2$  de  $0,8 \text{ kN/cm}^2$ ;

**b-)** o valor em módulo da maior tensão de cisalhamento, indicando o ponto e a seção onde ela ocorre.

As dimensões da viga e de sua seção estão indicadas na figura 3.31, bem como os diagramas de momento fletor e cortante.



**Figura 3.31 - Viga com seção transversal em T**

Com as medidas da seção podem ser determinados: a posição do centro de gravidade e o momento de inércia segundo o eixo horizontal  $z$  que passa por ele. Observa-se que para a determinação do centro de gravidade utiliza-se um eixo auxiliar com origem na borda superior da seção, conforme indica a figura 3.31.

As grandezas geométricas de interesse resultam:

$$y_{aux, cg} = \frac{[(24 \cdot 6) \cdot 3 + (6 \cdot 36) \cdot 24]}{[(24 \cdot 6) + (6 \cdot 36)]} = 15,6 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{24 \cdot 6^3}{12} + 24 \cdot 6 \cdot 12,6^2 + \frac{6 \cdot 36^3}{12} + 36 \cdot 6 \cdot 8,4^2 = 61862,4 \text{ cm}^4$$

O valor máximo do momento ocorre na seção A e o mínimo (ou mais negativo) na seção B (v.fig.3.31). Considerando-se que a seção de momento máximo encontra-se em  $x = \frac{8}{3}$  (m), resultam:

$$M_{m\acute{a}x} = \left(\frac{8p}{3}\right) \cdot \frac{8}{3} - \left(\frac{8p}{3}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{32p}{9} \text{ (kN.m)} \quad \text{ou} \quad M_{m\acute{a}x} = \frac{320000p}{9} \text{ (kN.cm)}$$

Nas relações acima,  $p$  deve ter unidades de kN/cm.

As tensões extremas em cada seção encontram-se nos pontos mais afastados do centro de gravidade. Assim, na seção A, considerando-se as bordas superior (I) e inferior (II) e já impondo as limitações sobre as tensões normais tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{(I)} &= \left(\frac{320000p}{9I_z}\right) \cdot (-15,6) \geq -0,8 \quad \therefore p \leq 0,0892 \text{ kN/cm} \\ \sigma_{(II)} &= \left(\frac{320000p}{9I_z}\right) \cdot (26,4) \leq 1,0 \quad \therefore p \leq 0,0659 \text{ kN/cm} \end{aligned}$$

Analogamente, para a seção B resultam:

$$\begin{aligned} \sigma_{(I)} &= \left(-\frac{20000p}{I_z}\right) \cdot (-15,6) \leq 1,0 \quad \therefore p \leq 0,1983 \text{ kN/cm} \\ \sigma_{(II)} &= \left(-\frac{20000p}{I_z}\right) \cdot (26,4) \geq -0,8 \quad \therefore p \leq 0,0937 \text{ kN/cm} \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que:  $p_{m\acute{a}x} = 0,0659 \text{ kN/cm}$ .

A maior tensão de cisalhamento em módulo ocorre na seção B na altura do centro de gravidade, pois lá a relação  $M_s/b$  é máxima em módulo. Nessas condições resulta que:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left[ \frac{1000p \cdot 6 \cdot 26,4 \cdot 13,2}{3} \right] / (6 \cdot 61862,4) \rightarrow \tau_{m\acute{a}x} \cong 0,124 \text{ kN/cm}^2.$$

O diagrama da figura 3.31 ilustra a distribuição da tensão de cisalhamento na seção.

.□

Duas questões restam para ser discutidas: a aproximação gerada pela hipótese de distribuição uniforme das tensões de cisalhamento na largura da seção e a possibilidade de não coincidência entre as direções da força cortante determinada pelo carregamento externo e a resultante das tensões de cisalhamento (numericamente iguais entre si).

Quanto à hipótese de distribuição uniforme das tensões de cisalhamento, ela é de fato razoável em seções que apresentam características como: um eixo de simetria, bordas laterais paralelas a esse eixo e onde o traço do plano de carregamento coincide com o de simetria.

Quando a seção é simétrica, mas tem as bordas laterais inclinadas em relação ao eixo de simetria, como na seção trapezoidal ilustrada na figura (3.32a), as tensões de cisalhamento nas linhas de borda devem ser também inclinadas, apresentando componentes vertical e horizontal. Nessa situação, sendo o plano de carregamento coincidente com o de simetria, é possível sustentar a hipótese de uniformidade na distribuição das tensões de cisalhamento na largura da seção, argumentando-se que a tensão determinada pela expressão (3.68) seja nas bordas igual à componente vertical da real inclinada. Essa argumentação é razoável, pois a resultante das componentes verticais ainda coincide com a força cortante na seção e a resultante das componentes horizontais é nula devido à simetria.

No entanto, estudos desenvolvidos com modelos teóricos mais complexos, que permitem tratar de forma mais geral a questão da determinação das tensões de cisalhamento, mostram que em seções com geometria qualquer as tensões de cisalhamento devem apresentar uma distribuição não-uniforme na largura da seção. Portanto, comete-se um erro de aproximação ao se admitir a distribuição uniforme nesses casos.

Além disso, há uma segunda questão que deve ser abordada e que independe da hipótese admitida para a distribuição das tensões. Trata-se do fato de que dependendo da geometria da seção a resultante das tensões de cisalhamento pode não estar alinhada com o traço do plano de carregamento. Sempre que esta situação ocorrer, gera-se um momento de torção na seção dado pelo produto da força cortante pela distância à direção da resultante das tensões de cisalhamento.

Assim sendo, para se evitar o efeito de torção no caso geral, é necessário garantir que a força cortante oriunda do carregamento externo atue segundo um plano que contenha a direção da resultante das tensões de cisalhamento. Na verdade, a questão pode assumir uma conotação um pouco mais genérica, pois se trata agora de evitar que numa dada seção haja torção provocada por um carregamento transversal de direção qualquer.

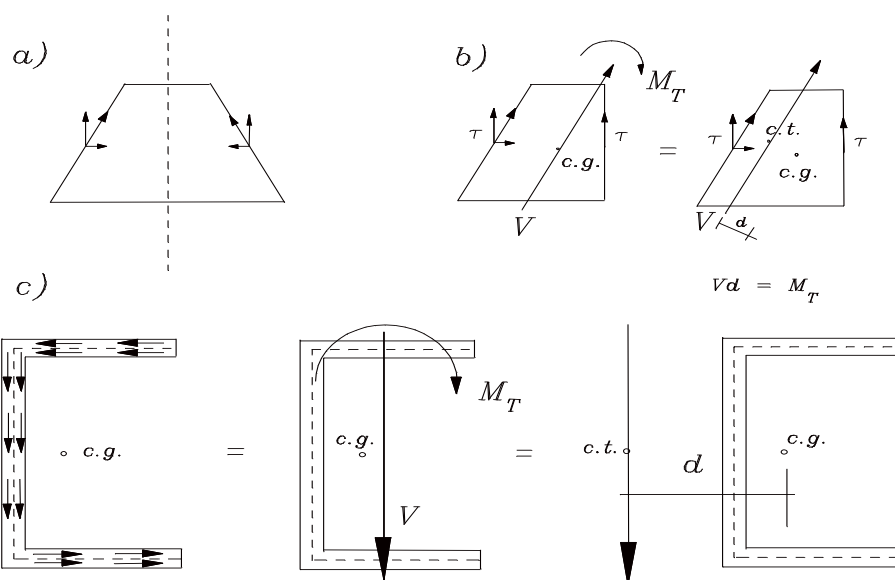
A resposta a esse problema se resume na determinação de um ponto particular da seção denominado *centro de torção ou de cisalhamento* (v.fig.3.32b). Por tal ponto passam as resultantes de tensões de cisalhamento associadas a forças cortantes de diferentes direções; se uma dada força cortante passar pelo centro de cisalhamento ou de torção, a inexistência de torção fica garantida. Claramente a posição deste ponto não deve depender das forças cortantes impostas para a sua determinação, devendo ser, portanto, uma característica da seção.

Pode-se mostrar que para a determinação do centro de cisalhamento é suficiente tomar duas direções de possível atuação de forças cortantes fictícias e que sejam linearmente independentes. Em particular, o centro de cisalhamento sempre estará contido num eixo de simetria da seção e somente nos casos de seções transversais com dois ou mais eixos de simetria esse ponto coincide com o centro de gravidade.

Novamente, se este mesmo problema for analisado por uma teoria mais completa ('Teoria da Elasticidade'), que dispensa qualquer hipótese sobre a distribuição das tensões, mostra-se que de fato, no caso geral, a resultante das tensões de



cisalhamento passa por um ponto não coincidente com o centro de gravidade. Porém, o ponto determinado por um modelo mais geral não coincide com o centro de torção determinado por tensões de cisalhamento oriundas da hipótese de distribuição uniforme. Portanto, essa hipótese introduz, a rigor, uma aproximação na posição do centro de torção.



**Figura 3.32 - a) tensões de cisalhamento nas linhas de borda  
 b) centro de torção ou de cisalhamento  
 c) centro de torção em seção aberta de paredes finas**

Para se evitar a introdução de um nível de complexidade exagerado e incompatível com os objetivos deste texto, a questão da determinação da posição do centro de cisalhamento será apresentada em capítulo específico considerando-se exclusivamente seções de forma geométrica aberta, compostas por trechos retangulares de espessura fina.

Nesse tipo de seção, sem perda significativa de precisão, são válidas duas simplificações: admite-se que as tensões de cisalhamento têm direções paralelas às linhas das bordas da seção e que apresentam distribuição uniforme ao longo da espessura. Caso a seção apresente ainda um eixo de simetria, pode-se considerar apenas uma força cortante fictícia de direção perpendicular à do eixo de simetria, pois certamente aquele centro estará sobre esse eixo, (v.fig.3.32c).

#### 4 CENTRO DE CISALHAMENTO DE SEÇÕES ABERTAS COM PAREDES FINAS

Neste item, trata-se da determinação do *centro de cisalhamento*, ou de torção, definido como o ponto da seção por onde deve passar um dado carregamento transversal para que não provoque efeito de torção.

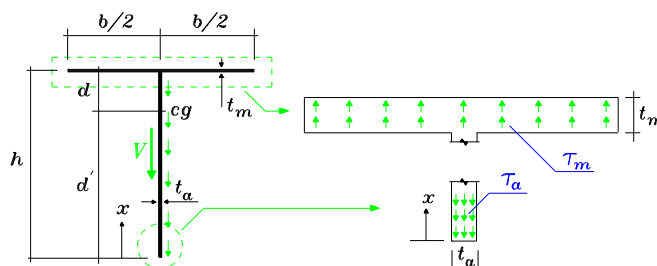
A determinação do centro de cisalhamento será abordada em seções geometricamente mais simples, cujas formas obedecem às seguintes restrições:

- a)** As seções são abertas formadas por um ou mais trechos de espessuras delgadas, isto é: a espessura é muito pequena quando comparada às outras dimensões (altura e largura) da seção;
- b)** Existe pelo menos um eixo de simetria.

Para uma discussão inicial sobre o conceito, considere-se a seção em forma de "T", ilustrada na figura 4.1, apresentando espessuras delgadas constantes  $t_a$  e  $t_m$ , por trechos, e sendo  $b$  e  $h$  as dimensões da largura e da altura, respectivamente.

Supondo que o traço do plano de carga coincida com o eixo de simetria da seção, como indicado naquela figura, em princípio as tensões de cisalhamento provocadas pelo carregamento devem ter a direção daquele eixo. Além disso, na alma da seção elas podem ser determinadas pela relação:

$$\tau_{alma} = \frac{V M_s}{b I} = \frac{V}{I} \frac{t_a x (d' - x/2)}{t_a} \quad (4.1)$$



**Figura 4.1 - Tensões de cisalhamento verticais na mesa e na alma**

As tensões de cisalhamento verticais que ocorrem na mesa da seção podem ser desprezadas, pois seus valores devem ser nulos nas bordas superior e inferior e sua variação ao longo da espessura, que é bastante delgada, também deve ser muito pequena. Nessas condições, são as tensões na alma que contribuem significativamente para a resultante  $V$ , cujo valor é igual à força cortante determinada pelo carregamento aplicado.

Mas, apesar das considerações anteriores, a rigor a mesa horizontal não está livre de tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante.

De fato, imaginando-se que a seção em questão pertença a uma viga em balanço com carga concentrada aplicada na sua extremidade livre, a verificação do equilíbrio de forças na direção longitudinal aplicada a uma porção elementar de mesa de comprimento  $dx$  leva à concluir, por reciprocidade, pela existência de tensões de cisalhamento horizontais nas faces do elemento que pertencem ao plano da seção, como ilustrado na figura 4.2. Portanto, tais tensões surgem da necessidade de se equilibrar a variação longitudinal das tensões normais associadas à flexão, e sempre existirão quando houver aquela variação.

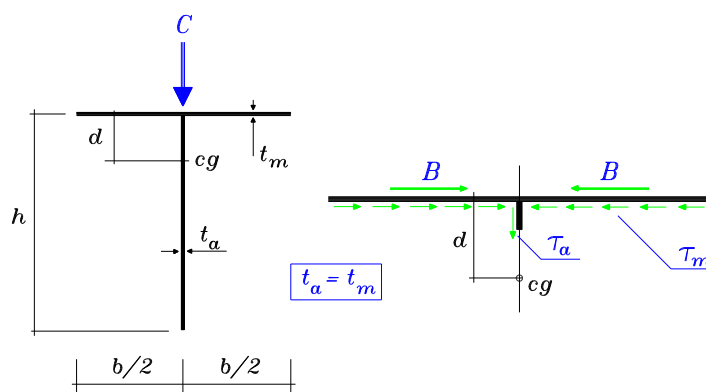
A relação que permite determinar a tensão de cisalhamento horizontal num ponto genérico da mesa horizontal é então deduzida pela seguinte seqüência, tomando-se por base os dados ilustrados na figura 4.2:

$$\begin{aligned} \tau \cdot t \cdot dx &= \int d\sigma_x \cdot dS \\ &= \int_A \frac{dM}{I} y \cdot dS \quad \therefore \quad \tau = \frac{V M_A}{t I_z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $M_A$  é o momento estático com relação ao eixo z da parte de seção que está antes (ou depois) do ponto onde se calcula a tensão de cisalhamento. Nota-se que a relação (4.2) aplica-se também a qualquer ponto da alma vertical, sendo que nesse caso ela passa a coincidir com a (4.1).

Estendendo-se a análise do equilíbrio realizada à outras partes quaisquer da seção, conclui-se que ao longo da seção transversal configura-se uma distribuição de tensões de cisalhamento que se assemelha a um fluxo, conforme indica a figura 4.2.

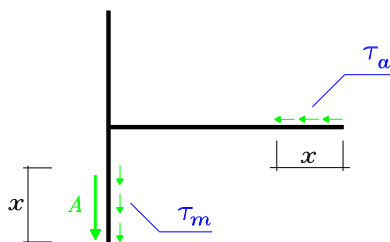
Observa-se, entretanto, que as resultantes do 'fluxo' sobre cada uma das partes que compõem a mesa acabam por se anular, como consequência da própria simetria da seção. Além disso, a resultante das tensões verticais está alinhada com o plano de carregamento; esta, aliás, é uma condição suficiente para que não haja momento de torção no plano da seção por efeito do carregamento aplicado.



**Figura 4.2 - Tensões de cisalhamento horizontais na mesa**

Admita-se, agora, que a mesma seção esteja disposta conforme indica a figura 4.3. Nessa situação, as tensões cisalhantes distribuem-se apenas na mesa, agora com direção

vertical. No trecho horizontal, as tensões são nulas, pois pela relação (4.2) o momento estático fica determinado em função de uma distância de transporte nula com relação ao centro de gravidade. De fato, levando-se em conta os dados geométricos ilustrados na figura 4.3, a expressão (4.2) fornece os seguintes resultados para as tensões horizontal e vertical:



**Figura 4.3 - Eixo de simetria com disposição transversal ao plano de carga**

$$\tau_{alma} = \tau_h = \frac{V \cdot t_a \cdot 0}{I_z \cdot t_a} = 0 \quad (4.3)$$

$$\tau_{mesa} = \tau_v = \frac{V \cdot t_m \cdot x(b/2 - x/2)}{I_z \cdot t_m} \quad (4.4)$$

Assim sendo, a resultante das tensões de cisalhamento está contida no trecho vertical e, portanto, só existirá equilíbrio se o traço do plano de carregamento externo estiver coincidente com aquele trecho; em caso contrário, resultará um momento de torção dado pelo produto da carga pela distância ao trecho vertical.

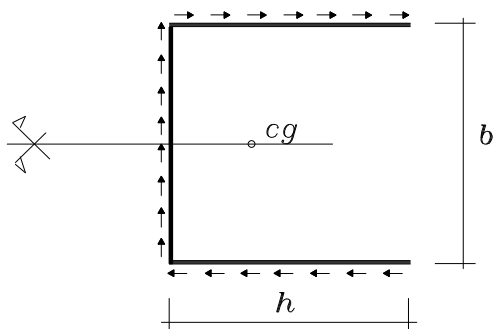
Combinando-se as duas análises anteriores, conclui-se que a inexistência de torção fica garantida para ambas as disposições admitidas para a seção, se o plano de carregamento passar pelo ponto de interseção entre alma e mesa, que é, também, o ponto de interseção entre as duas resultantes de cisalhamento analisadas. Esse ponto é o centro de cisalhamento.

Como regra geral, o centro de cisalhamento se situa sobre o eixo de simetria. Resulta daí que em seções com um eixo de simetria a posição do centro de cisalhamento coincide com o ponto de interseção entre aquele eixo e a resultante das tensões

de cisalhamento provocadas por um carregamento transversal a ele.

Outro aspecto importante, que também decorre da análise das duas situações anteriores de disposição da seção, é que em cada uma delas admitiu-se que a seção estaria submetida a uma força cortante, responsável, aliás, pelo aparecimento das tensões de cisalhamento. Uma viga em balanço com carga concentrada aplicada na sua extremidade livre foi o esquema estático adotado para explicar a origem da força cortante. Entretanto, um outro esquema estático qualquer poderia ter sido adotado, pois somente a existência da força cortante (com qualquer sentido) e o fluxo dela decorrente são de fato essenciais para as conclusões sobre a posição do centro de cisalhamento. Assim sendo, essa posição deve independe do carregamento e se constitui, portanto, numa característica geométrica da seção.

Para ilustrar os passos de cálculo para a determinação da posição do centro de cisalhamento, considere-se o caso da seção mostrada na figura 4.4.



**Figura 4.4 - Seção transversal com um eixo de simetria e fluxo de tensões de cisalhamento**

Como a seção possui um eixo de simetria, trata-se de determinar o ponto de interseção entre ele e a força cortante transversal resultante de uma distribuição de tensões de cisalhamento adotada. Observa-se que essa distribuição precisa apresentar, no conjunto das partes que compõem a seção, sentidos

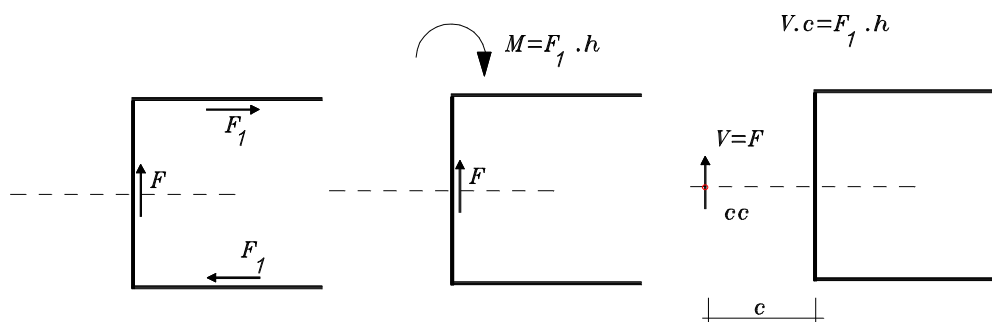
que levem à idéia geral de um fluxo de tensões percorrendo a seção.

Como diretriz para identificar o fluxo, pode-se sugerir que as tensões tenham sentidos tais que se percorra a seção de uma extremidade a outra sem que se inverta o sentido de percurso. Na figura 4.4, mostra-se uma distribuição com essa característica e que induz à idéia de fluxo da extremidade inferior para a superior.

Alternativamente, poderia ser adotado um fluxo com sentido totalmente invertido, percorrendo a seção da extremidade superior para a inferior; o resultado da análise não se altera por esse motivo.

Uma vez definido o fluxo, passam-se às seguintes etapas para a determinação da posição do centro de cisalhamento, as quais estão ilustradas na figura 4.5:

- a)** Representam-se em cada trecho da seção as resultantes dos correspondentes fluxos de cisalhamento;
- b)** Escolhe-se um ponto de redução sobre o eixo de simetria e para ele transportam-se, de forma estaticamente equivalente, todas as resultantes determinadas no item a), isto é, indicam-se as forças e os momentos delas em relação ao ponto de redução;
- c)** Imagina-se que sobre a seção atue somente uma força cortante numa distância **c** do ponto de redução, de tal modo que seu efeito seja estaticamente equivalente ao conjunto força vertical e momento obtidos no item c).



**Figura 4.5 - Equivalência de forças para a determinação do centro de cisalhamento**

Nota-se, em primeiro lugar, que devido à simetria, são iguais as resultantes que atuam em trechos simetricamente dispostos. Por essa razão, as resultantes paralelas ao eixo de simetria acabam por se cancelar na equivalência estática. Assim sendo, no ponto de redução, após se realizar a redução indicada no item b), resulta somente uma força transversal ao eixo de simetria e um momento no plano da seção.

A segunda equivalência, sugerida no item c), leva a uma relação para o cálculo da distância  $c$ , que permite caracterizar a posição do centro de cisalhamento. Tal equivalência resume-se então pelas condições:

$$F_2 = V ; \quad V \cdot c = F_1 \cdot b \quad (4.5 \text{ a,b})$$

Da forma (4.5b) resulta:

$$c = \frac{F_1 \cdot b}{V} \quad (4.6)$$

Resta comentar como se determinam as resultantes em cada trecho. Por definição, para um trecho genérico  $i$ :

$$F_i = \int_{A_i} \tau dA \quad (4.7)$$

onde  $A_i$  é a área do trecho de seção. Definindo-se por *linha do esqueleto* a linha que contém os pontos médios das espessuras tomadas em todos os trechos da seção e identificando-se sobre essa linha, em cada um dos trechos e com origem numa de suas extremidades, uma coordenada local  $s$ , conforme indica a figura 4.4, o elemento de área que aparece na (4.7) pode passar a ser escrito na forma:  $dA = t \cdot ds$ . Desse modo, na (4.7) em lugar de uma integral de área, passa-se a realizar uma integral de linha.



Levando-se em conta os comentários anteriores e substituindo-se na (4.7) a relação (4.2), resulta:

$$F_i = \int_{\lambda_i} \frac{VM_{A_i}}{It} t ds = \frac{V}{I} \int_{\lambda_i} M_{A_i} ds \quad (4.8)$$

onde  $M_{A_i}$  é o momento estático da parte de seção que encontra-se antes ou depois do ponto genérico sobre o trecho de comprimento  $\lambda_i$ .

No caso da seção em estudo, a resultante das tensões na mesa horizontal, representada por  $F_1$ , fica expressa por:

$$F_1 = \frac{V}{I} \int_h \frac{bst}{2} ds = \frac{Vbt h^2}{4I} \quad (4.9)$$

Por sua vez, o momento de inércia em relação ao eixo de simetria, resulta:

$$I = tb^3/12 + 2th(b/2)^2 = tb^2(b+6h)/12$$

observando-se que sendo a seção de paredes finas as medidas são tomadas sobre a linha do esqueleto e desprezam-se as parcelas de inércias próprias que envolvem espessuras ao cubo.

Substituindo-se a resultante dada pela (4.9) na relação (4.6), nota-se que a força cortante genérica se cancela, o que confirma, novamente, que a posição do centro de cisalhamento independe da força cortante. Dessa forma, obtém-se:

$$c = \frac{b^2 h^2 t}{4I}$$

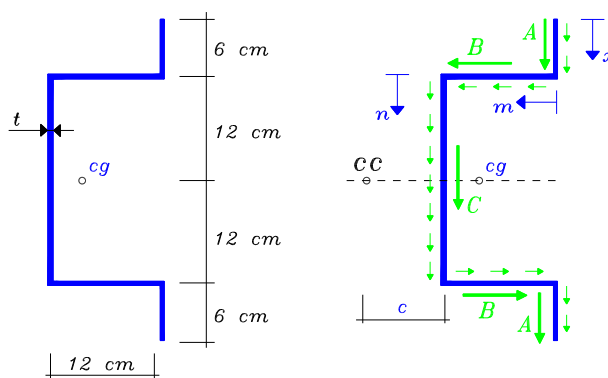
Finalmente, com a expressão do momento de inércia e adotando-se, por exemplo, uma relação  $b = 2h$ , segue que  $c = \frac{3h}{8}$ .

Uma última consideração a ser feita, refere-se à utilidade da equivalência dada pela relação (4.5a). Tendo-se em vista que a resultante  $F_2$  é expressa pela relação (4.8), daquela equivalência segue que:

$$\frac{V}{I} \int_0^h M_{A_2} ds = V \quad \rightarrow \quad I = \int_0^h M_{A_2} ds$$

ou seja, obtém-se uma forma alternativa para o cálculo do momento de inércia.

**Exemplo 1:** Determinar o centro de cisalhamento da seção transversal com geometria ilustrada na figura 4.6, onde a espessura  $t = 1 \text{ cm}$  é constante ao longo da linha do esqueleto.



**Figura 4.6 - Geometria da seção, fluxo e resultantes de cisalhamento**

Um primeiro passo consiste em adotar um fluxo de tensões de cisalhamento. Na figura 4.6, mostra-se um fluxo que parte da extremidade superior da seção em direção à inferior.

As resultantes dos fluxos em cada um dos trechos (A,B,C) determinam-se pela aplicação da relação (4.8), observando-se, como indicado na figura, que as resultantes pertencentes a trechos simetricamente dispostos são iguais entre si. Assim procedendo, resultam:

$$A = \int_0^6 \tau t ds = \frac{V}{I} \int_0^6 s \left( 18 - \frac{s}{2} \right) ds = \frac{V}{I} \left( \frac{18}{2} \cdot 6^2 - \frac{6^3}{6} \right) = 288 \frac{V}{I}$$

$$B = \frac{V}{I} \int_0^{12} (90 + 12s) ds = \frac{V}{I} 12 \cdot (90 + 72) = 1944 \frac{V}{I}$$

$$C = \frac{V}{I} \int_0^{24} (90 + 144 + s \cdot (12 - \frac{s}{2})) ds = \frac{V}{I} 24 \cdot (234 + 144 - 96) = 6768 \frac{V}{I}$$

Por sua vez, o momento de inércia em relação ao eixo de simetria resulta:

$$I = 24^3/12 + 2 \times 12 \times 12^2 + 2[6^3/12 + 6(12+3)^2] = 7344 \text{ cm}^4$$

Tomando-se como ponto de redução das forças resultantes, o ponto de interseção entre a seção e o eixo de simetria, o conjunto de forças fica reduzido a uma força vertical  $V$  e a um momento dados por:

$$V = C + 2A \quad ; \quad M = 24 \cdot B - 2 \cdot 12 \cdot A$$

A posição do centro de cisalhamento resulta da condição de que na seção exista somente uma força cortante estaticamente equivalente ao conjunto  $V$  e  $M$ , passando por um ponto sobre o eixo de simetria distante  $c$  do ponto de redução. A condição de equivalência exprime-se pelas relações:

$$V = C + 2A \quad ; \quad V \cdot c = 24(B - A)$$

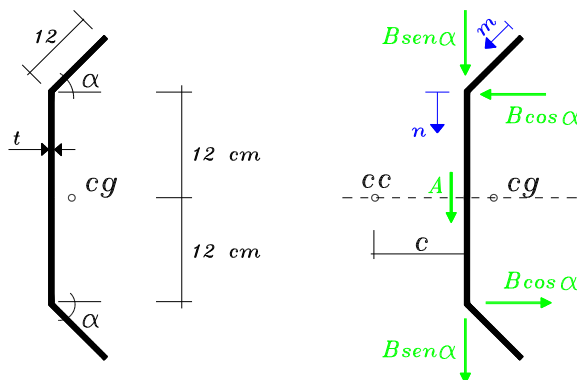
Da primeira condição, segue uma verificação para o valor do momento de inércia:

$$C + 2A = V(6768 + 2 \cdot 288)/I = V \quad \therefore I = 7344 \text{ cm}^4 \quad \text{OK!}$$

Da segunda condição resulta:

$$2A \cdot (c+12) + C \cdot c - B \cdot 24 = 0 \quad \square \quad c = (24 \cdot 1656)/I = 5,41 \text{ cm}$$

**Exemplo 2:** Para a seção transversal representada na figura 4.7, determinar o centro de cisalhamento, sendo a espessura  $t$  constante e igual a 1 cm.



**Figura 4.7 - Seção transversal e resultantes dos fluxos de cisalhamento adotados**

Adotando-se um fluxo de tensões que percorre a seção da extremidade superior em direção à inferior, as resultantes  $A$  e  $B$  em cada um dos trechos são dadas por:

$$B = \frac{V}{I} \int_0^{12} s \cdot (19,2 - 0,3s) ds = \frac{V}{I} 12^2 \cdot (9,6 - 1,2) = 1209,6 \frac{V}{I}$$

$$A = \frac{V}{I} \int_0^{24} [187,2 + s \cdot (12 - \frac{s}{2})] ds = \frac{V}{I} (4492,8 + 3456 - 2304) = 5644,8 \frac{V}{I}$$

O momento de inércia em relação ao eixo de simetria resulta:

$$I = 24^3/12 + 2\{144 \cdot 0,36 + 12(12+3,6)^2\} = 7096,32 \text{ cm}^4$$

Tomando-se como ponto de redução das forças resultantes, o ponto de interseção entre a seção e o eixo de simetria, o conjunto de forças fica reduzido a uma força vertical de valor  $A + 2B \text{ sen } \alpha$  e a um momento igual a  $24 \cdot B \text{ cos } \alpha$ . Imaginando-se, então, que na seção exista apenas uma força cortante vertical  $V$

passando pelo centro de cisalhamento, a uma distância  $c$  do ponto de redução, valem as seguintes relações de equivalência:

$$V = A + 2B \operatorname{sen} \alpha ; V \cdot c = 24 \cdot B \operatorname{cos} \alpha$$

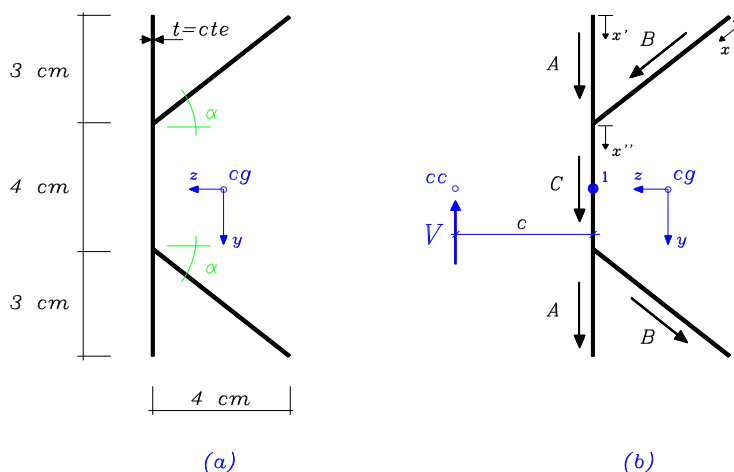
Da primeira relação segue uma verificação para o valor do momento de inércia:

$$2B \operatorname{sen} \alpha + A = V(5644,8 + 1209,6 \cdot 2 \cdot 0,6) / I = V \quad \therefore I = 7096,32 \text{ cm}^4$$

Da segunda relação segue a posição do centro de cisalhamento:

$$24B \operatorname{cos} \alpha = Vc \rightarrow c = [24 \cdot (0,8) \cdot 1209,6] / 7096,32 = 3,27 \text{ cm}$$

**Exemplo 3:** Determinar a posição do centro de cisalhamento da seção transversal ilustrada na figura 4.8, sabendo-se que a espessura  $t$  é igual a  $0,3 \text{ cm}$  e que  $I = 64 \text{ cm}^4$ .



**Figura 4.8 - a) seção transversal  
b) resultantes do fluxo**

Adotando-se um fluxo de tensões que percorre a seção da extremidade superior em direção à inferior, as resultantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são determinadas, mas formas que seguem. Nota-se que a

coordenada local  $s$  tem origem nas extremidades de cada um dos trechos em questão. Chama-se a atenção, também, para os limites de integração adotados nos cálculos das resultantes.

$$B = \int_0^5 \tau t ds = \frac{V}{I} \int_0^5 M_s ds = \frac{V}{I} \int_0^5 t(5s - 0,30s^2) ds$$

$$B = \frac{Vt}{I} \left[ \frac{5}{2} \cdot (5)^2 - \frac{1}{3} \cdot 0,30 \cdot (5)^3 \right] = 50 \frac{Vt}{I}$$

$$A = \int_0^3 \tau t ds = \frac{V}{I} \int_0^3 M_s ds = \frac{Vt}{I} \int_0^3 \left[ 5s - \frac{1}{2}(s)^2 \right] ds$$

$$A = \frac{Vt}{I} \left[ \frac{5}{2} (3)^2 - \frac{1}{6} (3)^3 \right] = 18 \frac{Vt}{I}$$

$$C = \int_0^4 \tau t ds = \frac{V}{I} \int_0^4 \left[ 10,5t + 17,5t + ts \left( 2 - \frac{1}{2}s \right) \right] ds$$

$$C = \frac{Vt}{I} \int_0^4 \left[ 28 + 2s - \frac{1}{2}(s)^2 \right] ds = \frac{Vt}{I} \left[ 28(4) + 4^2 - \frac{1}{6} 4^3 \right] = 117,33 \frac{Vt}{I}$$

Tomando-se como ponto de redução das forças resultantes, o ponto de interseção entre a seção e o eixo de simetria, a equivalência estática entre o conjunto de forças e uma única força cortante vertical fica expressa pelas seguintes relações:

$$V = 2A + 2B \operatorname{sen} \alpha + C ; \quad Vc = 4 \cdot B \operatorname{cos} \alpha$$

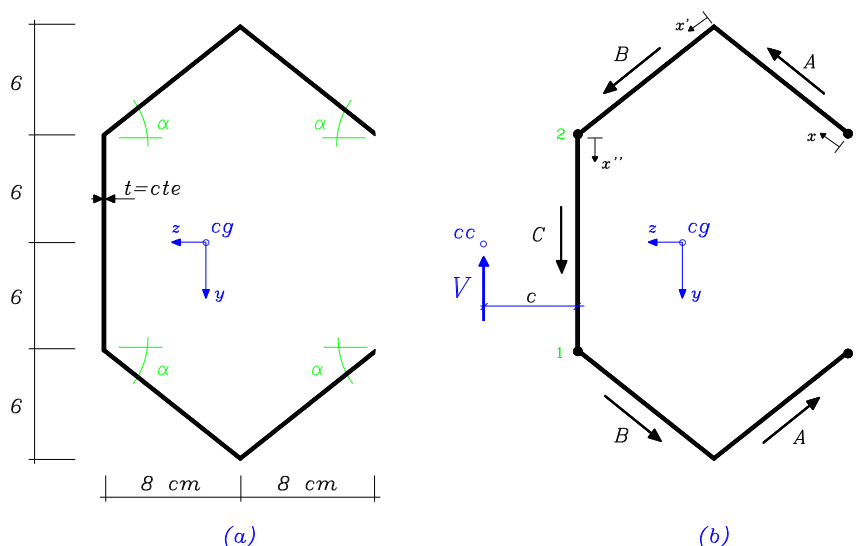
Da primeira delas segue uma verificação para o momento de inércia:

$$2A + 2B \operatorname{sen} \alpha + C = 213,33 \frac{V(0,3)}{I} \rightarrow 64 \frac{V}{I} = V \therefore I = 64 \text{ cm}^4$$

Da segunda relação segue o cálculo da posição do centro de cisalhamento:

$$Vc = B \operatorname{cos} \alpha (4) \rightarrow c = \frac{3,2(15)}{64} = 0,75 \text{ cm}$$

**Exemplo 4:** Determinar a posição do centro de cisalhamento da seção transversal indicada na figura 4.9, sendo dada a espessura, constante e igual a 0.2 cm, e o momento de inércia em relação ao eixo de simetria igual a 700,80 cm<sup>4</sup>.



**Figura 4.9 - a) seção transversal  
b) resultantes do fluxo**

De acordo com as indicações da figura 4.9, as resultantes de tensões em cada um dos trechos determinam-se pelos seguintes desenvolvimentos:

$$A = \frac{V}{I} \int_0^{10} st \cdot (6 + 0,30s) ds = \frac{Vt}{I} \left[ \frac{6}{2} (10)^2 + 0,10 \cdot (10)^3 \right] = 400 \frac{Vt}{I}$$

$$B = \frac{V}{I} \int_0^{10} [90t + ts(12 - 0,30s)] ds = \frac{Vt}{I} \int_0^{10} [90 + 12s - 0,30 \cdot (s)^2] ds$$

$$B = \frac{Vt}{I} [900 + 600 - 100] = 1400 \frac{Vt}{I}$$

$$C = \frac{V}{I} \int_0^{12} [180t + ts(6 - \frac{s}{2})] ds = \frac{Vt}{I} \int_0^{12} \left[ 180 + 6s - \frac{1}{2} (s)^2 \right] ds$$

$$C = \frac{Vt}{I} [180(12) + 3(144) - \frac{12^3}{6}] = 2304 \frac{Vt}{I}$$

As relações de equivalência estática resultam:

$$V = C + 2B \operatorname{sen} \alpha - 2A \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad Vc = 2A(16 + c) \operatorname{sen} \alpha + (A + B) \operatorname{cos} \alpha \cdot 12$$

A primeira relação fornece a verificação para o momento de inércia dado:

$$C + 2B \operatorname{sen} \alpha - 2A \operatorname{sen} \alpha = \frac{V(0,20)}{I} [2304 + 1200] \quad \therefore I = 700,8 \text{ cm}^4$$

Finalmente, a posição do centro de cisalhamento segue de:

$$Vc = 2A \cdot 16 \cdot \operatorname{sen} \alpha + (A + B) \operatorname{cos} \alpha \cdot 12 \quad \rightarrow \quad c = \frac{[2 \cdot 400 \cdot 16 \cdot 0,6 + (400 + 1400) \cdot 0,8 \cdot 12]}{700,8} \cdot 0,2$$

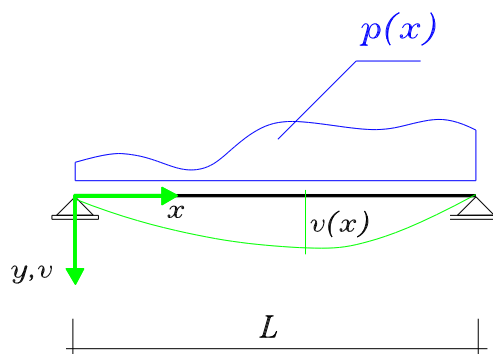
$$c = 7,12 \text{ cm}$$



## 5 LINHA ELÁSTICA

### 5.1 Equação da linha elástica e o cálculo de deslocamentos

A *linha elástica* refere-se à forma exibida pelo eixo de uma barra de material elástico na configuração deslocada, como exemplifica a figura 5.1 para um caso plano de viga em flexão.



**Figura 5.1 - Linha elástica**

O estudo da linha elástica se desenvolve de modo mais direto no caso das vigas em flexão para as quais permanece válida a hipótese cinemática da Navier-Bernoulli, apresentada no capítulo anterior, e de onde decorrem as relações reproduzidas abaixo:

$$d = -yv'e_1 + ve_2$$

$$\varepsilon_x = -yv''$$

$$\sigma_x = -yEv'' = \frac{M}{I_z}y$$

$$v'' = -\frac{M}{EI_z}$$

Naturalmente a forma exibida pela linha elástica depende de condições de vinculação (condições de contorno) e da distribuição dos esforços internos solicitantes.

No caso ilustrado na figura 5.1, e tendo-se em vista a relação momento-curvatura acima reproduzida, valem as seguintes condições de contorno:

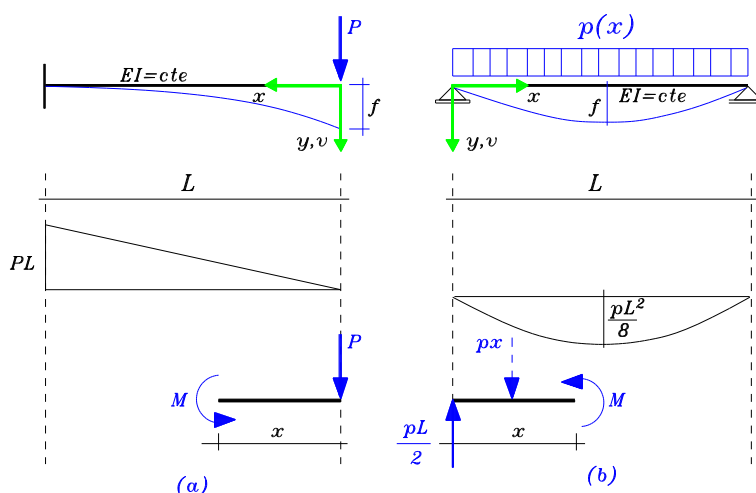
Deslocamento apoio esquerdo:  $v(x=0) = 0$

Deslocamento apoio direito:  $v(x=L) = 0$

As duas condições se referem a restrições sobre os deslocamentos e são ditas *essenciais*, por serem estritamente necessárias à determinação das constantes de integração da equação diferencial da linha elástica.

Segundo a abordagem tratada neste capítulo, portanto, a expressão matemática da elástica resulta da integração da equação diferencial:  $v''(x) = -\frac{M(x)}{EI_z}$ , levando-se em conta as condições de contorno essenciais.

**Exemplo 1:** Determinar as expressões das linhas elásticas das vigas isostáticas ilustradas nas figuras 5.2a e b.



**Figura 5.2 - Casos básicos**

Um primeiro passo visando a integração da equação diferencial em cada caso é a obtenção da função que descreve a distribuição do momento de flexão em relação à posição genérica  $x$  sobre o eixo. Deve-se observar também a convenção de sinais clássica, válida para vigas de eixo horizontal em flexão pura ou

simples. Tal convenção afirma que momentos positivos são aqueles que tracionam as fibras situadas abaixo do eixo da peça.

Nessas condições, a integração se procede do seguinte modo:

**Caso (a) :**

$$M = M(x) = - Px \quad (\text{observe-se a convenção de sinais})$$

$$EIv'' = Px \rightarrow EIv' = Px^2/2 + A_1 \rightarrow EIV = Px^3/6 + A_1x + A_2$$

As condições de contorno essenciais, neste caso, referem-se à nulidade dos deslocamentos generalizados (linear e giro) no engaste fixo (é importante lembrar que em teoria de pequenos deslocamentos, o giro da seção confunde-se com a inclinação da elástica). Impondo-se as condições de contorno resultam:

$$v(L) = 0 \rightarrow PL^3/6 + A_1L + A_2 = 0$$

$$v'(L) = 0 \rightarrow PL^2/2 + A_1 = 0 \rightarrow A_1 = -PL^2/2 \rightarrow A_2 = PL^3/3$$

$$\therefore v(x) = \frac{PL^3}{6EI} \left[ 2 - 3\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (5.1a)$$

O deslocamento máximo ocorre em  $x=0$ , e é dado por:

$$f = v(0) = PL^3/(3EI)$$

Outro valor útil é o giro da seção, também em  $x = 0$ :

$$v'(0) = PL^2/(2EI)$$

**Caso (b) :**

$$M = M(x) = (pl/2)x - px^2/2 \quad (\text{note-se a convenção de sinais})$$

$$EIv'' = px^2/2 - (pl/2)x \rightarrow EIV = px^4/24 - plx^3/12 + A_1x + A_2$$

Neste caso, as condições de contorno levam a:

$$v(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0 \quad \text{e} \quad v(L) = 0 \rightarrow A_1 = pL^3/24$$

$$\therefore v(x) = \frac{PL^4}{24EI} \left[ \frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] \quad (5.1b)$$

O deslocamento máximo (flecha) ocorre, neste caso, em  $x=L/2$ :

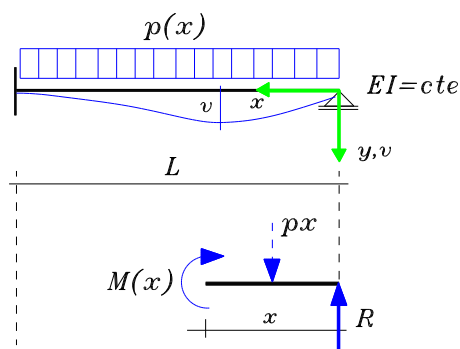
$$f = v(L/2) = 5pL^4/(384EI)$$

Note-se que o giro da seção, nessa mesma posição, é nulo.

.□

Uma das grandes vantagens do estudo da linha elástica é a possibilidade de resolução direta de casos hiperestáticos. As condições de contorno, nesses casos, constituem-se em ferramentas eficientes para a determinação das reações de apoio incógnitas.

Para a viga hiperestática ilustrada na figura 5.3, o momento  $M(x)$  fica expresso em função da reação existente no apoio móvel; tal reação pode ser determinada em decorrência da imposição das condições de contorno.



**Figura 5.3 - Caso hiperestático**

Assim, no caso ilustrado a integração da equação diferencial da linha elástica se desenvolve do seguinte modo:

$$M(x) = Rx - px^2/2 = -EIv'' \rightarrow EIv = px^4/24 - Rx^3/6 + A_1x + A_2$$

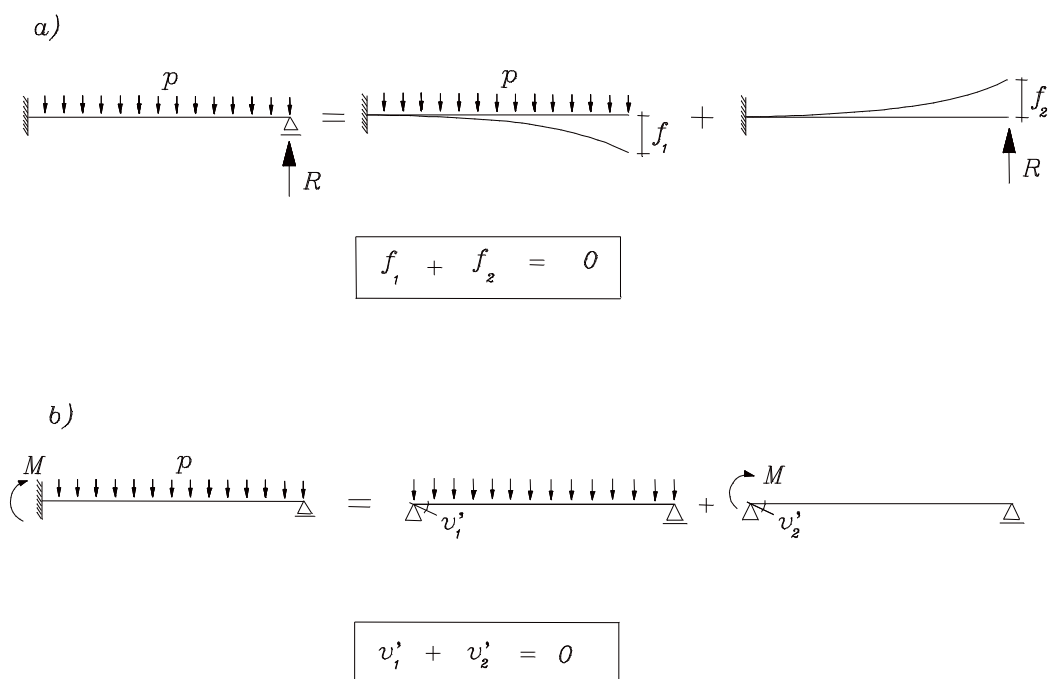
De  $v(0)=0$  segue que:  $A_2=0$ .

De  $v(L)=0$  e  $v'(L)=0$  resultam :  $RL^2(1/2-1/6) = pL^3(1-1/4)/6$   
 $\rightarrow R=3pL/8 \rightarrow A_1=pL^3/48$

$$\therefore v(x) = \frac{PL^4}{48EI} \left[ \frac{x}{L} - 3\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] \quad (5.2)$$

Para se determinar o ponto de deslocamento máximo é necessário impor a condição  $dv(x)/dx = 0$ .

Por outro lado, dentro do espírito do Processo dos Esforços, os casos hiperestáticos, ou mesmo isostáticos de concepção mais complexa, podem ser resolvidos por compatibilização de casos isostáticos mais simples para os quais se conhecem as expressões das elásticas.



**Figura 5.4 - Sobreposição de efeitos**

Assim, o exemplo anterior pode ser tratado pela sobreposição de dois casos de viga em balanço (v. fig. 5.4a): no primeiro a viga é submetida a um carregamento uniformemente distribuído, no segundo a mesma viga é submetida a uma carga concentrada  $R$  posicionada na sua extremidade livre. A resolução se completa com a condição de compatibilidade que consiste na

imposição da nulidade do deslocamento vertical na extremidade livre.

O valor do deslocamento  $f_2$  pode ser determinado aproveitando-se do resultado já deduzido para a viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre, valendo, então:

$$f_2 = -\frac{RL^3}{3EI}.$$

Por sua vez, pela integração da equação diferencial da linha elástica, pode-se mostrar que a solução do caso da viga em balanço com carga uniformemente distribuída é dada por:

$$v(x) = \frac{pL^4}{24EI_z} \left[ 3 - 4\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] \quad (5.3)$$

onde a coordenada  $x$  tem origem na extremidade livre. Portanto, com essa solução, segue que:

$$f_1 = \frac{pL^4}{8EI_z}$$

Impondo-se a compatibilidade sobre os deslocamentos nas extremidades livres resulta:

$$\frac{pL^4}{8EI_z} - \frac{RL^3}{3EI_z} = 0 \quad \therefore \quad R = \frac{3pL}{8}$$

Levando-se em conta o valor de  $R$  conhecido, os deslocamentos do sistema original podem ser obtidos pela superposição dos deslocamentos correspondentes a cada um dos casos básicos.

A técnica de superposição apresenta, quase sempre, mais de uma possibilidade para a definição dos casos básicos. De fato, para o mesmo exemplo anterior, a figura 5.4b ilustra uma segunda possibilidade de decomposição do sistema original. Nessa opção, a incógnita hiperestática escolhida é o momento no engaste e seu valor pode ser determinado pela condição de compatibilidade.

A compatibilidade consiste na imposição de que a soma dos giros correspondentes à extremidade inicialmente engastada seja nula, isto é:

$$v'_1 + v'_2 = 0 \quad (5.4)$$

Aproveitando-se da resposta já deduzida para a viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído, pode-se verificar que:

$$v'_1 = \frac{pL^3}{24EI_z}$$

A solução do problema da viga biapoiada com momento aplicado em uma de suas extremidades (já desenvolvida na parte inicial do capítulo 2) é dada por:

$$v_2(x) = \frac{ML^2}{6EI_z} \left[ 2\frac{x}{L} - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (5.5)$$

de onde se obtém, tomando-se a primeira derivada:

$$v'_2 = \frac{ML}{3EI_z}$$

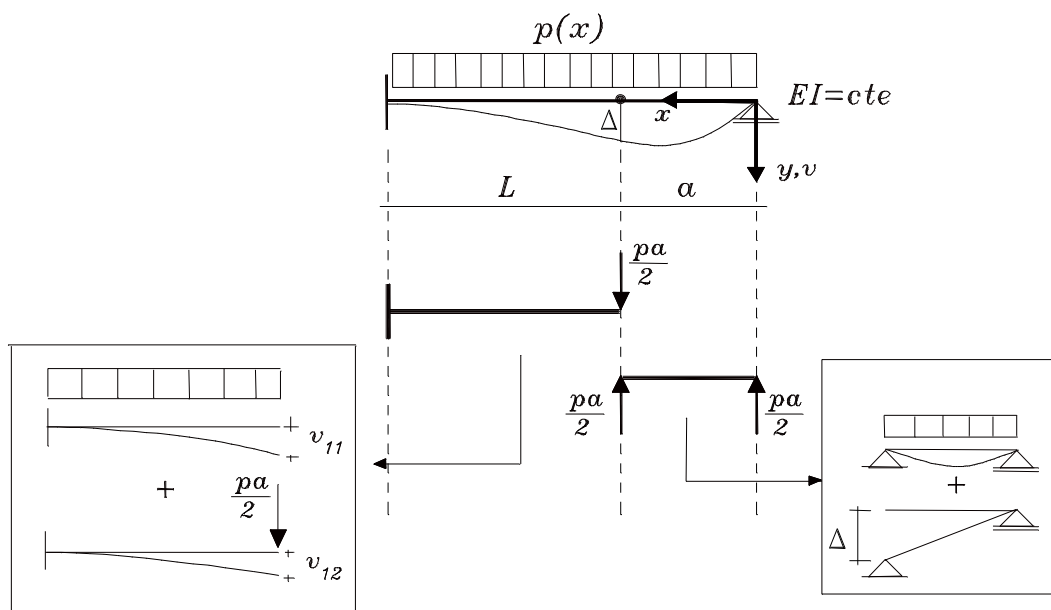
Assim, pela compatibilidade resulta que:

$$\frac{pL^3}{24EI_z} + \frac{ML}{3EI_z} = 0 \quad \therefore \quad M = -\frac{pL^2}{8}$$

De forma análoga à primeira possibilidade de decomposição, com o valor da reação  $M$  determinado, os deslocamentos do sistema original podem ser determinados por superposição dos deslocamentos dos casos básicos.

**Exemplo 2:** Considere-se uma viga isostática, conforme ilustra a figura 5.5, submetida a um carregamento uniformemente distribuído e apresentando uma articulação entre o apoio e o

engaste fixo. Pede-se indicar um procedimento de superposição para a de determinação dos deslocamentos.



**Figura 5.5 - Viga com articulação**

Pode-se imaginar a estrutura separada na articulação, substituindo-se as forças de reação por ela transmitidas em cada uma das partes resultantes. Definem-se, portanto, dois trechos para análise, de comprimentos  $L$  e  $a$ , respectivamente, sendo que é possível aplicar a cada um deles uma superposição independente. Além disso, a vinculação entre as respostas de cada trecho se estabelece impondo-se que na seção correspondente à articulação os deslocamentos verticais sejam os mesmos.

Observa-se que como o sistema original é isostático, a força de reação na articulação é de determinação imediata, por equilíbrio, e vale:  $pa/2$ .

**a) Trecho de comprimento  $L$ :** Claramente a superposição neste trecho corresponde aos efeitos de uma viga em balanço com um carregamento distribuído e da mesma viga submetida a uma força concentrada na extremidade livre; as funções que descrevem os



deslocamentos nas partes em questão são aqui representadas por  $v_{11}$  e  $v_{12}$ .

Adotando-se para o trecho uma origem de coordenadas na extremidade livre obtém-se:

$$v_{11} = (pL^4/24EI) [3 - 4(x/L) + (x/L)^4]$$

$$v_{12} = (paL^3/12EI) [2 - 3(x/L) + (x/L)^3]$$

Assim sendo, o deslocamento na extremidade livre resulta:

$$v_1 = v_{11}(0) + v_{12}(0) = pL^4/8EI + paL^3/6EI$$

**b) Trecho de comprimento a:** Os deslocamentos deste trecho podem ser interpretados como compostos pelos deslocamentos de uma viga simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído aplicado sobre ela e da mesma viga, sem carregamento, submetida a um deslocamento  $\Delta$  no apoio da esquerda.

Os deslocamentos ao longo do trecho devido ao recalque são dados por:  $v_{21} = \Delta x/a$ .

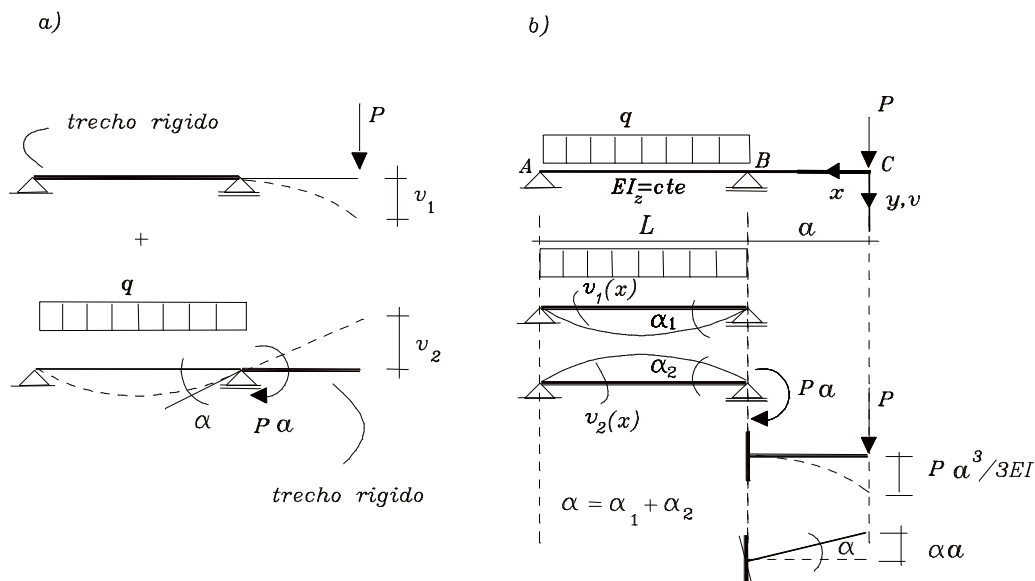
Já os deslocamentos na hipótese de viga simplesmente apoiada são determinados por:  $v_{22} = (pa^4/24EI) [x/a - 2(x/a)^3 + (x/a)^4]$

A sobreposição leva a:  $v_2 = v_{21} + v_{22}$

Finalmente, a condição de compatibilidade impõe igualdade dos deslocamentos verticais na articulação:  $v_1 = \Delta$ .

.□

**Exemplo 3:** Considere-se uma viga isostática biapoiada com um trecho em balanço, sujeita a uma carga concentrada na extremidade do balanço e uma carga uniformemente distribuída entre os apoios, como ilustra a figura 5.6b. Pede-se o giro relativo da viga no apoio móvel **B** e o deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga concentrada.



**Figura 5.6 - Viga isostática com trecho em balanço**

Uma superposição possível, que permite visualizar mais facilmente os deslocamentos generalizados procurados, consiste em definir duas situações. Em cada uma delas, um dos trechos, vão ou balanço, é considerado perfeitamente rígido, conforme ilustra a figura 5.6 a).

Pela análise da figura, nota-se, claramente, que o giro no apoio  $B$  resulta do efeito da carga distribuída no vão e do momento, no mesmo apoio, da carga concentrada na ponta do balanço. Por sua vez, o deslocamento vertical na extremidade livre resulta dos efeitos da flexão do balanço, pela ação da carga concentrada, e do giro no apoio móvel.

**Giro no apoio móvel:** A carga uniformemente distribuída provoca uma parcela de giro  $\alpha_1$  em  $B$  e o momento concentrado no apoio,  $M=P.a$ , uma outra parcela  $\alpha_2$ , conforme ilustra a figura 5.7b.

As parcelas de giro consideradas podem ser calculadas derivando-se uma vez as expressões das elásticas  $v_1(x)$  e  $v_2(x)$  correspondentes a cada um dos efeitos. As expressões das

elásticas em questão já foram deduzidas anteriormente e podem ser escritas nas formas:

$$\begin{aligned}v_1(x) &= (qL^4)/(24EI) [x/L - 2(x/L)^3 + (x/L)^4] \\v_2(x) &= -(PaL^2)/(6EI) [2(x/L) - 3(x/L)^2 + (x/L)^3]\end{aligned}$$

onde adotou-se para a coordenada  $x$  uma origem local sobre o apoio  $B$ . Tomando-se as respectivas derivadas, as parcelas de giro resultam:

$$\begin{aligned}v_1'(x) &= -(qL^3)/(24EI) [1 - 6(x/L)^2 + 4(x/L)^3] \\v_2'(x) &= -(PaL)/(6EI) [2 - 6(x/L) + 3(x/L)^2]\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= v_1'(0) = qL^3/24EI \\ \alpha_2 &= v_2'(0) = -PaL/3EI\end{aligned}$$

Finalmente, o giro acumulado em  $B$  é calculado por:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = qL^3/24EI - PaL/3EI$$

**Deslocamento vertical na extremidade livre:** As parcelas que compõem o deslocamento vertical são:  $Pa^3/3EI$ , devido à carga concentrada na extremidade livre, e  $v_4 = \alpha a$  devido ao giro no apoio  $B$ . Nessas condições, o deslocamento total na ponta do balanço resulta:

$$\begin{aligned}v_c &= Pa^3/3EI - \alpha a \\ v_c &= Pa^3/3EI - (qL^3/24EI - PaL/3EI)a \\ &= (Pa^2/3EI)(a+L) - qaL^3/24EI\end{aligned}$$

Nos casos em que estejam fixados os valores dos comprimentos do vão e do balanço, pode-se pensar em determinar o valor da carga concentrada que anula o deslocamento vertical em  $C$ . Como exemplo, seja  $L = 3a$ ; então a expressão de  $v_c$  passa a ser:

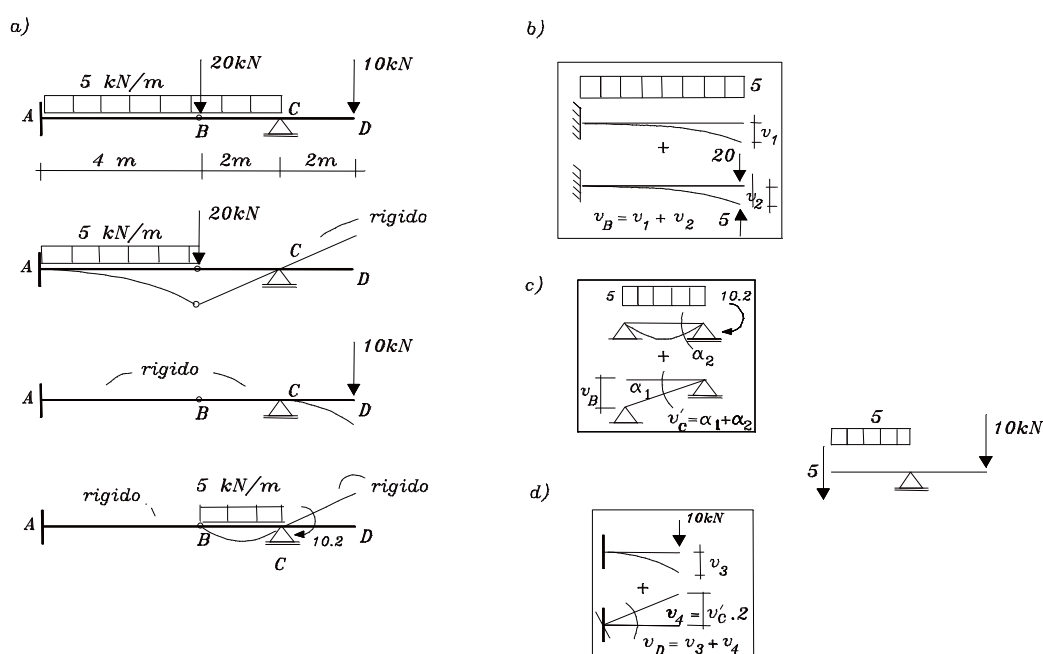
$$v_c = (a^3/3EI)(4P - 27qa/8)$$

Dessa relação, nota-se que o deslocamento vertical se anula para:  $P_0 = 27qa/32$ . Assim, neste caso particular, para uma

carga concentrada  $P > P_0$ , o deslocamento vertical ocorrerá para baixo e quando  $P < P_0$ , para cima.

.□

**Exemplo 4:** Trata-se de uma viga isostática, com uma de suas extremidades engastada, uma articulação posicionada no vão e um trecho em balanço, conforme ilustra a figura 5.8a. Sendo o produto de rigidez  $EI = 4.10^8 \text{ kN.cm}^2$ , pedem-se os deslocamentos verticais nos pontos  $B$  e  $D$  e o giro relativo no apoio  $C$ .



**Figura 5.8 - Viga isostática com articulação e trecho em balanço**

A viga é, na verdade, constituída pelo arranjo de duas partes unidas pela articulação no ponto  $B$ . Separando-se as partes, pode-se determinar que a força cortante transmitida através da articulação vale  $5,0 \text{ kN}$ . Esse valor é importante para que se possa compor corretamente o deslocamento vertical do ponto  $B$ .

Por outro lado, para fins de determinação dos deslocamentos generalizados procurados, pode-se, como no exemplo anterior, idealizar a superposição de casos em que os trechos  $A-B$ ,  $B-C$  e  $C-D$ , cada um por vez, é considerado como

rígido (v.fig.5.8a).

**Deslocamento vertical em B:** O deslocamento vertical neste ponto pode ser determinado observando-se exclusivamente a chapa A-B e resulta da superposição dos deslocamentos devido à carga uniformemente distribuída de  $5,0 \text{ kN/cm}$  e devido à carga concentrada resultante de  $15,0 \text{ kN}$  aplicada na extremidade da chapa, como ilustra a figura 5.8b. Portanto, valem as expressões:

$$v_1 = pL^4/8EI = (0,05 \cdot 400^4)/(8 \cdot 4 \cdot 10^8) = 0,40 \text{ cm}$$

$$v_2 = PL^3/3EI = (15 \cdot 400^3)/(5 \cdot 4 \cdot 10^8) = 0,80 \text{ cm}$$

$$\therefore v_B = v_1 + v_2 = 1,20 \text{ cm}$$

**Giro em C:** O giro em C pode ser calculado, considerando-se somente o trecho B-C. Seu valor resulta da superposição dos giros  $\alpha_1$  devido ao deslocamento vertical  $v_B$  e  $\alpha_2$  que acumula os efeitos da carga distribuída de  $5,0 \text{ kN/m}$  e do momento da carga concentrada de  $10,0 \text{ kN}$  aplicada na ponta do balanço, conforme ilustra a figura 5.8c. Assim sendo, resultam:

$$v_C' = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$v_C' = v_B/a + pa^3/24EI - pa \cdot a/3EI$$

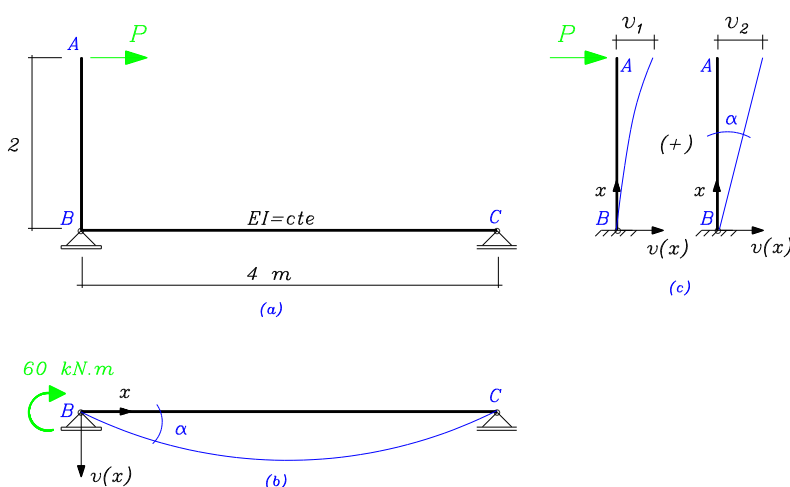
$$= 1,20/200 + (5 \cdot 2 \cdot 200^2)/(24 \cdot 4 \cdot 10^8) = 5,71 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

**Deslocamento vertical em D:** Neste caso considera-se no trecho C-D a superposição dos deslocamentos  $v_3$  devido à flexão do trecho por efeito da carga concentrada de  $10 \text{ kN}$  e  $v_4$  devido ao giro  $v_C'$ , como ilustrado na figura 5.8d. Tais considerações permitem obter:

$$v_D = v_3 - v_4 = (10 \cdot 200^3)/(5 \cdot 4 \cdot 10^8) - 5,71 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = -1,075 \text{ cm}$$

**Exemplo 5:** Para a estrutura ilustrada na figura 5.9a, sendo  $P = 30\text{kN}$ ;  $EI = \text{cte} = 10^8 \text{ kNcm}^2$ , determinar o deslocamento horizontal no ponto A.

Por superposição, o deslocamento procurado resulta da composição da flexão do trecho A-B, por efeito da força  $P$  (imaginando-se B-C como rígido), com a flexão do trecho B-C por efeito do momento da força aplicada em relação ao ponto B (imaginando-se A-B como rígido). As figuras 5.9 b) e c) ilustram essas considerações.



**Figura 5.9 - Composição do deslocamento no ponto A**

Note-se que a flexão do trecho B-C transfere ao trecho A-B, considerado como rígido, um giro igual ao do apoio B. Esse giro leva a um deslocamento horizontal no ponto A, ilustrado na figura 5.9c, que compõe uma das parcelas do deslocamento total daquele ponto.

**a) Determinação do giro  $\alpha$ :** com base na figura 5.9b, a expressão geral da elástica no trecho B-C é:

$$v = v(x) = \frac{M L^2}{6EI_z} \left[ 2 \frac{x}{L} - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

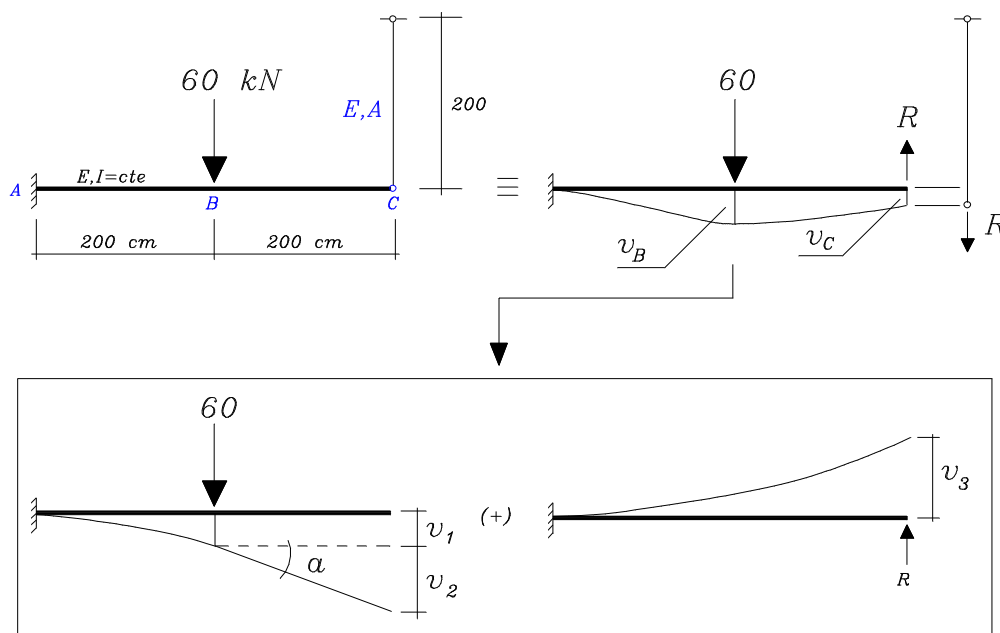
$$\rightarrow v'(x) = \frac{M L}{6EI_z} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x}{L} \right) + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$\alpha = v'(0) = \frac{ML}{3EI} = 8.10^{-3} \text{ rd}$$

**b)** Determinação do deslocamento horizontal em A: com base nos efeitos ilustrados na figura 5.9c, resulta que:

$$v_A = v_1 + v_2 = \frac{30(200)^3}{3.10^8} + 8.10^{-3}(200) = 2,4 \text{ cm}$$

**Exemplo 6:** Para a estrutura ilustrada na figura 5.10, formada por uma viga engastada numa das extremidades e vinculada na outra por uma barra deformável, determinar os deslocamentos verticais nos pontos B e C. Dados complementares:  $A = 3 \text{ cm}^2$ ,  $I = 8.10^4 \text{ cm}^4$  e  $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 5.10 - Viga vinculada por barra deformável**

Os deslocamentos procurados podem ser determinados analisando-se exclusivamente a deformação da viga uma vez conhecido todo o conjunto de forças nela atuante, o que inclui a reação da barra vertical. Essa reação pode ser encontrada, de acordo com o processo dos esforços, por compatibilidade de deslocamentos no ponto C.

**a)** *Determinação da reação R:* Por compatibilidade, é possível observar que o deslocamento vertical em C é igual tanto para a viga quanto para a barra. Deste modo, com base no esquema ilustrado no quadro em destaque da figura 5.10, resultam:

$$v_1 + v_2 + v_3 = \Delta L \quad \frac{R(200)}{EA} = \frac{60(200)^3}{3EI_z} + \frac{60(200)^2}{2EI_z} 200 - \frac{R(400)^3}{3EI_z} \therefore R = 15 \text{ kN}$$

**b)** *Determinação dos deslocamentos em C e B:* devido à compatibilidade, em C o cálculo pode ser feito considerando-se diretamente a deformação da barra e escreve-se na forma:

$$v_c = \frac{R(200)}{EA} = \frac{15 \cdot 200}{2000 \cdot 3} = 0,50 \text{ cm}$$

No ponto B, deve-se levar em conta a contribuição  $v_1$ , oriunda da carga concentrada de 60 kN, e a contribuição  $v_{B,R}$  da reação R, agora conhecida. Assim sendo:

$$v_B = \frac{60(200)^3}{3EI_z} - \frac{15(400)^3}{6EI_z} \left( 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \right) = 1 - 0,675 = 0,375 \text{ cm}$$

## 5.2 Equação diferencial da linha elástica em função do carregamento aplicado

A equação diferencial pode ser expressa em função do carregamento aplicado empregando-se as relações diferenciais de equilíbrio  $dM/dx = V$  e  $dV/dx = -p(x)$ :

$$\begin{aligned} dV/dx &= d^2M/dx^2 = -p(x) \\ v^{1V}(x) &= -(1/EI) (d^2M/dx^2) = p(x)/EI \\ EIv^{1V} &= p(x) \end{aligned}$$

Na hipótese de continuidade da função  $p(x)$  a integração da equação diferencial de quarta ordem fornece:

$$EIv = px^4/24 + A_1x^3/6 + A_2x^2/2 + A_3x + A_4$$



$$\therefore v(x) = \frac{I}{EI_z} \left( \frac{px^4}{24} + \frac{A_1 x^3}{6} + \frac{A_2 x^2}{2} + A_3 x + A_4 \right) \quad (5.6)$$

A (5.6) é uma expressão geral da qual resultam as elásticas descritas pelas (5.1a), (5.1b) e (5.2), desde que sejam impostas as respectivas condições de contorno essenciais e *naturais*.

Condições de contorno *naturais* tem correspondência direta com os esforços solicitantes, porém são expressas em função de derivadas de ordem superior (Segunda e terceira) nos deslocamentos.

Por exemplo, numa viga biapoiada submetida a carregamento distribuído, como a indicada na figura 5.2b, os momentos nas duas extremidades são nulos. Levando-se em conta a própria relação momento-curvatura, essas condições podem ser expressas nas formas:

$$\text{Momento apoio esquerdo: } v''(x=0) = 0$$

$$\text{Momento apoio direito: } v''(x=L) = 0$$

Já numa viga em balanço com força concentrada em sua extremidade livre, como a indicada na figura 5.2a, na ponta do balanço o momento é nulo e a força cortante deve igualar a força aplicada. Nesse caso, considerando-se a primeira derivada da relação momento-curvatura:  $v'''(x) = -\frac{I}{EI_z} \frac{dM(x)}{dx}$  e que  $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$ , as condições associadas aos esforços podem ser escritas por:

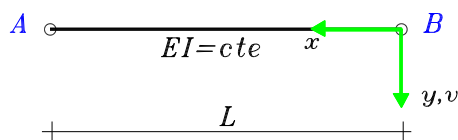
$$\text{Momento nulo na extremidade livre: } v''(L) = 0$$

$$\text{Cortante nulo na extremidade livre: } v'''(L) = -P$$

### 5.3 Análise inversa: caracterização do sistema a partir da linha elástica

Os problemas básicos até aqui analisados, partem de uma estrutura com condições de contorno e carregamentos conhecidos, obtendo-se a expressão da elástica. Deve-se ressaltar, no entanto, que um procedimento inverso pode ser aplicado quando se conhece a equação da linha elástica e se deseja determinar o sistema estrutural correspondente.

Por exemplo, seja dada a expressão 5.2 correspondente a uma viga de produto de rigidez  $EI_z$  constante e comprimento  $L$ , conforme ilustra a figura 5.11. Para se determinar as condições de vinculação e carregamento, desenvolve-se a seguinte verificação:



**Figura 5.11 - Esquema para análise inversa**

**a)** Com relação às condições de contorno essenciais e naturais:

Se  $v(0)=0$  e  $v'(0) \neq 0 \rightarrow B$  só pode ser apoio

Se  $v(L)=0$  e  $v'(L)=0 \rightarrow A$  só pode ser engaste

**Da relação momento-curvatura:**

$$M = EIv'' = (pL^2/48) [18(x/L) - 24(x/L)^2]$$

como  $M(x=0)=0$  o vínculo é do tipo apoio simples.

A confirmação sobre o tipo de vínculo pode ser feita analisando-se a existência ou não de força cortante no ponto; para tanto se faz uso das relações diferenciais de equilíbrio:

$$V = dM/dx = (pL/48) [18 - 48(x/L)]$$

Como  $V(x=0) \neq 0$  o vínculo em B é de fato um apoio simples.

**b)** Também as relações diferenciais permitem concluir sobre a distribuição do carregamento distribuído:

$$-p(x) = dV/dx = p(-48/48) = -p$$

A distribuição do carregamento é constante.

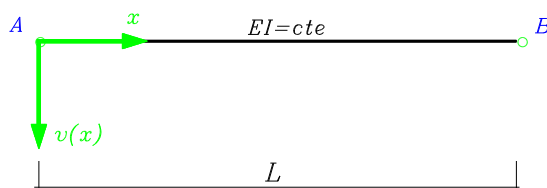
Os itens a) e b) permitem caracterizar as condições de vinculação e de carregamento ilustradas na figura 5.5.

**Exemplo 7:** Para uma dada viga admitida isostática de comprimento  $L$  e com um sistema de referência posicionado na extremidade A, como ilustra a figura 5.12, é conhecida a expressão da linha elástica escrita na forma:

$$v = v(x) = \frac{pL^4}{360EI_z} \left[ 142 \frac{x}{L} - 180 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 20 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 15 \left( \frac{x}{L} \right)^4 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^5 \right]$$

Pede-se determinar, por análise inversa, as condições de vinculação nas extremidades e o tipo de carregamento aplicado.

**a)** As condições de vinculação decorrem de uma análise dos deslocamentos nas extremidades, impondo-se na expressão da elástica  $x = 0$  e  $x = L$ , obtendo-se:



**Figura 5.12 - Sistema de referência**

$$v = v(0) = \frac{pL^4}{360EI_z} \left[ 142 \frac{0}{L} - 180 \left( \frac{0}{L} \right)^2 + 20 \left( \frac{0}{L} \right)^3 + 15 \left( \frac{0}{L} \right)^4 + 3 \left( \frac{0}{L} \right)^5 \right] = 0$$

$$v = v(L) = \frac{pL^4}{360EI_z} [142 - 180 + 20 + 15 + 3] = \frac{pL^4}{360EI_z} [0] = 0$$

como  $v(0)=0$  e  $v(L)=0$  existem vínculos em A e B.

A natureza dos vínculos, se apoios simples ou engaste, determinam-se analisando os giros em A e B. Assim, derivando uma vez a expressão da elástica e impondo-se  $x = 0$  e  $x = L$  obtêm-se:

$$v'(x) = \frac{pL^3}{360EI_z} \left[ 142 - 360 \frac{x}{L} + 60 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 60 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 15 \left( \frac{x}{L} \right)^4 \right]$$

$$v'(0) = \frac{pL^3}{360EI_z} \left[ 142 - 360 \frac{0}{L} + 60 \left( \frac{0}{L} \right)^2 + 60 \left( \frac{0}{L} \right)^3 + 15 \left( \frac{0}{L} \right)^4 \right] = \frac{142 pL^3}{360EI_z}$$

$$v'(L) = \frac{pL^3}{360EI_z} [142 - 360 + 60 + 60 + 15] = -\frac{81 pL^3}{360EI_z}$$

portanto, como os giros são nulos, é possível admitir a existência de apoio fixo em A e apoio móvel em B, uma vez que a viga é isostática.

**b)** Quanto ao carregamento aplicado, como a expressão da elástica é única no intervalo  $0 \leq x \leq L$ , não há forças concentradas entre as extremidades; o que não exclui a possibilidade de momentos concentrados nos apoios. Assim, num primeiro passo, analisa-se a possibilidade de existência de momentos aplicados nos apoios, fazendo-se uso da relação  $M = -EI_z v''$ .

Derivando-se duas vezes a expressão da elástica resulta:

$$v''(x) = \frac{pL^2}{360EI_z} \left[ -360 + 120 \frac{x}{L} + 180 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 60 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

e, portanto,

$$M(x) = \frac{pL^2}{360} \left[ 360 - 120 \frac{x}{L} - 180 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 60 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \text{ Fazendo-se } x = 0 \text{ e } x = L,$$

seguem, respectivamente:

$$M(0) = \frac{pL^2}{360} \left[ 360 - 120 \frac{0}{L} - 180 \left( \frac{0}{L} \right)^2 - 60 \left( \frac{0}{L} \right)^3 \right] = pL^2$$

$$M(L) = \frac{pL^2}{360} [360 - 120 - 180 - 60] = \frac{pL^2}{360} [0] = 0$$

portanto, no apoio A existe um momento aplicado  $M_A = pL^2$ .

Quanto à natureza do carregamento distribuído, utilizam-se as relações de equilíbrio:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{pL}{360} \left[ -120 - 360 \left( \frac{x}{L} \right) - 180 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

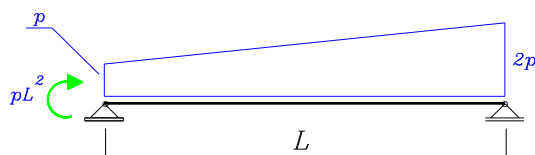
$$q = -\frac{dV}{dx} = -\frac{p}{360} \left[ -360 - 360 \left( \frac{x}{L} \right) \right] = p \left[ 1 + \frac{x}{L} \right]$$

Conclui-se que o carregamento é linear com  $x$  e seus valores nas extremidades A e B valem:

$$q(0) = p \left[ 1 + \frac{0}{L} \right] = p$$

$$q(L) = p \left[ 1 + \frac{L}{L} \right] = 2p$$

Reunindo-se as informações obtidas, as condições de vinculação e carregamento para a viga em estudo são:



**Figura 5.13 - Problema que deu origem à solução**

## 6 NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA: INSTABILIDADE DO EQUILÍBRIO E A FLAMBAGEM DE EULER

### 6.1 Não-linearidade geométrica: considerações gerais

A análise estrutural linear clássica pressupõe uma proporcionalidade entre carga e deslocamento (ou solicitação e resposta estrutural). Tal tipo de comportamento se apresenta desde que sejam satisfeitas duas condições:

- i) O material tenha resposta elástica linear;
- ii) Os deslocamentos sejam pequenos.

A primeira condição pode ser garantida limitando-se os níveis de tensão e de deformação. A segunda se verifica num número grande de aplicações práticas, porém não é garantia para uma resposta estrutural global linear.

Na análise estrutural usual é comum admitir-se 'a priori' que os deslocamentos são pequenos, e isto tem servido como justificativa para realizar a verificação da condição de equilíbrio tomando-se a estrutura na posição inicial ou indeslocada. Como consequência desse procedimento, juntamente com a primeira condição, a resposta global resulta linear.

Mas a resposta assim obtida pode ser exageradamente simplificada. De fato, em muitos problemas, mesmo que o campo de deslocamentos do sistema possa ser considerado pequeno, é necessário escrever as equações de equilíbrio na posição deslocada, sob pena de serem desprezadas parcelas importantes ao se referir à posição indeslocada.

Assim, é importante observar que verificar o equilíbrio na posição inicial constitui sempre uma aproximação e tal consideração deve ser avaliada com cuidado em cada problema, pois, a rigor, *o equilíbrio sempre se estabelece na configuração deslocada.*

As análises resultantes de uma abordagem na qual o equilíbrio estático é descrito tomando-se a estrutura na posição

deslocada, mas mantendo-se o material num regime de resposta linear elástica, são aqui denominadas *análises geometricamente não-lineares*.

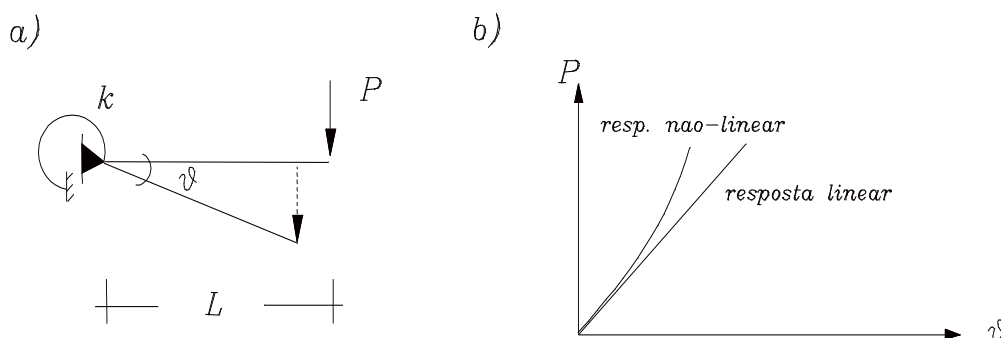
É importante lembrar, desde já, que a superposição de efeitos, utilizada quando a resposta estrutural é linear, perde validade em campo não-linear.

Por ser mais geral, a análise geometricamente não-linear ressalta alguns aspectos do comportamento estrutural que não se fazem notar na abordagem linear. Alguns desses aspectos podem ser evidenciados a partir do estudo de casos simples idealizados teoricamente.

Num primeiro caso, considere-se a estrutura da figura 6.1a: uma barra rígida, articulada numa das extremidades e submetida a uma carga concentrada, transversal ao eixo, na extremidade livre. Na articulação existe uma mola, de rigidez elástica linear, que aplica um momento  $M$  de reação ao momento aplicado pelo carregamento e proporcional ao giro  $\theta$  sofrido pela barra:

$$M = k\theta \quad (6.1)$$

onde  $k$  representa a constante de rigidez da mola.



**Figura 6.1 - Respostas linear e não-linear da barra rígida com carregamento transversal**

Segundo uma análise linear, justificável na hipótese de pequenos deslocamentos, o equilíbrio é expresso tomando-se como referência a configuração inicial, e exprime-se na forma:

$$PL = M \quad \text{ou} \quad P = \frac{k\theta}{L} \quad (6.2)$$

Obtém-se, assim, uma relação linear entre carga e giro (o qual pode ser entendido como um 'deslocamento generalizado').

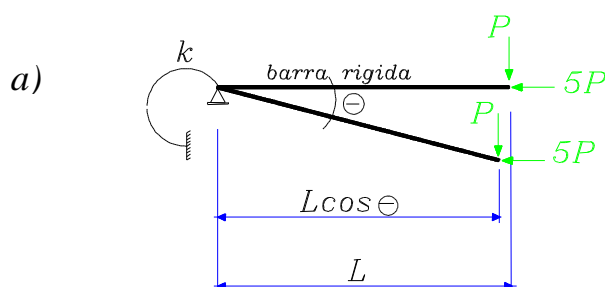
Escrevendo-se, no entanto, o equilíbrio na posição deslocada, o que caracteriza uma análise geometricamente não-linear, resulta:

$$PL \cos \theta = k\theta \quad \text{ou} \quad P = \frac{k}{L} \frac{\theta}{\cos \theta} \quad (6.3)$$

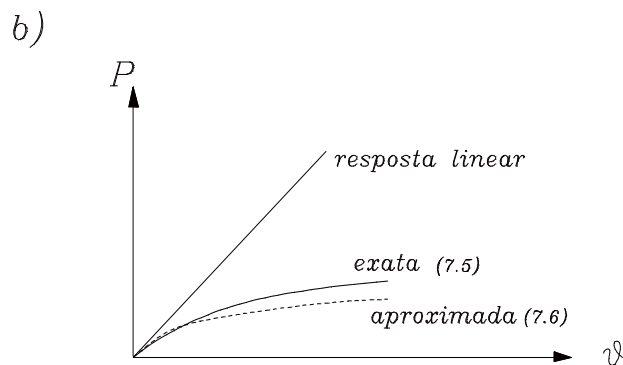
Essa nova expressão estabelece uma relação não-proporcional entre a carga  $P$  e o giro  $\theta$ . A figura 6.1b ilustra as respostas obtidas com as expressões (6.2) e (6.3).

Tendo-se em vista a (6.3), observa-se que para  $\theta$  pequeno ( $\theta < 0,3 \text{ rd}$ ) pode-se adotar a aproximação  $\cos \theta \approx 1$ , recuperando-se a (6.2). Dentro desse limite, as duas relações, (6.2) e (6.3), coincidem, o que permite concluir que nesse caso de carregamento transversal ao eixo não se cometem erros significativos ao escrever o equilíbrio na situação indeslocada, e a segunda condição geral da análise estrutural linear aplica-se com seu sentido puramente geométrico.

Numa segunda situação, acrescenta-se ao sistema anterior uma carga axial, conforme ilustra a figura 6.2:







**Figura 6.2 - Respostas linear e não-linear da barra rígida com carregamentos transversal e axial**

O equilíbrio na posição inicial, segundo uma análise linear, conduz à mesma relação do caso anterior:

$$P = \frac{k\theta}{L} \quad (6.4)$$

Já a descrição do equilíbrio na posição deslocada, resulta:

$$PL \cos \theta + 5PL \sin \theta = k\theta \quad \text{ou}$$

$$P = \frac{k\theta}{L(\cos \theta + 5\sin \theta)} \quad (6.5)$$

Considerando-se que o giro seja pequeno valem as aproximações:  $\cos \theta \approx 1$  e  $\sin \theta \approx \theta$ . Nessas condições, a (6.5) assume a forma:

$$P = \frac{k\theta}{L(1+5\theta)} \quad (6.6)$$

Ainda que a resposta estrutural apresente pequenos ângulos de giro, observa-se neste caso que a solução aproximada (6.6) já conduz a resultados bastante diferentes daqueles da resposta linear (6.4); conforme ilustra a figura 6.2 b.

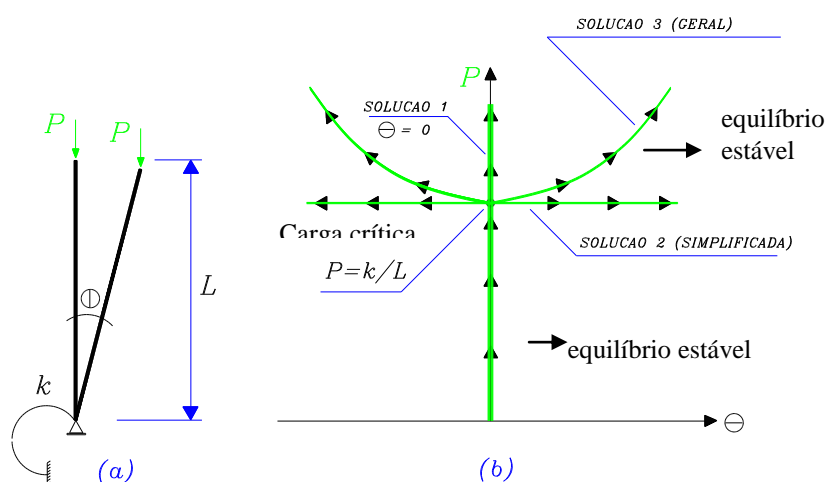
A razão disto está no fato de que o momento da força axial tem influência significativa sobre o regime estático de equilíbrio da estrutura, já com pequenos deslocamentos ou giros.

Assim, em presença de força axial, ainda que os deslocamentos possam ser considerados pequenos, somente é possível representar convenientemente o comportamento da estrutura por meio de uma análise não-linear.

## 6.2 Os conceitos de ponto limite e de ponto de bifurcação do equilíbrio

Outra característica importante do comportamento estrutural, revelada pela análise não-linear geométrica, é ilustrada pelo caso da barra rígida submetida, na posição inicial, somente a uma carga concentrada, de direção axial e perfeitamente centrada.

Seja, então, a mesma estrutura das figuras 6.1 e 6.2, representada agora na posição vertical, e o equilíbrio escrito na posição deslocada. Com base nos dados apresentados na figura 6.3a, conclui-se que:



**Figura 6.3 - Solução bifurcada em  $P = k/L$**

$$M = k\theta = PL \operatorname{sen}\theta \rightarrow P = \frac{k\theta}{L \operatorname{sen}\theta} \quad (6.7 a)$$

Nota-se que na (6.7a), reescrita na forma  $k\theta = PL \operatorname{sen}\theta$ , sendo  $\theta = 0$  (medindo-se  $\theta$  em radianos), verifica-se a igualdade para qualquer valor de  $P$ . Por outro lado, como  $\theta \geq \operatorname{sen}\theta$  para  $k \geq PL$ , ou  $P \leq k/L$ , aquela igualdade somente pode ser

satisfeita com  $\theta=0$ . Valendo essa condição sobre  $k$ , a configuração indeslocada é dita estável.

Já para  $k < PL$  ou  $P > k/L$ , é possível encontrar solução correspondente a  $\theta \neq 0$  satisfazendo a igualdade. É claro que a possibilidade de  $\theta=0$  com  $P > k/L$  continua existindo, porém ela passa a ser de equilíbrio instável porque qualquer perturbação no sistema faz com que a barra assuma uma configuração deslocada.

Assim sendo, quando  $P = k/L$ , configura-se a chamada bifurcação do equilíbrio, ou seja, a partir deste limite passam a existir duas soluções: uma com  $\theta=0$  (instável) e outra com  $\theta \neq 0$  (estável).

Desse modo diz-se que  $P = k/L$  é uma *carga crítica*, pois a ela corresponde uma mudança da condição de equilíbrio.

Observa-se que para determinar a carga crítica é suficiente considerar que os deslocamentos são pequenos. Tal simplificação impede, porém, que se possa determinar a posição deslocada.

De fato, considerando-se uma situação de giro muito pequeno ( $\sin\theta \approx \theta$ ) a (6.7a) pode ser rescrita na forma:

$$\left(P - \frac{k}{L}\right)\theta = 0 \quad (6.7 b)$$

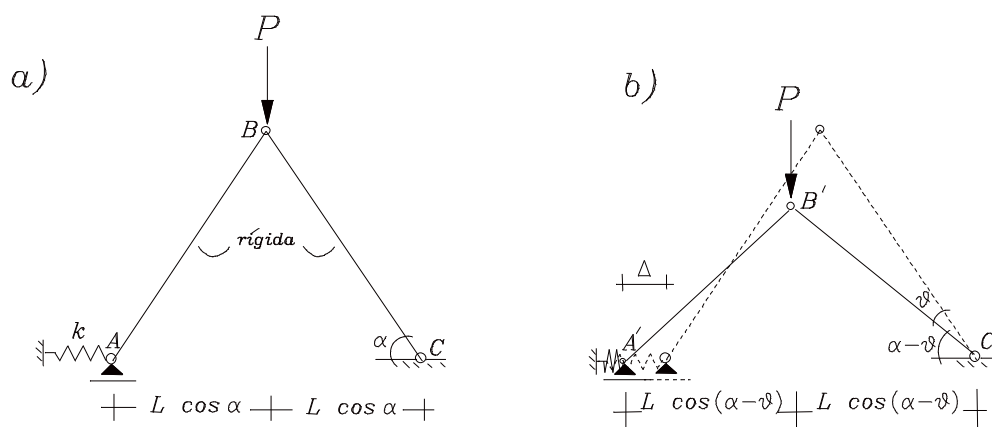
A igualdade anterior pode ser verificada particularmente em duas situações:

- a)  $\theta=0$ , para qualquer valor de  $P$ , o que indica uma solução indeslocada;
- b)  $P = k/L$ , para qualquer valor de  $\theta$ , o que indica que para este valor de carga a peça pode assumir uma configuração inclinada qualquer em equilíbrio.

As soluções obtidas na análise anterior estão ilustradas graficamente na figura 6.3b, destacando-se as diferentes trajetórias de equilíbrio estável e instável.

Nota-se que a bifurcação do equilíbrio é uma situação característica de um sistema perfeito, com carregamento centrado e alinhado com o eixo na situação inicial.

Numa outra situação básica, o carregamento apresenta uma componente alinhada com o eixo do elemento estrutural, conforme exemplifica o caso da treliça plana ilustrada na figura 6.4.



**Figura 6.4 - Carregamento com componente axial**

O equilíbrio, na posição deslocada, dos nós  $B'$  e  $A'$  (fig.6.4b) leva a:

$$\begin{aligned} 2N \operatorname{sen}(\alpha - \theta) &= P \\ N \cos(\alpha - \theta) &= k \Delta \end{aligned} \quad (6.8 \text{ a,b})$$

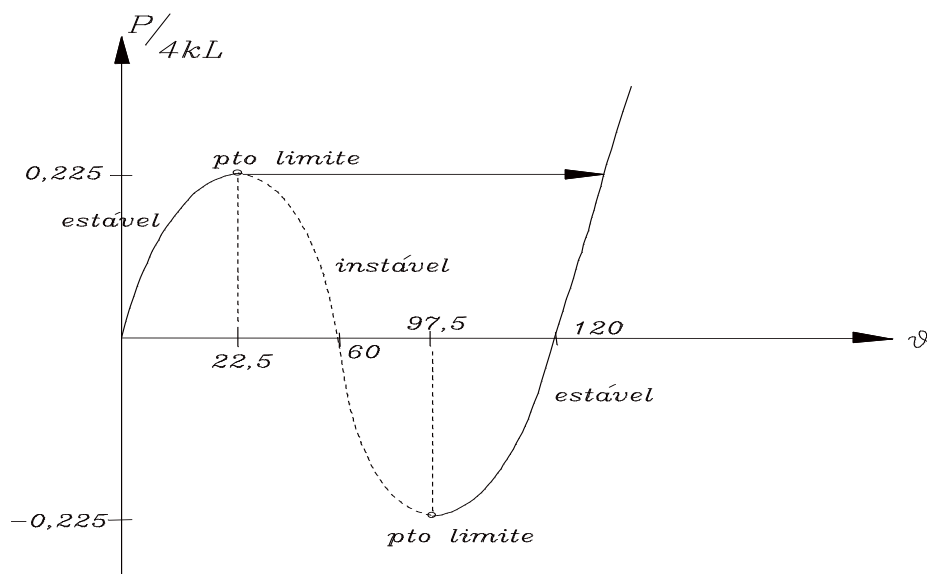
Combinando-se as relações anteriores e levando-se em conta que  $\Delta = 2L[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha]$ , resulta:

$$\frac{P}{4kL} = \operatorname{tg}(\alpha - \theta)[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha] \quad (6.9)$$

Tomando-se, por exemplo,  $\alpha = 60^\circ$ , a relação anterior pode ser representada em gráfico, conforme ilustra a figura 6.5.

Há um regime de resposta inicial estável, pois as forças internas nas barras são capazes de equilibrar acréscimos de carga aplicada. Esse processo permanece até certo limite, a

partir do qual aquela tendência se inverte, passando, então, o sistema, a apresentar uma resposta instável.



**Figura 6.5 - Pontos limite na trajetória de equilíbrio**

Na resposta estrutural obtida não se observam pontos de bifurcação, mas sim *pontos limite*, os quais separam as partes estável e instável da trajetória de equilíbrio.

Os pontos limite indicados na figura 6.5 podem ser determinados anulando-se a primeira derivada com relação a  $\theta$  da relação (6.9), o que leva a:

$$\cos^3(\alpha - \theta) = \cos \alpha$$

$$\therefore p/\alpha = 60^\circ \rightarrow \theta_1 = 22,5^\circ \text{ e } \theta_2 = 97,5^\circ$$

Em  $\theta = 22,5^\circ$ , por exemplo, a trajetória inicial de equilíbrio deixa de ser estável, pois, mantendo-se o nível de carregamento, uma pequena perturbação  $\Delta\theta > 0$  na configuração da estrutura faz com que ela procure outra configuração estável fora das vizinhanças da primeira, conforme indica a figura 6.5.

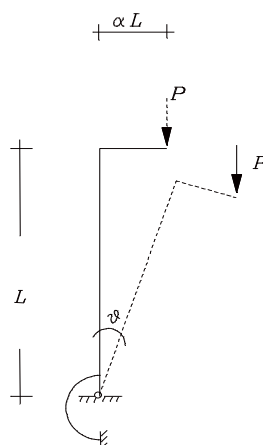
A parte instável da trajetória de equilíbrio, que se configura entre os pontos limite, somente pode ser percorrida se

houver controle sobre o deslocamento do ponto de aplicação da carga.

### 6.3 Efeitos de imperfeições

Os casos básicos até aqui apresentados desconsideram a existência de qualquer imperfeição no sistema. No entanto, imperfeições iniciais de ordem física ou geométrica podem alterar significativamente a resposta estrutural.

Considere-se, numa primeira situação, a barra rígida vinculada por uma mola elástica e submetida a uma força de direção axial. A imperfeição é constituída por uma excentricidade no ponto de aplicação da carga; seja, ainda, esta excentricidade expressa na forma  $e = \alpha L$ .



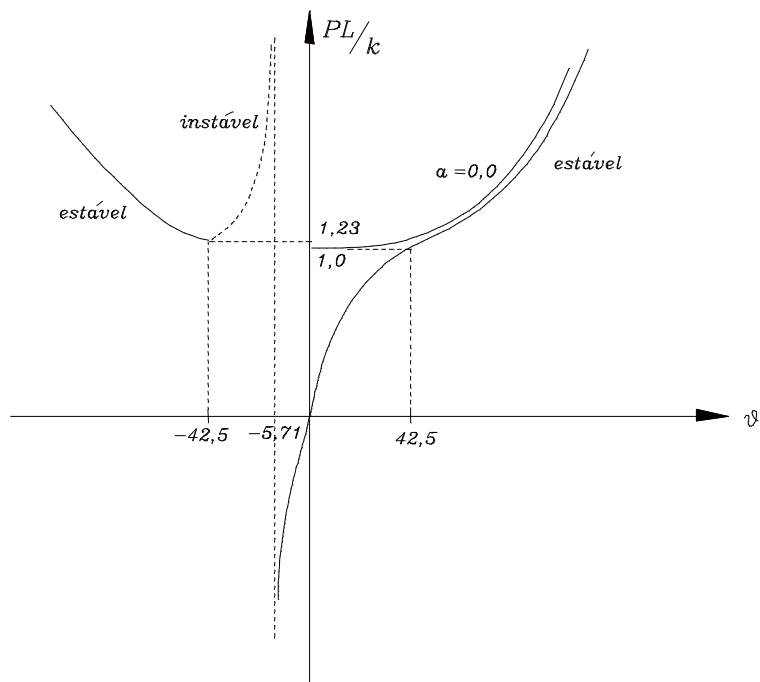
**Figura 6.6 - Excentricidade do carregamento aplicado**

O equilíbrio na posição deslocada, indicada na figura 6.6, fica expresso na forma:

$$P(L \sin \theta + \alpha L \cos \theta) = k \theta$$

$$\frac{Pl}{k} = \frac{\theta}{\sin \theta + \alpha \cos \theta} \quad (6.10 \text{ a,b})$$

Para  $\alpha = 0,1$  a função (6.10b) apresenta o gráfico ilustrado na figura 6.7.



**Figura 6.7 - Resposta do sistema com imperfeição de posição na aplicação da carga**

Observa-se que para  $\theta > 0$  e  $\alpha > 0$  não há mais a caracterização de bifurcação, havendo uma única trajetória estável de equilíbrio. De outro modo, esta resposta pode ser interpretada observando-se o comportamento da mola: nessas condições ela sempre oferece um momento crescente de oposição ao momento aplicado pelo carregamento.

Para  $\theta = 0^\circ$  a mola não está distendida e o sistema não suporta qualquer carregamento. No intervalo:  $-5,71^\circ < \theta < 0^\circ$  o sinal do denominador da expressão 6.5b resulta positivo e o equilíbrio somente pode ser mantido com carga  $P$  negativa.

Nota-se que o valor  $\theta = -5,71^\circ$  anula o denominador da 6.10b e coincide com o arco cuja tangente é  $0,1$  (valor de  $\alpha$ ). Nessa posição a carga aplicada resulta geometricamente alinhada com a articulação e, teoricamente, pode atingir valores, em módulo, muito altos; entretanto, tal posição é de equilíbrio instável. Para valores mais negativos de  $\theta$  a estabilidade do equilíbrio

somente é restabelecida a partir de  $\theta \leq -42,5^\circ$  quando aumentos de  $\theta$  passam a exigir aumentos de carga.

Outro tipo de imperfeição que o sistema pode apresentar, decorre de uma eventual não-linearidade de resposta do material associada a processos internos de plastificação ou de fissuração, por exemplo.

Esse tipo de situação pode ser simulado com o sistema idealizado de barra rígida com mola, admitindo-se que a rigidez da mola seja expressa não por uma constante, mas por uma função do próprio giro da barra.

Por exemplo, admita-se que a rigidez seja determinada, em cada instante da análise, pela seguinte relação:

$$k^* = k + k_1 \theta^2 \quad c / k_1 < 0 \quad (6.11)$$

Claramente a rigidez  $k^*$  diminui com  $\theta$ , e esta situação é típica dos materiais que sofrem um processo interno de microfissuração evolutiva.

Aplicando-se essa propriedade à mola do sistema ilustrado na figura 6.3, a relação de equilíbrio que governa aquele problema passa a ser dada por:

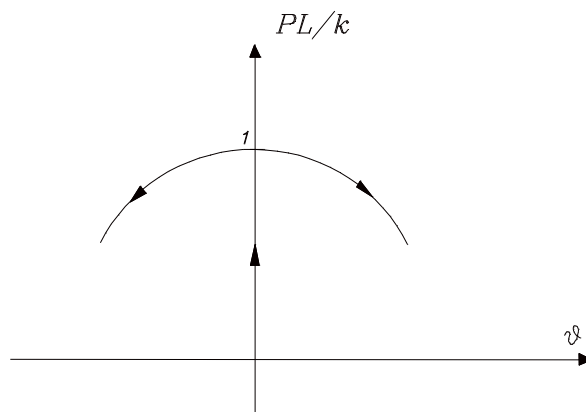
$$PL \operatorname{sen} \theta = k \theta + k_1 \theta^3 \quad (6.12)$$

Para avaliar a resposta do sistema, é suficiente tomar-se apenas uma vizinhança de  $\theta = 0^\circ$ . Nesse caso, a relação pode ser reescrita na forma:

$$\frac{PL}{k} = 1 + \frac{k_1}{k} \theta^2 \quad (6.13)$$

A resposta obtida está ilustrada na figura 6.8, observando-se que à carga crítica, segue-se uma bifurcação para regimes de equilíbrio instável.

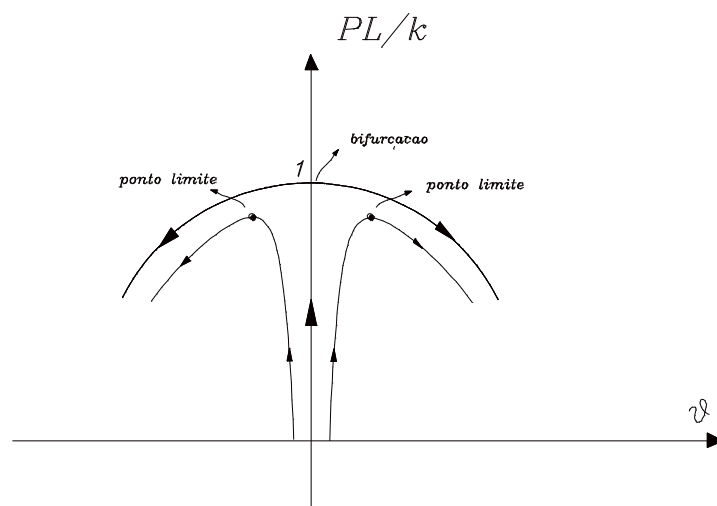




**Figura 6.8 – Resposta simétrica instável provocada por imperfeição do material**

Obviamente, os sistemas podem apresentar ambas as imperfeições, de natureza geométrica e de material; nesses casos, pode-se mostrar que as respostas obtidas caracterizam-se por não apresentar pontos de bifurcação, mas somente pontos limite. Além disso, esses pontos limite podem ocorrer para níveis de carregamento menores do que o da carga crítica de bifurcação do problema em que a imperfeição é exclusivamente devida ao material.

A figura 6.9 ilustra uma resposta genérica típica de uma situação em que se combinam as duas imperfeições aqui abordadas.



**Figura 6.9 – Resposta do sistema com imperfeições de posicionamento da carga e de material**

Limitando-se o estudo à possibilidade de existência de imperfeições associadas ao posicionamento do carregamento, isto é, admitindo-se que o material sempre se comporta em regime elástico linear, duas situações passam a ser abordadas, no que segue, no âmbito da análise não-linear geométrica.

A primeira, bastante particular, refere-se à determinação da carga crítica de bifurcação do equilíbrio em sistemas perfeitos submetidos exclusivamente a compressão axial.

A segunda, diz respeito à combinação da flexão por carregamento transversal com o efeito de compressão por força axial.

#### 6.4 A flambagem de Euler

Neste item apresenta-se a determinação da carga crítica para quatro casos estruturais básicos, nos quais a barra deformável é constituída por um material de resposta elástica linear e a carga de compressão aplicada é perfeitamente centrada.

Nos sistemas que seguem a rigidez à flexão da barra realiza papel equivalente ao da mola elástica dos estudos com barra rígida dos itens anteriores. Além disso, à carga crítica corresponde uma mudança da configuração de equilíbrio, na qual a barra abandona a configuração inicial de eixo reto e busca outra estável com eixo curvo. Esse fenômeno é denominado *flambagem*. Uma expressão para a carga crítica resulta como consequência do problema da determinação da elástica do sistema, naturalmente considerando-se o equilíbrio na posição deslocada.

O objetivo de se estudar quatro casos não é somente ilustrar um procedimento comum para a obtenção da carga crítica em sistemas sem imperfeições, mas, sobretudo, ressaltar a influência da vinculação sobre o seu valor.

Num primeiro caso, estuda-se uma coluna articulada na extremidade inferior e com apoio móvel na extremidade superior, submetida a uma carga  $P$ , como mostra a figura 6.10a.

A partir dos dados indicados naquela figura, pode-se escrever que:

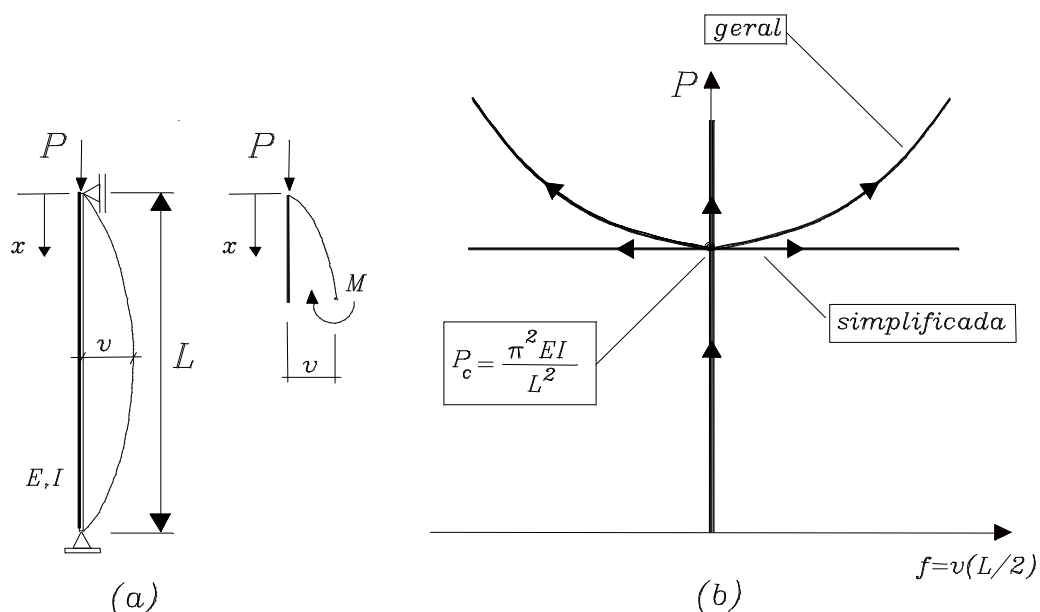
$$M = Pv = -EI v'' \rightarrow$$

$$v'' + \frac{P}{EI} v = 0 \rightarrow v'' + k^2 v = 0 \quad (6.14 a)$$

onde  $k^2 = \frac{P}{EI}$  .

A solução da equação diferencial indicada em (6.14a) exprime-se na forma:

$$v = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) \quad (6.14 b)$$



**Figura 6.10 - Barra sob compressão axial com vínculos do tipo apoio/apoio**

As constantes de integração podem ser determinadas, em princípio, impondo-se as condições de contorno existentes em  $x = 0$  e em  $x = L$ .

- i) De  $v(x=0) = 0$  segue que:  $A_1 = 0$ ;
- ii) De  $v(x=L) = 0$  resulta que  $A_2 \sin(kL) = 0$ .

A última igualdade é satisfeita se  $A_2 = 0$  para qualquer valor de  $\text{sen}(kL)$ , obtendo-se  $v = 0$  (solução 1); porém esta solução não tem interesse por ser a trivial.

Por outro lado, naquela mesma igualdade, se  $A_2 \neq 0$ , então, necessariamente,  $\text{sen}(kL) = 0$ , daí decorrendo as seguintes possibilidades:

- a)  $kL = 0$ , o que implica em  $P = 0$  (solução 2), a qual também não é uma possibilidade de interesse;
- b)  $kL = n \pi$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) resultando em  $P \neq 0$  (solução 3); desta possibilidade decorrem as chamadas cargas críticas de flambagem.

O menor valor para a carga crítica é obtido tomando-se  $n = 1$  na solução 3, resultando:

$$kL = \pi \rightarrow P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.15)$$

Outra observação importante é que na relação (6.15) não se associou à inércia nenhum índice indicativo de um eixo em particular. Como o que se deseja é o menor valor da carga crítica, deve-se adotar a menor inércia. Assim, como regra geral, a flambagem é um fenômeno que tende a ocorrer preferencialmente em torno do eixo de menor inércia.

A partir do valor da carga crítica expresso pela (6.15), a elástica passa a apresentar uma forma senoidal, compatível com a vinculação dada, porém com valores expressos em função da constante  $A_2$  que permanece indeterminada:

$$v = A_2 \text{sen}(kL) = A_2 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6.16)$$

A indeterminação da elástica é, na verdade, conseqüência da utilização da forma simplificada da equação da linha elástica, empregada na (6.14a), válida quando os deslocamentos são pequenos. Vale lembrar, novamente, que tomar o equilíbrio na posição deslocada não implica, necessariamente, em que os deslocamentos sejam grandes. Tal tipo de análise simplificada,

apesar de sua limitação quanto à caracterização da elástica, serve perfeitamente para os propósitos de determinação da carga crítica.

É possível, naturalmente, desenvolver uma análise geral, na qual na equação diferencial da linha elástica exprime-se a curvatura por uma relação completa, porém o resultado referente ao valor da carga crítica é o mesmo. Na figura 6.10b, representam-se as respostas simplificada e completa, apesar desta não ter sido aqui deduzida por extrapolar os objetivos deste texto.

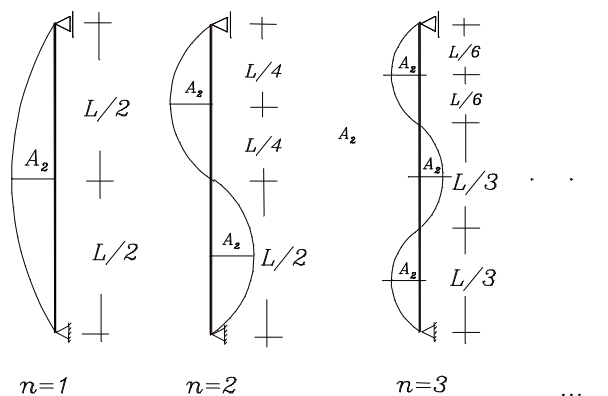
Voltando à solução 3 da análise simplificada, nota-se que existem outros valores de carga crítica em correspondência a valores inteiros de  $n$  maiores do que a unidade. Por exemplo, tomando-se  $n = 2$  a expressão da carga crítica resulta:

$$P_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.17)$$

A elástica associada a valores de carga superiores ao crítico fica expressa por:

$$v = A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6.18)$$

Representando-se graficamente as soluções relativas aos outros valores de  $n$ , nota-se que as elásticas apresentam um número de ondas igual a  $n$ , conforme ilustra a figura 6.11.

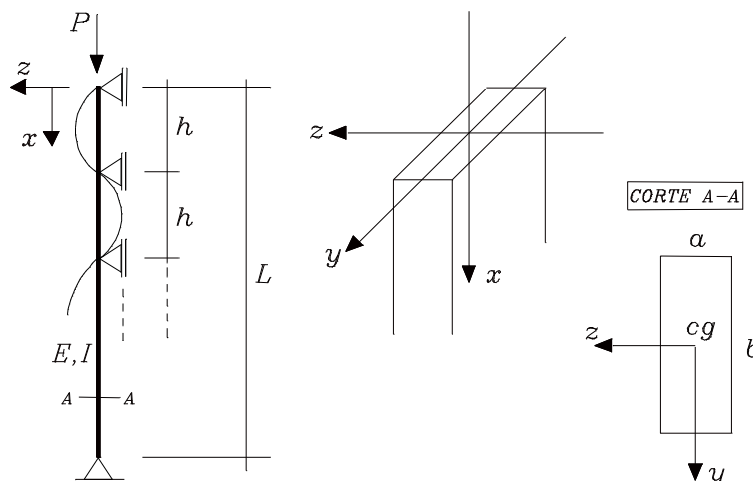


**Figura 6.11 - Elásticas compatíveis com a solução  $n = 1, 2, 3$**

Fisicamente a elástica para  $n=1$  é preferencial. Somente serão possíveis soluções correspondentes a valores de  $n$  maiores do que a unidade se houverem impedimentos aos deslocamentos transversais nos pontos onde a elástica teoricamente deve ser nula; o que equivale à existência de apoios adicionais.

A ocorrência de apoios adicionais pode ser proposital na prática. De fato, quando da concepção de um projeto estrutural, a possibilidade de flambagem segundo o eixo de menor inércia deve ser evitada sem que se altere a geometria da seção transversal definida pelo projeto. Nesses casos, procura-se acrescentar vínculos impedindo-se os deslocamentos transversais em determinados pontos, de modo a reduzir o valor do 'comprimento de flambagem' segundo o plano vertical que contém o eixo de menor inércia.

Para ilustrar o problema descrito, considere-se, por exemplo, o caso da coluna bi-apoiada com seção retangular, indicada na figura 6.12. O objetivo consiste em determinar o número de apoios móveis a serem acrescentados para que a possibilidade de perda de estabilidade seja a mesma, tomando-se as inércias segundo os eixos principais  $z$  e  $y$  da seção.



**Figura 6.12 - Efeito de vínculos adicionais**

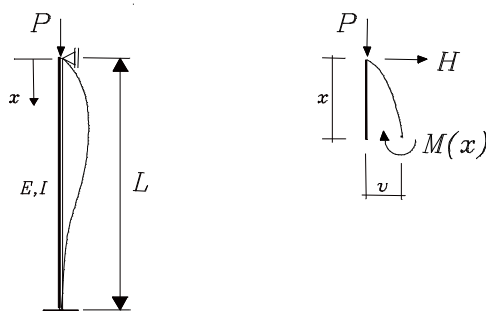
Admitindo-se que tais vínculos sejam distribuídos a partir da cota  $x = 0$  e eqüidistantes de um espaçamento  $h$ , a condição para a determinação do número de vínculos resulta de:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_y}{h^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{h}{L} \rightarrow h = \left(\frac{a}{b}\right)L$$

Deste modo, admitindo-se uma seção com relação  $a/b=1/2$ , obtém-se  $h=L/2$ . Portanto, basta acrescentar um vínculo no meio do vão para que a probabilidade de ocorrência de flambagem seja a mesma em ambas as direções. Tal vínculo impede o deslocamento apenas no plano  $x$ - $z$ .

Um segundo caso a ser estudado, consiste numa variação do exemplo apresentado na figura 6.10, onde se substitui o apoio fixo por um engaste, mudando-se, portanto, as condições de contorno.



**Figura 6.13 - Barra sob compressão axial com vínculos do tipo apoio/engaste**

Com base na figura 6.13, tomando-se o equilíbrio na posição deslocada resulta:

$$M = Pv - Hx = -EIv''$$

$$\rightarrow v'' + k^2 v = \frac{H}{EI}x \quad (6.19)$$

Compondo-se as soluções homogênea e particular da equação diferencial obtida, determinam-se as seguintes expressões gerais para os deslocamentos transversais e giros das seções, respectivamente:

$$v = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) + \frac{H}{P}x \quad (6.20a)$$

$$v' = -A_1 k \sin(kx) + A_2 k \cos(kx) + \frac{H}{P} \quad (6.20b)$$

Impondo-se as condições de contorno objetivando-se determinar as constantes  $A_1$  e  $A_2$  e a reação de apoio  $H$ , resultam:

. De  $v(x=0) = 0$  segue que  $A_1 = 0$ ;

. De  $v'(x=L) = 0$  segue que  $H/P = -A_2 k \cos(kL)$

$$\therefore v(x) = A_2 [ \sin(kx) - k \cos(kL)x ]$$



A condição  $v(x=L) = 0$  é atendida se:

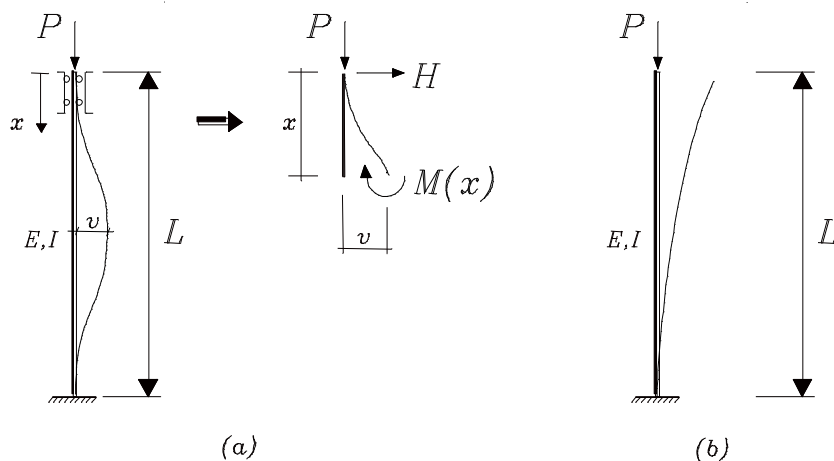
- .  $A_2 = 0$ : o que leva à solução trivial nula;
- .  $A_2 \neq 0$  e  $\tan(kL) = kL$  (solução 2).

Da solução 2, a partir do menor valor positivo de  $kL$  que atende à igualdade ( $kL = 4,493$ ) resulta:

$$P_c \cong \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.21)$$

Na figura 6.14, apresentam-se os outros dois casos básicos que diferem dos anteriores por variações nas condições de contorno.

Seguindo-se um procedimento análogo de integração da equação diferencial da elástica, deduzem-se as seguintes expressões para as cargas críticas dos casos a) e b), indicados naquela figura, respectivamente:



**Figura 6.14 - Barras sob compressão axial com vínculos dos tipos engaste móvel/engaste fixo e engaste fixo**

$$P_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (6.22a,b)$$

Todas as relações para a determinação da carga crítica podem ser colocadas numa única forma geral dada por:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \quad (6.23)$$

onde  $L_{fl}$  é denominado "*comprimento de flambagem*".

Para os quatro casos estudados, os valores dos comprimentos de flambagem valem:

- .  $L_{fl} = L$ , para a vinculação apoio/apoio;
- .  $L_{fl} = L/\sqrt{2}$ , para a vinculação engaste/apoio;
- .  $L_{fl} = L/2$ , para a vinculação engaste móvel/engaste fixo;
- .  $L_{fl} = 2L$ , para a vinculação engaste fixo.

É possível escrever a relação geral da carga crítica (6.23) numa forma envolvendo a tensão normal e um parâmetro associado à geometria da barra, portanto mais conveniente para fins de dimensionamento.

Assim, dividindo-se ambos os membros da (6.23) pela área  $A$  da seção transversal e redefinido as relações entre as grandezas geométricas, resulta sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{A} = \sigma_{fl} &= \frac{\pi^2 EI}{AL_{fl}^2} \rightarrow \\ \sigma_{fl} &= \pi^2 E \left( \frac{i}{L_{fl}} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde:

$i = \sqrt{I/A}$  é denominado *raio de giração*;

$\lambda = L_{fl}/i$  é o *índice de esbeltez*.

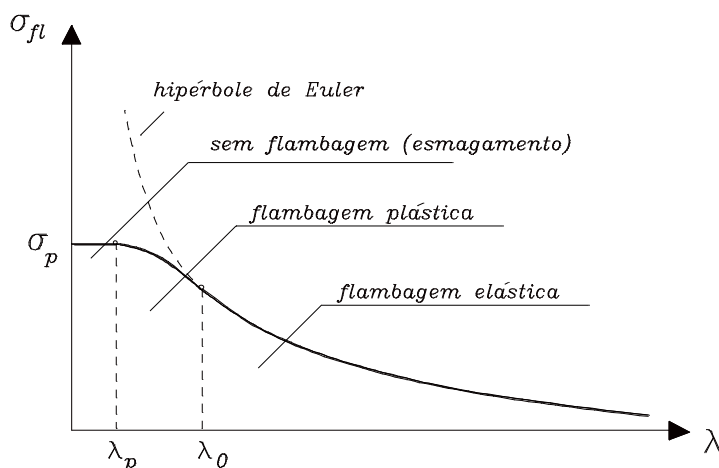
Para um dado material, caracterizado pelo módulo de elasticidade  $E$ , e para uma determinada geometria da barra, incluindo-se aí a seção transversal e o comprimento, a relação (6.24) fornece um valor limitante superior para a tensão normal,

que pode atuar na seção, sem que se viole o regime elástico e que aconteça o fenômeno da flambagem.

A representação gráfica daquela expressão está ilustrada na figura 6.15, notando-se, em particular, que se indica um regime de validade da chamada hipérbole de Euler (nome dado à expressão 6.24). De fato, a flambagem elástica é possível de ocorrer a partir de certo valor de esbeltez, abaixo do qual existem dois regimes: o de flambagem plástica e o de esmagamento.

Na flambagem plástica ocorre um efeito combinado de plastificação da barra com perda de estabilidade. Nas barras com índice de esbeltez baixo não se manifesta a perda de estabilidade e o material sofre esmagamento por compressão.

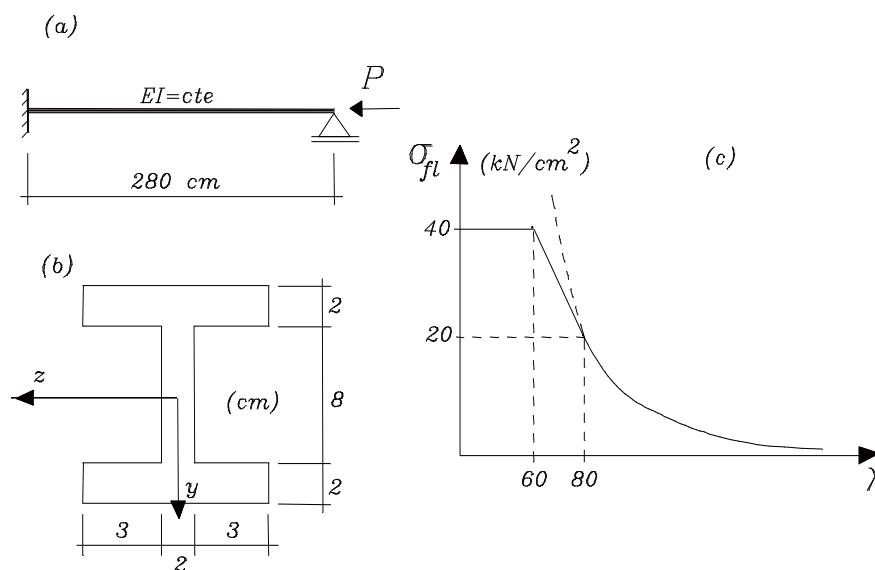
Os índices de esbeltez limitantes de cada um dos regimes de comportamento em questão são considerados característicos de cada material; na maior parte dos casos há uma definição clara sobre os valores relativos ao limite elástico, o mesmo não ocorrendo para os limites entre os regimes de flambagem plástica e de esmagamento (muitas vezes indefinidos).



**Figura 6.15 - Hipérbole de Euler e os regimes de comportamento**

**Exemplo 1:** Trata-se de uma viga de comprimento  $L = 280$  cm, engastada na extremidade esquerda e apoiada na extremidade

direita, submetida a uma força de compressão  $P$  centrada, como ilustra a figura 6.16a.



**Figura 6.16 - Geometria e relação  $\sigma_{fl} - \lambda$  para viga engastada/apoiada**

A seção transversal e o diagrama  $\sigma_{fl} - \lambda$  estão indicados nas figuras 6.16b e c, respectivamente. Pede-se determinar o valor admissível para a carga  $P$ , adotando-se um fator de segurança igual a **2**.

A carga máxima pode ser determinada multiplicando-se a tensão de flambagem pela área da seção transversal; a carga máxima admissível é obtida dividindo-se a carga máxima pelo fator de segurança. Então, valem as relações:

$$P_{m\acute{a}x} = \sigma_{fl} A \quad ; \quad \bar{P} = \frac{P_{m\acute{a}x}}{2}$$

A tensão de flambagem é uma função do índice de esbeltez, ilustrada pelo diagrama da figura 6.16c. Deve-se, inicialmente, determinar aquele índice, observando-se que se o mesmo for igual ou superior a 80 vale a hipérbole de Euler e o regime será de flambagem elástica.

Os valores geométricos de interesse são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 A &= 8.2.3 = 48 \text{ cm}^2 \\
 I_z &= \frac{8.12^3}{12} - \frac{2.3.8^3}{12} = 896 \text{ cm}^4 \\
 I_z &= \frac{4.8^3}{12} + \frac{8.2^3}{12} = 176 \text{ cm}^4 \\
 i &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{176}{48}} = 1,915 \text{ cm} \quad ; \quad L_{fl} = \frac{L}{\sqrt{2}} \\
 \lambda &= \frac{L_{fl}}{i} = \frac{280}{\sqrt{2}.1,915} = 103,4 > 80
 \end{aligned}$$

Concluindo-se pela validade da hipérbole de Euler, pode-se empregar a relação:  $\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ ; porém o valor do módulo de elasticidade não é um dado direto do problema. Seu valor pode ser determinado com os dados da figura 6.16c, pois o par  $(\sigma_{fl}, \lambda) = (20, 80)$  também pertence à hipérbole e, portanto, deve verificar a relação acima. Assim sendo, segue que:

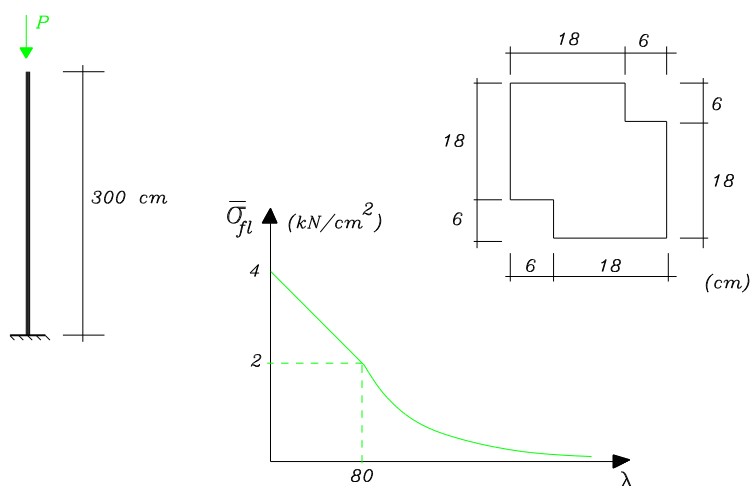
$$E = \frac{\sigma_{fl} \lambda^2}{\pi^2} = \frac{20.80^2}{\pi^2} \quad \therefore \pi^2 E = 128000 \text{ kN/cm}^2$$

Finalmente, para a tensão de flambagem e para a carga admissível resultam os valores:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{fl} &= \frac{128000}{103,4^2} = 11,97 \text{ kN/cm}^2 \\
 \bar{P} &= \frac{11,97.48}{2} = 287,28 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

.□

**Exemplo 2:** Na figura 6.17 representam-se: um pilar engastado na base, submetido a uma carga  $P$  de compressão na sua extremidade livre, a respectiva seção transversal e o diagrama  $\bar{\sigma}_{fl} - \lambda$ . Pedese determinar a carga  $P$  admissível, sabendo-se que no diagrama foi adotado um coeficiente de segurança "2".



**Figura 6.17 - Pilar sob compressão centrada**

A resolução segue os moldes do exemplo anterior, observando-se apenas que como o coeficiente de segurança já está considerado nos valores de tensão de flambagem explicitados no diagrama da figura 6.17, a hipérbole de Euler fica expressa pela seguinte relação:

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{2} = \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2}$$

**a) Determinação das características geométricas**

$$A = 24 \cdot 24 - 6 \cdot 6 = 504 \text{ cm}^2$$

$$y_{cg} = z_{cg} = 12 \text{ cm}$$

$$I_z = I_y = \frac{24^4}{12} - 2 \left[ \frac{6^4}{12} + 6^2 \cdot (9)^2 \right] = 21600 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = -2 \cdot (6)^2 \cdot 9 \cdot 9 = -5832 \text{ cm}^4$$

As inércias principais resultam:

$$I_1 = 27432 \text{ cm}^4 ; I_2 = 15768 \text{ cm}^4$$

O índice de esbeltez fica determinado por:

$$i = \sqrt{\frac{15768}{504}} = 5,593 \text{ cm} ; \quad \lambda = \frac{2L}{i} = \frac{600}{5,593} = 107,3$$

portanto, vale a hipérbole de Euler.

**b)** *Determinação da carga admissível*

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\sigma_{fl}}{2} = \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} \rightarrow 2 = \frac{\pi^2 E}{2.80^2} \therefore \pi^2 E = 25600 \text{ kN/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} = \frac{25600}{2.107,3^2} = 1,11 \text{ kN/cm}^2$$

$$\bar{P} = 1,11.504 = 560 \text{ kN}$$

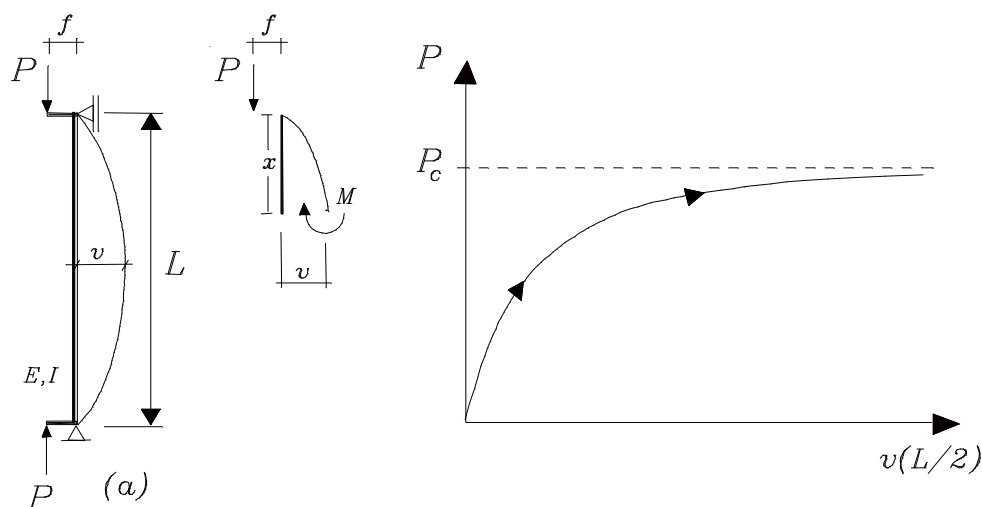
### 6.5 A flexão composta na análise não-linear geométrica

Deve-se observar, novamente, que a flambagem elástica de Euler é um fenômeno associado a sistemas perfeitos, isentos de defeitos de natureza geométrica, física ou de excentricidade do carregamento. Essas condições, porém, podem não ser verificadas nas situações reais de projeto. De fato:

- a)** A aplicação de uma carga concentrada perfeitamente centrada é puramente teórica e impossível de se obter na prática;
- b)** É bastante difícil obter-se uma barra com eixo de geometria perfeitamente reta;
- c)** Em geral o material que compõe a barra contém imperfeições.

Dentro dos limites deste texto, é possível tratar de modo razoavelmente simples, em termos analíticos, o caso de imperfeição indicado no item a), que consiste em excentricidade do carregamento, admitindo-se que não existam defeitos de geometria e do material.

Considere-se, então, o caso ilustrado na figura 6.18, no qual a carga está aplicada com uma excentricidade  $f$ :



**Figura 6.18 - Efeito da excentricidade na aplicação da carga**

A procura da elástica, tomando-se o equilíbrio na posição deslocada leva a:

$$M = P(f + v) = -EIv'' \quad \rightarrow \quad v'' + k^2v = -k^2f$$

$$\therefore v(x) = A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \operatorname{cos}(kx) - f \quad (6.25)$$

Aplicando-se as condições de contorno, resultam:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = f$$

$$v(L) = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{f[1 - \operatorname{cos}(kL)]}{\operatorname{sen}kL}$$

$$v(x) = f \left[ \frac{(1 - \operatorname{cos}kL)}{1 - \frac{\operatorname{sen}kL}{\operatorname{tg} \frac{kL}{2}}} \operatorname{sen}kx + \operatorname{cos}kx - 1 \right] \quad (6.26)$$

O deslocamento máximo,  $v_{\max}$ , ocorre em  $x=L/2$ , e vale:



$$v_{m\acute{a}x} = f \left[ \frac{(1 - \cos kL)}{\operatorname{sen} kL} \operatorname{sen} \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right] = f \left( \frac{1}{\cos \frac{kL}{2}} - 1 \right) \quad (6.27)$$

Outro valor de interesse é o momento fletor no meio do vão, que pode ser explicitado com a (6.27):

$$M = P(f + v_{m\acute{a}x}) = Pf \left( \frac{1}{\cos \frac{kL}{2}} \right) \quad (6.28)$$

A situação em estudo trata-se, na verdade, de uma flexão composta provocada pela compressão axial. De fato, na figura 6.18 pode-se comprovar essa afirmação transportando-se a força para o eixo da peça não se esquecendo, naturalmente, do momento  $Pf$ . Se o equilíbrio for tomado na posição indeslocada, o momento de flexão se mantém constante ao longo do eixo e igual a  $Pf$ .

Assim sendo, na (6.23) o termo entre parênteses estabelece uma correção no valor daquele momento, no meio do vão, em função da flexão sofrida pelo eixo. Tal correção traduz o efeito de se considerar o equilíbrio na posição deslocada, mesmo que os deslocamentos sejam pequenos, hipótese, aliás, implícita quando se emprega a expressão da elástica em uso, conforme já salientado anteriormente.<sup>(\*)</sup>

Nota-se, por outro lado, com base na expressão 6.21, que se  $kL = \pi$  o valor do deslocamento  $v_{m\acute{a}x}$  será infinito. A essa situação corresponde uma carga dada por:

$$k = \frac{\pi}{L} \rightarrow P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.29)$$

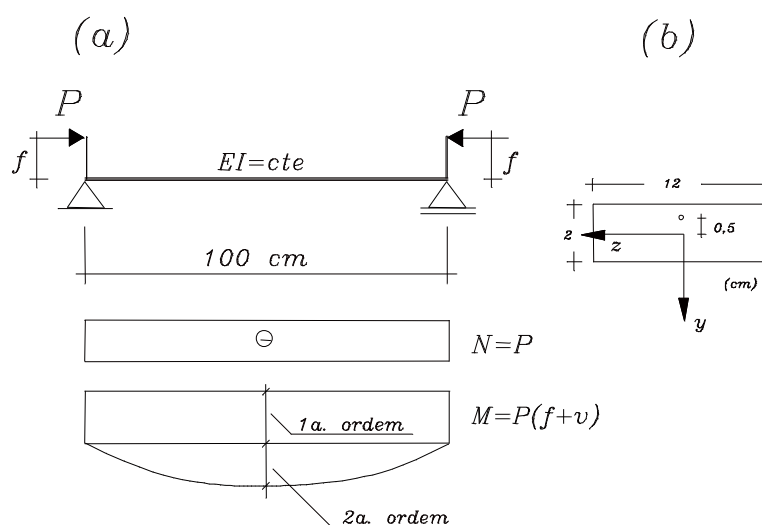
idêntica à carga crítica do sistema perfeito.

Porém, apesar da coincidência das expressões, deve-se esclarecer que no caso da ocorrência de excentricidade ( $f \neq 0$ ), o comportamento apresentado pelo sistema é assintótico quando

comparado ao caso sem excentricidade, conforme ilustra o gráfico da figura 6.18.

Aquele gráfico mostra que o eixo, inicialmente reto, assume progressivamente uma curvatura não-nula, tendendo o deslocamento no meio do vão para um valor infinitamente grande na medida em que a intensidade da carga aproxima-se do valor previsto pela (6.29).

**Exemplo 3:** Seja a viga-coluna biapoiada de comprimento  $L = 100$  cm, submetida a um carregamento excêntrico  $P$  em ambas as extremidades, como mostra a figura 6.19a. O valor da carga aplicada é igual à metade do valor da carga crítica de compressão centrada. Pede-se determinar a maior tensão normal de compressão atuante na viga em questão, sendo  $E = 10.000$  kN/cm<sup>2</sup>.



**Figura 6.19 - Viga-coluna submetida à compressão excêntrica**

A abordagem linear do problema da determinação da tensão normal em viga-coluna submetida à compressão excêntrica já foi apresentada no capítulo da flexão, e a relação lá obtida para o cálculo do seu valor é a seguinte:

(\*) Quando os deslocamentos são pequenos a análise não-linear é dita em segunda ordem, enquanto que a análise linear é sempre em primeira ordem.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z}{I_z} y + \frac{Pe_y}{I_y} z$$

onde  $A$  é a área da seção transversal e  $I_z, I_y$  são momentos principais de inércia da seção. As parcelas  $Pe_z$  e  $Pe_y$  são os momentos da carga aplicada com relação a eixos centrais principais de inércia. Numa abordagem linear, essas parcelas permanecem constantes ao longo do comprimento da peça, desconsiderando-se os efeitos da elástica.

Na abordagem não-linear geométrica, a relação para  $\sigma_x$  mantém a mesma forma, pois foi obtida a partir de uma hipótese cinemática de seções inicialmente planas permanecerem planas. Entretanto, os momentos da carga sofrem uma correção devida à elástica, pois o equilíbrio é tomado na posição deslocada.

Admitindo-se o plano de carregamento coincidente com um plano de simetria e que a excentricidade seja de 0,5 cm com relação ao eixo de menor inércia, conforme indica a figura 6.19b, a expressão para o cálculo da máxima tensão normal, que ocorre na seção do meio do vão, passa a ser:

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{M(L/2)}{I_z} y$$

onde o momento no meio do vão é dado pela (6.28).

Conforme o enunciado, a carga  $P$  é igual à metade do valor da carga crítica que leva a elástica no meio do vão a um valor infinito. Portanto:

$$P = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cdot 10000 \cdot 8}{100^2} = 39,48 \text{ kN}$$

observando que a menor inércia vale  $8 \text{ cm}^4$ .

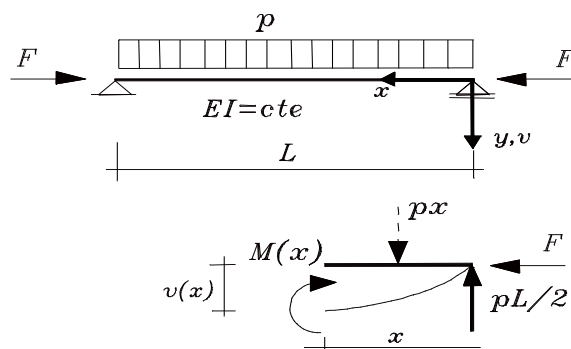
Finalmente, levando-se em conta a (6.28) e lembrando-se que  $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$  resulta:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = -\frac{39,48}{24} - \frac{39,48 \cdot (-0,5) \cdot 2,252}{8} \cdot (-1) = -7,2 \text{ kN/cm}^2$$

**Exemplo 4:** Considere-se uma viga biapoiada de comprimento  $L$  e produto de rigidez  $EI$ , submetida a um carregamento  $p$  distribuído uniformemente e a uma carga de compressão centrada  $F$ , como ilustrado na figura 6.20. Pede-se determinar uma expressão para o cálculo do máximo momento de flexão.

Considerando-se o equilíbrio na posição deslocada, o momento de flexão numa seção genérica entre os apoios é dado pela seguinte relação:

$$M(x) = Fv(x) + \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}$$



**Figura 6.20 - Viga-coluna submetida à flexão composta**

Para determinar o seu valor máximo é necessário deduzir a expressão de  $v(x)$ . Da equação da linha elástica segue que:

$$v'' + k^2 v = \frac{p}{2EI}(x^2 - Lx)$$

A solução geral apresenta a seguinte forma:

$$v(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \operatorname{sen}(kx) - \frac{p}{Fk^2} - \frac{pLx}{2F} + \frac{px^2}{2F}$$

Impondo-se as condições de contorno, obtêm-se:

$$A_1 = \frac{p}{Fk^2}; \quad A_2 = \frac{p}{Fk^2} \frac{1 - \cos kL}{\operatorname{tg} \frac{kL}{2}};$$

$$v(x) = \frac{p}{Fk^2} \cos kx + \frac{p}{Fk^2} \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{sen} kx - \frac{p}{Fk^2} - \frac{pLx}{2F} + \frac{px^2}{2F}$$

Portanto a expressão geral para o momento resulta:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{p}{k^2} \cos kx + \frac{p}{k^2} \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{sen} kx - \frac{p}{k^2} \\ &= \frac{2pL^2}{8 \left( \frac{kL}{2} \right)^2} \left( \cos kx + \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \operatorname{sen} kx - 1 \right) \end{aligned}$$

No meio do vão, onde o momento é máximo:

$$M(L/2) = \frac{pL^2}{8 \left( \frac{kL}{2} \right)^2} \left( \frac{1}{\cos \left( \frac{kL}{2} \right)} - 1 \right) = \frac{pL^2}{8} C_m$$

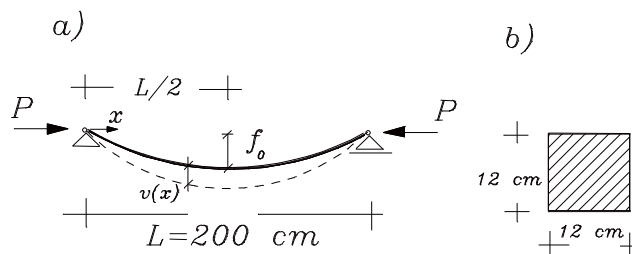
onde  $C_m$  é o coeficiente de majoração correspondente ao efeito de segunda ordem. Para o caso em que  $C_m = 1$ , recupera-se o resultado da análise linear.

Novamente resulta uma carga crítica em  $kL = \pi$ , que leva a elástica a um valor infinito no meio do vão.  $\square$

**Exemplo 5:** Uma viga-coluna biapoiada possui comprimento  $L = 200\text{cm}$ ; segundo um plano longitudinal de simetria atuam, nas seções dos apoios, cargas de compressão  $P$  perfeitamente centradas. Admite-se, ainda, que o eixo tenha uma forma inicial senoidal com flecha máxima no meio do vão, como ilustrado na figura 6.21a.

Para uma força  $P$  aplicada igual a 0,30 do valor da carga crítica deste caso, determinar a flecha máxima inicial de modo que a tensão normal em módulo não ultrapasse  $15 \text{ kN/cm}^2$ .

Dado complementar:  $E = 10.000 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 6.21 - Viga-coluna com eixo inicialmente curvo**

Do equilíbrio de momentos na posição deslocada, obtém-se:

$$M(x) = P \left[ v_0(x) + v(x) \right] = P \left[ f_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + v(x) \right]$$

Por sua vez a tensão normal na seção mais solicitada (do meio do vão) pode ser determinada por:

$$\sigma(y) = \frac{P}{A} + \frac{M(L/2)}{I} \cdot y$$

sendo que, naturalmente, a tensão máxima ocorre no ponto mais afastado da linha neutra. Toda a solução fica dependente da determinação de  $v(x)$ , ou seja: da integração da equação da linha elástica.

Neste caso, a equação diferencial da linha elástica fica expressa por:

$$v'' + k^2 v = -k^2 f_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

A solução particular pode ser expressa na forma:

$$v_p(x) = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

onde  $C = \frac{k^2 L^2}{(\pi^2 - k^2 L^2)} f_0$ . Portanto, a solução geral fica dada por:

$$v(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) + \left( \frac{k^2 L^2}{\pi^2 - k^2 L^2} \right) f_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

As constantes podem ser identificadas impondo-se as condições de contorno:

$$v(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0$$

$$v(L) = 0 \rightarrow A_2 \sin kL = 0$$

A segunda condição de contorno pode ser satisfeita com  $A_2 = 0$ , independente do valor de  $kL$ . Obtém-se, a solução geral:

$$v(x) = \left( \frac{k^2 L^2}{\pi^2 - k^2 L^2} \right) f_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Há uma carga crítica associada a essa solução, que anula o denominador do termo entre colchetes:

$$k^2 = k_c^2 = \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P_c}{EI} \quad \therefore P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Note-se, por outro lado, que o valor crítico também verifica a segunda condição de contorno, independente do valor de  $A_2$ . Voltando à solução em deslocamentos, em particular no meio do vão resulta que:

$$v(L/2) = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{k^2 L^2}{1 - k^2 L^2 / \pi^2} \right) f_0$$

Observando-se que:  $\frac{k^2 L^2}{\pi^2} = \frac{k^2}{k_c^2} = \frac{P}{P_c}$ , a última relação pode ser

escrita na forma:

$$v(L/2) = \frac{P}{P_c} \frac{1}{\left( 1 - \frac{P}{P_c} \right)} f_0$$

O momento de flexão no meio do vão então resulta:

$$M(x) = P \left[ f_0 + v(L/2) \right] = \frac{P f_0}{\left( 1 - \frac{P}{P_c} \right)}$$

Com base nos dados geométricos da seção transversal indicada na figura 6.21b, para a carga crítica obtém-se:

$$P_c = \frac{\pi^2 \cdot 10000 \cdot 12^3}{200^2} = 4263,7 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto, a carga aplicada vale:  $P = 1279,1 \text{ kN/cm}^2$ .

Impondo-se, finalmente, que a tensão normal máxima em módulo não ultrapasse o limite dado, resulta:

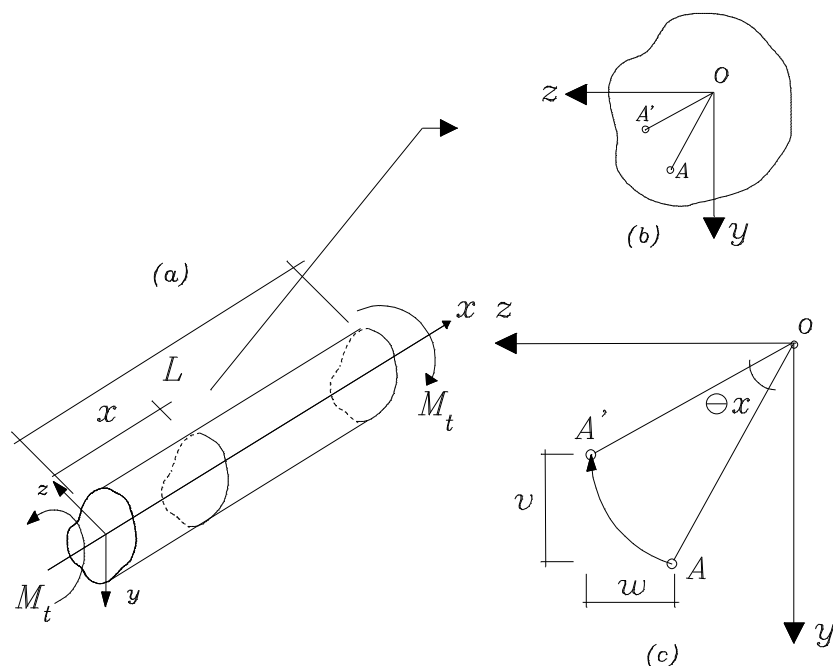
$$\frac{1279,1}{144} + \frac{1279,1 \cdot f_0}{288,07} \leq 15 \quad \therefore f_0 \leq 0,96 \text{ cm}$$

## 7 TORÇÃO LIVRE

### 7.1 Considerações gerais e a hipótese cinemática

Configura-se um regime de *torção simples* quando a barra está solicitada somente a momentos de torção. Na figura 7.1a representa-se uma barra prismática de comprimento  $L$  e seção transversal de geometria qualquer submetida a momentos de torção, indicados por  $\mathbf{M}_t$ , aplicados em suas extremidades.





**Figura 7.1 - Barra submetida a torção simples e giro relativo entre seções distintas**

Um efeito de tal sollicitação numa certa seção da barra é o de provocar um giro relativo, denotado por  $\theta(x)$  e suposto pequeno ( $\theta \leq 0,1 \text{rd}$ ), com relação a outra seção transversal de referência distante  $x$  dela (normalmente uma das seções nas extremidades da barra em sua posição indeformada é tomada como referência e contém a origem do sistema de eixos).

Sendo o momento de torção constante em  $L$ , é possível admitir que o giro relativo seja proporcional à distância à origem do sistema, isto é:  $\theta(x) = \Theta x$ , onde  $\Theta$  é uma constante que representa o giro por unidade de comprimento.

Com relação à natureza das tensões associadas às deformações provocadas pela torção, um modo de visualizá-las resulta da concepção de que a barra seja formada por pequenos segmentos que se superpõem ao longo da direção  $x$ .

Na hipótese de que a continuidade da barra seja preservada no processo de deformação, os giros de cada um dos segmentos não são independentes entre si, mas devem estar compatibilizados por

tensões de cisalhamento atuantes, naturalmente, nos planos das seções.

Por outro lado, observa-se que os deslocamentos dos pontos da barra também tem componente na direção axial, num efeito denominado *empenamento*. Desse modo, estando a barra sob torção, seções transversais inicialmente planas deixam de sê-lo e a torção simples é ainda dita *livre* quando os vínculos não impõem qualquer restrição ao empenamento.

Em linhas gerais, o modelo cinemático da torção livre, ou torção de Saint-Venant, que descreve os deslocamentos dos pontos de uma barra, ou trecho dela, solicitado a *momento de torção constante*, está baseado nas seguintes hipóteses:

**a-)** O giro de uma seção qualquer com relação a uma seção de referência é diretamente proporcional à distância entre elas:

$$\theta(x) = \Theta x.$$

**b-)** O empenamento, caso ocorra, difere ponto a ponto apenas em função da sua posição na seção transversal. Como o empenamento fica expresso pela componente axial do deslocamento, aqui representada por  $u$ , vale a relação:  $u = u(y, z)$ ;

Tome-se um ponto qualquer de uma seção transversal de interesse, ilustrada nas figuras 7.1b e 7.1c. Com base na hipótese a) e sendo o giro muito pequeno, é possível escrever as expressões das duas outras componentes  $v$  e  $w$  do deslocamento, respectivamente nas direções definidas pelos eixos de referência  $y$  e  $z$ , nas formas:

$$v = -\Theta xz ; w = \Theta xy \quad (7.1 a, b)$$

Em notação vetorial  $u$ ,  $v$  e  $w$  são componentes de um vetor deslocamento  $d$ , o qual fica representado na seguinte forma, segundo uma base cartesiana ortonormal formada pelos versores

$e_1, e_2, e_3$  coincidentes com as direções dos eixos de referência  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente:

$$d = ue_1 + ve_2 + we_3 \quad (7.1 \text{ c})$$

Assim sendo, considerando-se as (7.1), em qualquer ponto da barra o campo de deslocamentos fica totalmente determinado uma vez conhecidos  $u(y, z)$  e  $\Theta$ .

Observa-se ainda que, sem perda de generalidade, pode-se escrever a função  $u(y, z)$  na forma:  $K \Psi(y, z)$ , onde  $K$  é uma constante qualquer e  $\Psi$  é uma função de forma associada à geometria da seção transversal. Dado o caráter genérico da constante  $K$ , por uma questão de conveniência algébrica, impõe-se  $K = \Theta$ .

## 7.2 Relações deformação-deslocamento

Definido o campo de deslocamentos, as componentes de deformação podem ser determinadas tomando-se derivadas parciais conforme indicado em seguida:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(y, z)}{\partial x} = 0 \quad (7.2 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v(x, z)}{\partial y} = 0 \quad (7.2 \text{ b})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w(x, y)}{\partial z} = 0 \quad (7.2 \text{ c})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \Theta \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right] \quad (7.3 \text{ a})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \Theta \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right] \quad (7.3 \text{ b})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\Theta x + \Theta x = 0 \quad (7.3 \text{ c})$$

Nota-se que as únicas componentes não nulas são as distorções nos planos  $x$ - $y$  e  $x$ - $z$ . Além disso, considerando-se as

7.2b,c e 7.3c, pode-se afirmar que as seções transversais são indeformáveis no plano  $y$ - $z$ .

### 7.3 Relações tensão-deformação

Para um material elástico linear as relações tensão-deformação expressam-se pela forma generalizada da lei de Hooke. Inicialmente as tensões normais resultam da inversão do seguinte conjunto de relações:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (7.4 \ a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (7.4 \ b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (7.4 \ c)$$

de onde se conclui, com as 7.2a,b e c, que

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (7.5 \ a)$$

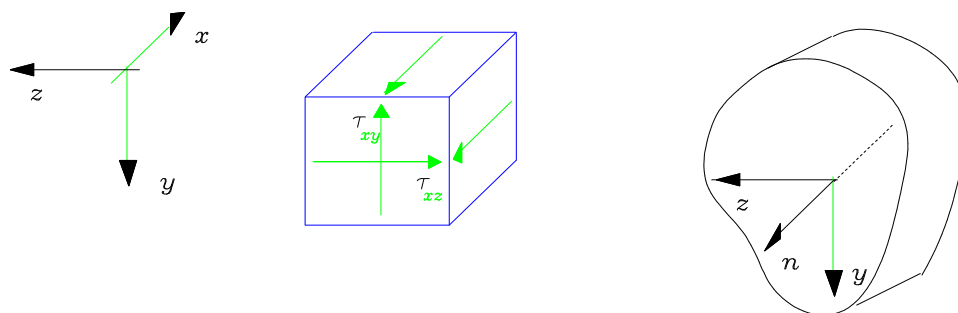
Quanto às tensões tangenciais, obtêm-se:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \Theta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right] \quad (7.5 \ b)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \Theta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right] \quad (7.5 \ c)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} = 0 \quad (7.5 \ d)$$

Portanto,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  são as únicas componentes de tensão não-nulas e atuam no plano da seção transversal, valendo, ainda, a reciprocidade com relação a planos longitudinais conforme ilustra a figura 7.2.

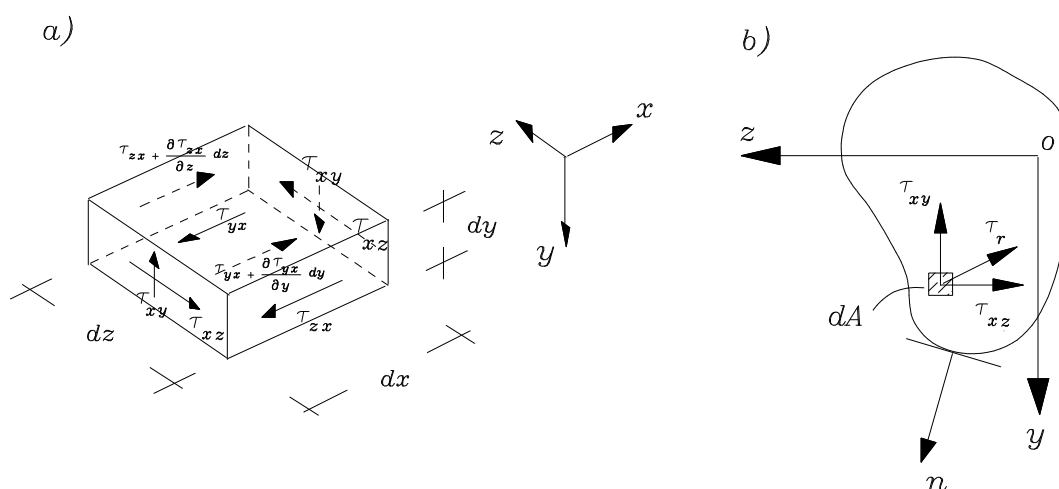


**Figura 7.2 - As tensões de cisalhamento e a reciprocidade**

#### 7.4 O equilíbrio das tensões de cisalhamento

As tensões de cisalhamento expressas pelas 7.5 devem ter uma distribuição tal que garanta o equilíbrio de um volume elementar qualquer da barra.

Na figura 7.3a, ilustra-se um volume elementar com as componentes de tensão e suas respectivas variações (observando-se que numa situação de momento de torção constante, como a em estudo, não há variação das tensões segundo o eixo x).



**Figura 7.3 - a) Equilíbrio de um volume elementar  
b) Vetores de tensão**

Do equilíbrio do elemento, segue que as distribuições plausíveis de tensão de cisalhamento devem verificar a seguinte condição:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (7.6)$$

Substituindo-se as (7.5) a última relação assume a forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (7.7)$$

que deve ser obedecida, de modo alternativo, pela função  $\psi$ .

A condição de contorno associada à equação anterior justifica-se no que segue.

Dadas as componentes de tensão atuantes no plano da seção, a cada uma delas pode-se associar um vetor, multiplicando-as por um elemento infinitesimal de área  $dA$  (v.fig.7.3b). Desse modo, pode-se definir um vetor resultante  $\tau_r dA$  ( $\tau_r^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$ ) que nas bordas da seção deve ser tangente ao contorno, devido à regra da reciprocidade das tensões de cisalhamento. Matematicamente, essa condição pode ser imposta mediante uma condição de ortogonalidade entre o vetor de tensão e o versor normal ao contorno. Portanto, considerando-se a definição de produto interno, a condição em questão resulta:

$$\tau_r \cdot n = 0 \quad (7.8)$$

onde  $n$  é o versor normal ao contorno no ponto.

### 7.5 Balanço entre as resultantes de tensões e os esforços solicitantes

As resultantes das tensões de cisalhamento na seção devem ser compatíveis com os esforços solicitantes.

Em primeiro lugar, como o esforço cortante é nulo, devem valer as condições:

$$\begin{aligned} \int_A \tau_{xy} dA &= 0 \\ \int_A \tau_{xz} dA &= 0 \end{aligned} \quad (7.9 \text{ a,b})$$

ou ainda, com as (7.5),

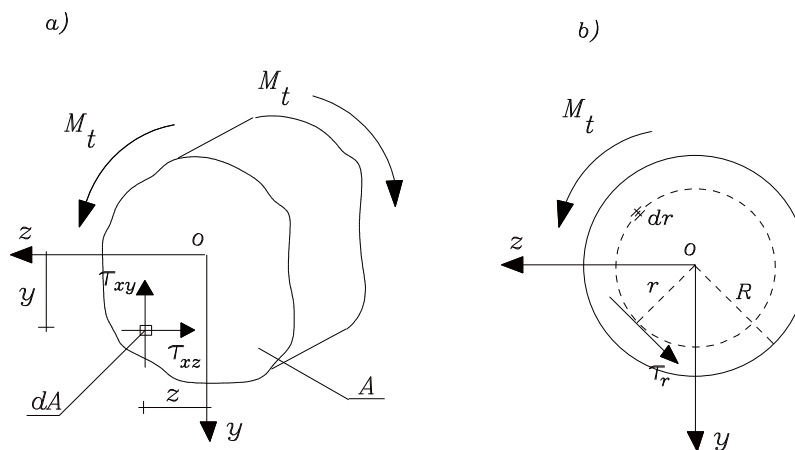
$$\int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) dA = 0$$

$$\int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) dA = 0 \quad (7.10 \text{ a,b})$$

As últimas relações envolvem somente geometria e servem para determinar a posição do centro de torção, ponto origem das coordenadas  $y$  e  $z$  no plano da seção. Nota-se, pelas mesmas relações, que o centro de torção coincide com o centro de gravidade quando:  $\int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA = \int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dA = 0$ .

Por outro lado, o momento resultante das tensões de cisalhamento deve equilibrar o momento de torção solicitante. Assim, tomando-se por base a figura 7.4a, vale a relação:

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad (7.11)$$



**Figura 7.4 - a) Balanço de momentos  
b) Caso da seção circular**

Com as (7.5b,c) segue ainda que:

$$M_t = G \Theta \int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dA \quad (7.12)$$

A integral que aparece na relação anterior envolve somente geometria e contém, nas duas últimas parcelas, os momentos de inércia da seção, cuja soma define o chamado *momento de inércia polar*. É usual denominar aquela integral de *momento de inércia à torção*, simbolizado aqui por  $I_t$ :

$$I_t = \int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dA \quad (7.13)$$

Uma vez conhecido  $I_t$ , da expressão (7.12) pode-se determinar o valor do giro por unidade de comprimento:

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (7.14)$$

### 7.6 Considerações sobre a resolução do problema da torção simples

A resolução do problema da torção simples tem por objetivo determinar a função  $\psi$  e a constante  $\Theta$ . Entretanto, com relação a  $\psi$ , a condição obtida é a equação diferencial (7.7), cuja integração analítica pode não ser possível se considerada uma seção transversal de geometria qualquer.

Um primeiro modo alternativo de resolução, consiste em arbitrar a distribuição das tensões de cisalhamento na seção, o que leva a uma caracterização indireta da função  $\psi$  pelas (7.5b,c), evitando-se a resolução da equação diferencial. Esse modo aplica-se em barras com seções transversais de geometria bastante simples, como a circular.

Sempre considerando a hipótese de que os giros máximos são muito pequenos, há ainda o modo aproximado denominado *analogia de membrana*, que decorre de uma correspondência analítica formal entre as equações diferenciais do problema da torção e do problema do equilíbrio de uma membrana. Os resultados aproximados obtidos com essa analogia são suficientemente precisos em boa parte das aplicações práticas.



No que segue, apresentam-se as duas alternativas de resolução comentadas, abordando-se, na primeira, as barras de seção circular, sobre as quais se pode adotar uma hipótese razoável com relação à distribuição das tensões. A alternativa relacionada à analogia de membrana permite abranger também os casos de seções com geometria qualquer.

### 7.7 Barras de seção circular

No caso de barras de seção circular, em razão de sua geometria, e levando-se em conta a condição geral de contorno explicitada pela relação (7.8), o vetor representativo da tensão de cisalhamento resultante, num determinado ponto da seção, tem direção tangencial à circunferência definida pela distância (raio  $r$ ) do ponto ao centro geométrico da seção. Uma hipótese relativa à distribuição dessas tensões consiste em admitir que sua intensidade seja proporcional à distância  $r$  (v.fig.7.4b). Em outras palavras:

$$\tau_r = Ar \quad (7.15)$$

onde  $A$  é uma constante.

Por sua vez, o vetor de tensão tangencial deve coincidir com a resultante das componentes  $\tau_{xy} dA$  e  $\tau_{xz} dA$  deduzidas na formulação geral.

Observando-se as relações gerais (7.5b,c), a linearidade descrita pela (7.15) pode ser atendida se a função  $\psi$  for nula, o que implica, ainda, em empenamento nulo.

De fato, valendo as condições em questão, as (7.5b,c) passam a ser escritas nas formas:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -G\Theta z \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\Theta y \end{aligned} \quad (7.16 \text{ a,b})$$

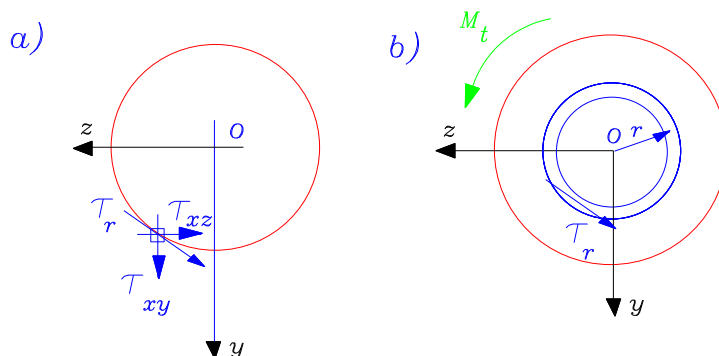
Quanto à tensão tangencial, (v.fig.7.5a), segue que:

$$\tau_t^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = (G\Theta)^2 [y^2 + z^2] = (G\Theta r)^2$$

$$\therefore \tau_t = G\Theta r \quad (7.17)$$

o que permite concluir, por comparação com as (7.15), que  $A = G\Theta$ .

Nota-se que, sendo o empenamento nulo, as (7.10) indicam que o centro de torção coincide com o centro geométrico da seção.



**Figura 7.5 - a) Tensão de cisalhamento resultante  
b) Balanço com o momento de torção**

Da condição de que o momento das tensões de cisalhamento resultantes deve equilibrar o momento torçor solicitante, (v.fig.7.5b), para uma barra de raio  $R$  e diâmetro  $D$  resulta a seguinte expressão para o cálculo de  $\Theta$ :

$$M_t = \int_0^R (\tau_t 2\pi r dr) r = \int_0^R 2\pi G \Theta r^3 dr = \frac{2\pi G \Theta}{4} R^4$$

$$M_t = \frac{\pi G \Theta D^4}{32} \rightarrow \Theta = \frac{32 M_t}{\pi G D^4} \quad (7.18a)$$

Tendo-se em vista a expressão (7.14), da (7.18a) conclui-se que:

$$I_t = \frac{\pi D^4}{32} \quad (7.18b)$$

Por outro lado, a mesma conclusão pode ser obtida da expressão (7.13). Daquela expressão, segue que, neste caso, o momento de inércia à torção é igual ao momento polar ( $I_t = I_z + I_y$ );

como na seção circular:  $I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$ , conclui-se que  $I_t = \frac{\pi D^4}{32}$ .

Lembrando que o momento de torção, bem como a geometria e o material, são constantes ao longo de todo o comprimento  $L$  da barra, o giro total, medido entre suas seções de extremidade, pode ser determinado por:

$$\theta(L) = \Theta L = \frac{32 M_t L}{\pi G D^4} \quad (7.19)$$

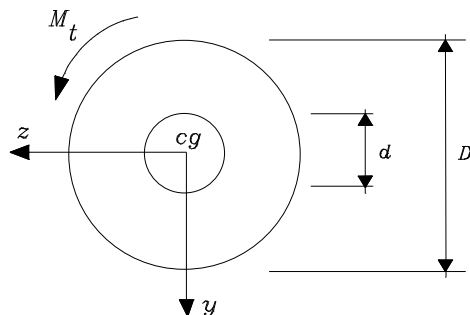
Ainda, tendo-se em vista as expressões (7.18), a tensão de cisalhamento num ponto qualquer distante  $r$  do centro geométrico da seção, dada pela (7.17), pode ser calculada em função do momento de torção por:

$$\tau_r = \frac{M_t r}{I_t} \quad (7.20 a)$$

Um valor de particular interesse é a tensão de cisalhamento máxima, que ocorre nas bordas da seção:

$$\tau_{máx} = \tau_t \left( \frac{D}{2} \right) = \frac{16 M_t}{\pi D^3} \quad (7.20 b)$$

No caso de seção circular vazada com diâmetro interno de dimensão  $d$  e externo com dimensão  $D$ , conforme ilustrado na figura 7.6, permanecem válidas as conclusões sobre a seção circular cheia: inexistência de empenamento e distribuição das tensões de cisalhamento de forma proporcional à distância ao centro geométrico da seção.



**Figura 7.6 - Seção circular vazada de parede espessa**

Neste caso, as expressões do momento de torção, do giro total  $\theta$  e da tensão de cisalhamento máxima resultam:

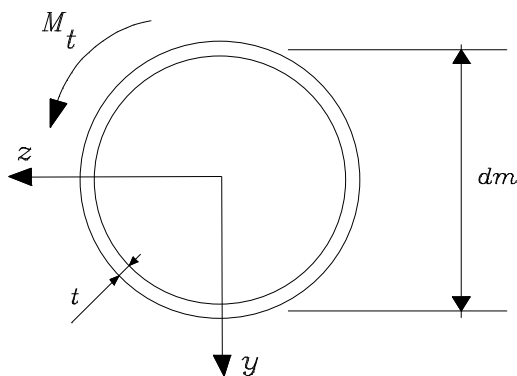
$$\begin{aligned}
 M_t &= \int_{d/2}^{D/2} \tau_t r dA = \int_{d/2}^{D/2} \tau_t r (2\pi r dr) \\
 &= \int_{d/2}^{D/2} 2\pi G \Theta r^3 dr = \frac{2\pi G \Theta (D^4 - d^4)}{64}
 \end{aligned}
 \tag{7.21 a}$$

$$\Theta = \frac{32 M_t}{\pi G (D^4 - d^4)} \rightarrow \theta(L) = \frac{32 M_t}{\pi G (D^4 - d^4)} L
 \tag{7.21 b, c}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{32 M_t}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{D}{2} = \frac{16 M_t D}{\pi (D^4 - d^4)}
 \tag{7.21 d}$$

sendo o momento de inércia à torção dado por  $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$ .

Pode-se, ainda, considerar o caso de uma seção transversal vazada, onde o diâmetro interno  $d$  apresenta valores próximos de  $D$ . Esse tipo de seção ocorre nos chamados *tubos de parede fina* (v.fig.7.7). Neste caso é usual adotar-se um diâmetro médio  $d_m$  e uma espessura  $t$ , onde a condição  $t \ll d_m$  caracteriza o tubo de parede fina.



**Figura 7.7 - Seção transversal de um tubo de parede fina**

As expressões (7.21) podem ser particularizadas para este caso, valendo as seguintes simplificações de natureza geométrica:

$$D^4 - d^4 = (D^2 - d^2)(D^2 + d^2) \quad ; \quad D = d_m + t \quad ; \quad d = d_m - t$$

$$D^2 = d_m^2 + t^2 + 2d_m t$$

$$d^2 = d_m^2 + t^2 - 2d_m t$$

Como  $t \ll d_m$ , resultam:

$$D^2 - d^2 = 4d_m t$$

$$D^2 + d^2 = 2(d_m^2 + t^2) \approx 2d_m^2$$

$$\therefore D^4 - d^4 = 8d_m^3 t$$

Finalmente, obtêm-se:

$$\theta(L) = \varphi = \frac{4M_t}{\pi G d_m^3 t} L \quad (7.22a)$$

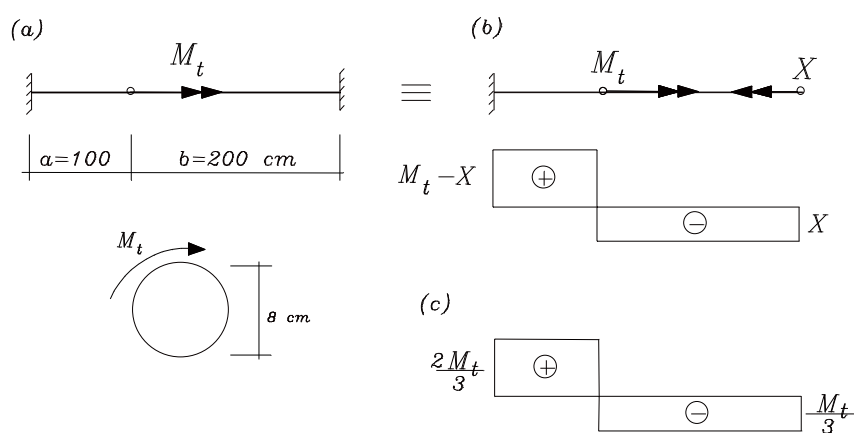
$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi(D^4 - d^4)} D = \frac{16M_t d_m}{8\pi d_m^3 t} = \frac{2M_t}{\pi t d_m^2} \quad (7.22b)$$

com o momento de inércia à torção dado por  $\frac{\pi d_m^3 t}{4}$ .

Nota-se, por um lado, que no caso da seção de parede fina, as tensões tangenciais são constantes na espessura, pois são expressas somente em função do diâmetro médio. Por outro lado, a

solução para a seção circular cheia pode ser recuperada da solução para a seção vazada impondo-se  $d = 0$ .

**Exemplo 1:** Um eixo de seção circular cheia, com diâmetro de 8cm, está engastado em ambas as extremidades e submetido a um momento de torção com posição e sentido ilustrados na figura 7.8a. Pedese determinar o giro da seção B e o valor do momento torçor, sabendo-se que  $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$  e que a tensão tangencial na seção transversal não deve ultrapassar, em módulo,  $10 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 7.8- Eixo uma vez hiperestático à torção**

A estrutura em questão é uma vez hiperestática à torção. A distribuição de momentos ao longo do eixo pode ser encontrada pela técnica de superposição de efeitos segundo a metodologia do processo dos esforços. Para tanto, libera-se um dos vínculos, isto é, reduz-se o sistema dado a uma estrutura geometricamente determinada, fazendo-se atuar na extremidade livre um momento hiperestático incógnito, como ilustrado na figura 7.8b. O esforço incógnito é então calculado a partir da condição de compatibilidade que consiste em impor giro nulo na extremidade cujo vínculo foi liberado.

Seguindo o procedimento descrito e liberando-se o vínculo da extremidade direita, para a estrutura resultante obtém-se o diagrama de momentos de torção mostrado na figura 7.8b.

Para a imposição da condição de compatibilidade (giro nulo na seção liberada), emprega-se a relação (7.19). Porém, como a distribuição de momentos de torção não é constante ao longo de todo o comprimento do eixo, aquela relação somente pode ser aplicada em cada uma das porções de eixo onde o momento é constante. Nesse caso, deve-se tomar o cuidado de substituir  $L$  pelo valor do comprimento do trecho em consideração. Cada parcela resultante representa, então, o giro relativo entre as seções extremas do trecho.

Levando-se em conta a convenção de sinais para os momentos adotada no diagrama da figura 7.8b, a condição de compatibilidade resulta:

$$\varphi_D = -\frac{32(X)(L-a)}{\pi G d^4} + \frac{32(M_t - X)a}{\pi G d^4} = 0$$

$$\therefore X = M_t \frac{a}{L} = \frac{M_t}{3}$$

O diagrama final de momentos de torção está ilustrado na figura 7.8c, sendo o mesmo de interesse direto para o cálculo da tensão de cisalhamento máxima em módulo.

Para o cálculo de  $\tau_{m\acute{a}x}$  vale a (7.20):

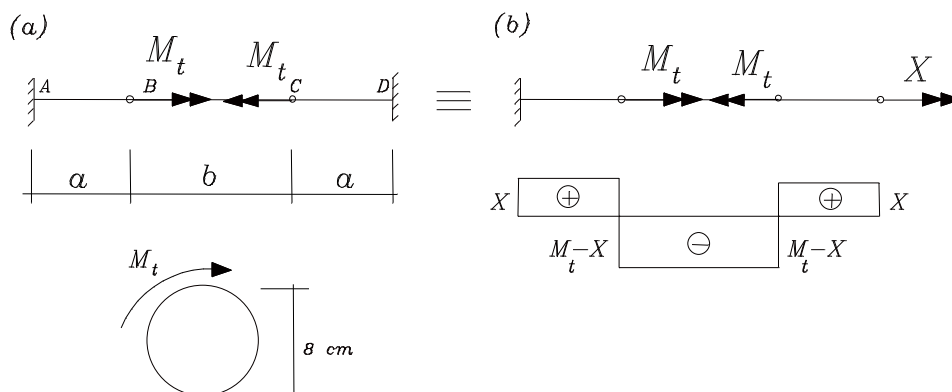
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{16\left(\frac{2}{3}M_t\right)}{\pi 8^3} \leq 10 \rightarrow M_t \leq 480\pi \text{ kN.cm} = 1507 \text{ kNcm}$$

Finalmente, o giro na seção B, medido em relação à seção

fixa A, resulta: 
$$\varphi_B = \frac{32\left(\frac{2}{3}480\pi\right)100}{8000\pi(8^4)} = \frac{1}{32} = 0,0313 \text{ rad} .$$

**Exemplo 2:** Considere-se um eixo biengastado, com momentos torçores  $M_t$  aplicados nos pontos B e C, conforme ilustra a figura 7.9a. Admitindo-se que o valor de  $G$  seja  $10000 \text{ kN/cm}^2$ , determinar a relação  $a/b$  para que a capacidade do eixo seja

máxima. Para a relação  $a/b$  obtida e sendo a tensão de cisalhamento admissível igual a  $10 \text{ kN/cm}^2$ , determinar o valor de  $M_t$ .

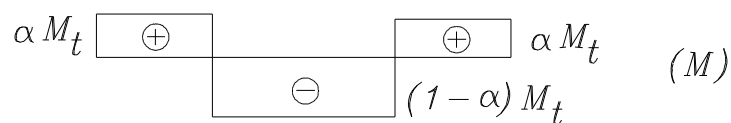


**Figura 7.9- Eixo de seção circular submetido à torção**

Aplicando-se o processo dos esforços e tendo-se em vista a figura 7.9b, obtém-se:

$$\frac{32Xa}{\pi G D^4} - \frac{32(M_t - X)b}{\pi G D^4} + \frac{32Xa}{\pi G D^4} = 0 \rightarrow X = M_t \left( \frac{b}{2a+b} \right) = \alpha M_t$$

Com o valor do momento obtido, o diagrama de esforços resulta com a forma indicada na figura 7.10.



**Figura 7.10- Diagrama de momentos de torção**

A capacidade será máxima quando o valor em módulo da maior tensão de cisalhamento for igual ao longo de toda a barra. No caso, sendo o diâmetro constante, é equivalente impor-se a igualdade dos momentos de torção tomados em módulo, e isto se obtém para  $\alpha = 1/2$ . Portanto, considerando-se a definição de  $\alpha$  segue que:

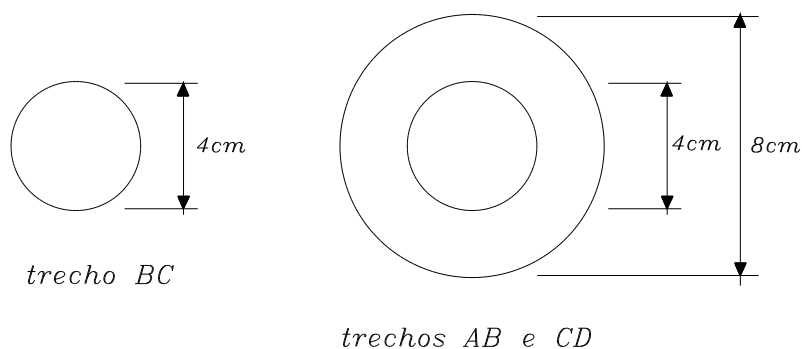


$$\frac{b}{2a+b} = \frac{1}{2} \rightarrow b = 2a \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)_{\text{máx}} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, determina-se o momento admissível por:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16\left(\frac{1}{2}M_t\right)}{\pi 8^3} \leq 10 \rightarrow M_t = 640\pi \text{ kNcm}$$

**Exemplo 3:** Na condição de capacidade máxima, determinar a relação  $a/b$  para a mesma estrutura do exemplo 2, admitindo-se, agora, que em cada um dos trechos de comprimentos  $a$  e  $b$  as seções transversais apresentem as dimensões descritas na figura 7.11.



**Figura 7.11- Dimensões das seções transversais da barra**

Novamente, aplicando-se o processo dos esforços e impondo-se a condição de giro nulo na extremidade liberada, nos mesmos moldes do exemplo anterior, resulta:

$$\frac{32Xa}{\pi G(8^4 - 4^4)} - \frac{32(M_t - X)b}{\pi G D^4} + \frac{32Xa}{\pi G(8^4 - 4^4)} = 0$$

$$\rightarrow X = M_t \left( \frac{15b}{2a + 15b} \right) = \beta M_t$$

O diagrama de momentos de torção assume a forma descrita pela figura 7.12.



**Figura 7.12- Diagrama de momentos de torção**

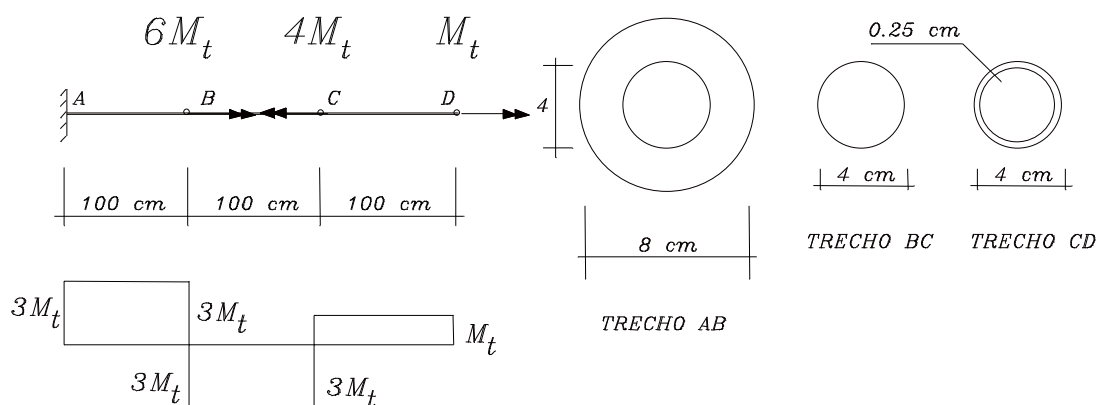
A máxima capacidade de carga é então imposta igualando-se os valores extremos em módulo das tensões de cisalhamento em cada um dos trechos, como segue:

$$\frac{16(\beta M_t)8}{\pi(8^4 - 4^4)} = \frac{16(1-\beta)M_t}{\pi 4^3}$$

Tendo-se em vista a definição dada a  $\beta$  resulta:

$$\frac{15b}{2a+15b} = \frac{30}{34} \rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

**Exemplo 4:** Para a barra ilustrada na figura 7.13, considerando-se uma tensão cisalhante admissível de valor  $10 \text{ kN/cm}^2$  e  $G = 10000 \text{ kN/cm}^2$ , determinar o maior momento de torção de referência que se pode aplicar e o diagrama de giro ao longo da mesma.



**Figura 7.13 - Barra com seções diferentes e constantes por trechos**

Com base no diagrama de momentos de torção representado na figura 7.13, impondo-se o valor admissível para a tensão de cisalhamento obtêm-se:

$$\text{trecho AB: } \frac{16(3M_t)8}{\pi(8^4 - 4^4)} \leq 10 \rightarrow M_t \leq 100\pi \text{ kNcm}$$

$$\text{trecho BC: } \frac{16(3M_t)}{\pi 4^3} \leq 10 \rightarrow M_t \leq 13,3\pi \text{ kNcm}$$

$$\text{trecho CD: } \frac{2M_t}{\pi 4^2(0,25)} \leq 10 \rightarrow M_t \leq 20\pi \text{ kNcm}$$

Portanto, o valor a ser adotado para o momento máximo é:  $M_t = 13,3\pi \text{ kNcm}$ .

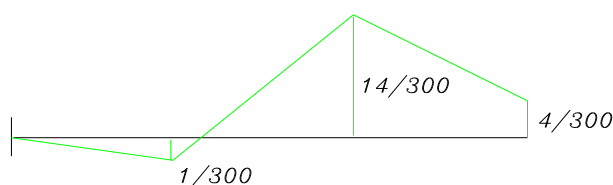
Para a determinação da distribuição dos giros ao longo da viga, deve-se lembrar de sua variação linear em cada trecho, Assim é suficiente calcular os giros nas seções B, C e D relativamente à seção A, que é fixa. Desse modo resultam:

$$\varphi_B = \frac{32(3M_t)100}{\pi G(8^4 - 4^4)} = \frac{1}{300} \text{ rad}$$

$$\varphi_C = \frac{1}{300} + \frac{32(-3M_t)100}{\pi G 4^4} = \frac{1}{300} - \frac{1}{20} = -\frac{14}{300} \text{ rad}$$

$$\varphi_D = -\frac{14}{300} + \frac{(4M_t)100}{\pi G 4^3(0,25)} = -\frac{14}{300} + \frac{1}{30} = -\frac{4}{300} \text{ rad}$$

e o diagrama de giros está ilustrado na figura 7.14.

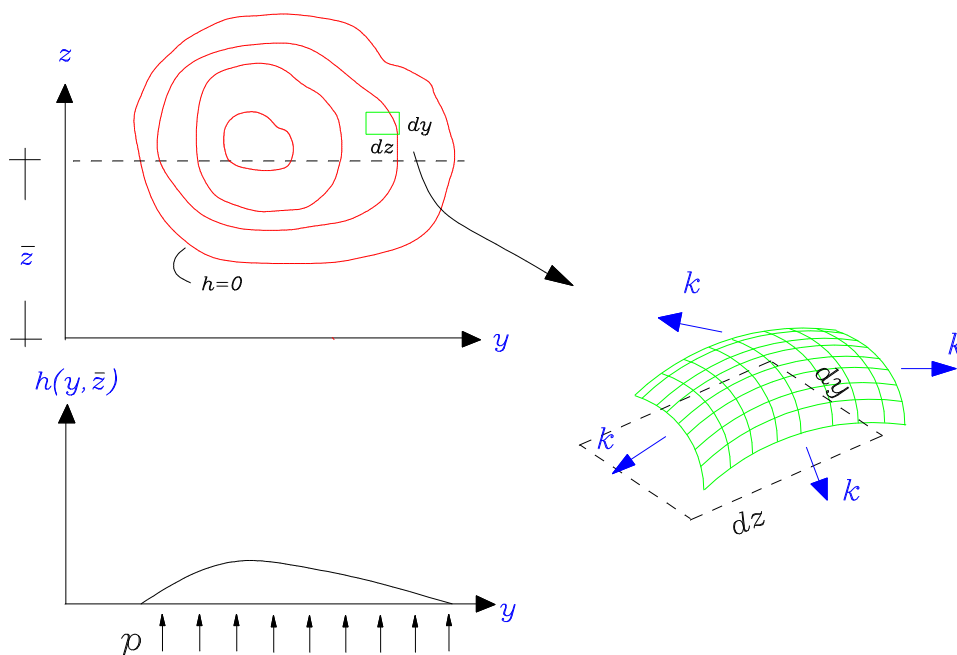


**Figura 7.14 - Diagrama de giros**

### 7.8 Analogia de membrana

Imagine-se uma lâmina extremamente delgada, de modo que se possa desprezar o seu peso, ocupando certa região do plano  $Y-Z$  e tendo seu contorno fixo. A lâmina tem rigidez nula na direção transversal ao seu plano e resiste somente a esforços de tração (uma membrana de sabão, por exemplo, atende a esses requisitos).

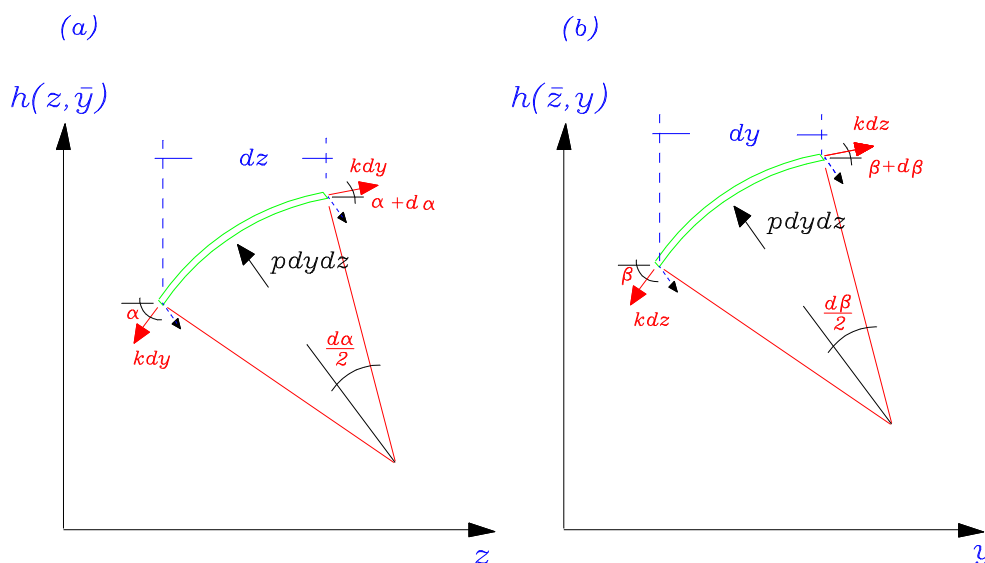
Admita-se que essa membrana venha a ser submetida a uma pressão  $p$  exibindo, na situação equilibrada, a forma de uma bolha. Nessa situação, aparece, ao longo de toda a superfície deformada, um esforço de tração  $k$  que equilibra a pressão atuante e se distribui uniformemente por unidade de comprimento. A figura 7.15 descreve as considerações mencionadas, bem como a configuração deslocada da membrana.



**Figura 7.15 - Membrana sob pressão**

O equilíbrio de um elemento de área  $dA = dz dy$  pode ser analisado tomando-se o somatório das forças na direção da resultante da pressão atuante. Nesse caso, consideram-se a resultante  $p dy dz$  e as componentes do esforço da tração da membrana nos lados do elemento, como ilustrado nas figuras 7.16a

e 7.16b.



**Figura 7.16 - Equilíbrio do elemento de área  $dA$**

A relação de equilíbrio escreve-se na forma:

$$p(dydz) = 2kdy \operatorname{sen}\left(\frac{d\alpha}{2}\right) + 2kdz \operatorname{sen}\left(\frac{d\beta}{2}\right) \quad (7.14 \ a)$$

Sendo  $h(y, z)$  a função que descreve a forma assumida pela membrana, as inclinações de sua superfície segundo as direções  $z$  e  $y$  podem ser obtidas, respectivamente, por:

$$\alpha = \frac{\partial h(y, z)}{\partial z} = h_z \quad (7.14 \ b)$$

$$\beta = \frac{\partial h(y, z)}{\partial y} = h_y \quad (7.14 \ c)$$

Na hipótese de que os deslocamentos sofridos sejam muito pequenos e, por consequência, também as inclinações sejam muito pequenas, na equação de equilíbrio (7.14a) podem-se confundir os senos dos ângulos com os próprios ângulos. Além disso, considerando-se que:

$$d\alpha = -\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz = -h_{zz} dz \quad (7.15 \ a)$$

$$d\beta = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dy = -h_{yy} dy \quad (7.15 \text{ b})$$

a relação (7.14a) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\frac{p}{k} \quad (7.15 \text{ c})$$

A (7.15c) é a equação diferencial fundamental do problema do equilíbrio de uma membrana sob pressão; devendo ser obedecida a condição  $h(y,z)=0$  em todos os pontos do contorno.

A analogia com o problema da torção pode ser mostrada admitindo-se, em primeiro lugar, que exista uma função  $\phi(y,z)$  tal que:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} ; \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (7.16 \text{ a,b})$$

Na verdade, a (7.6) é uma condição suficiente para a existência da função  $\phi$ , pois é identicamente satisfeita substituindo-se nela as (7.16).

Levando-se em conta as (7.5b,c), das expressões anteriores resultam:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = G\Theta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - I \right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (7.17 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\Theta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + I \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (7.17 \text{ b})$$

Essas relações podem ser combinadas de modo a eliminar os termos envolvendo  $\psi$  obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 2G\Theta \quad (7.18)$$

Nota-se que as equações diferenciais (7.15c) e (7.18) são semelhantes em forma e resultam iguais se:

$$\phi(y,z) = -2G\Theta \frac{k}{p} h(y,z) \quad (7.19)$$

A analogia se completa com uma condição de contorno para (7.18). Pela própria relação (7.19), como  $h(y,z)=0$  no contorno, conclui-se que  $\phi(y,z)=0$  naquela região.

Valendo a (7.19), das (7.16) segue que:

$$\tau_{xy} = \frac{k}{p} 2G\Theta \frac{\partial h}{\partial z} ; \tau_{xz} = -\frac{k}{p} 2G\Theta \frac{\partial h}{\partial y} \quad (7.20 \text{ a,b})$$

indicando que a distribuição das tensões de cisalhamento do problema da torção tem correspondência com a inclinação da superfície deslocada do problema da membrana sob pressão.

Outro aspecto importante da analogia em estudo resulta do balanço entre o momento de torção solicitante e o momento resultante das tensões de cisalhamento. Tal balanço está descrito pela relação (7.11) a qual, com as (7.16), passa a ser escrita na forma:

$$M_t = \int_A (\phi_y y + \phi_z z) dA \quad (7.21 \text{ a})$$

Essa integral pode ser reescrita convenientemente como segue:

$$M_t = \int_A [(\phi_y y + \phi_z z + 2\phi) - 2\phi] dA = \int_A [(\phi_y y + \phi_z z + 2\phi)] dA - 2 \int_A \phi dA \quad (7.21 \text{ b})$$

$$M_t = \int_A \left( \frac{\partial(\phi y)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi z)}{\partial z} \right) dA - 2 \int_A \phi dA \quad (7.21 \text{ c})$$

Aplicando-se sobre a primeira integral o teorema da divergência, com o objetivo de transformá-la numa integral sobre o contorno da região de área  $A$ , resulta:

$$M_t = \int_{\partial A} [\phi y \cos(n,y) + \phi z \cos(n,z)] dA - 2 \int_A \phi dA \quad (7.21 \text{ d})$$

onde  $\partial A$  representa o contorno da área  $A$ . Como a função  $\phi$  tem valor nulo sobre o contorno, segue que:

$$M_t = -2 \int_A \phi dA = -2 \left( \int_A h dA \right) \left( \frac{2G\Theta}{-p/k} \right) = \frac{4G\Theta k}{p} \int_A h dA \quad (7.22)$$

A integral que aparece na última relação representa o volume contido na membrana deslocada, a qual inicialmente ocupa uma área igual à da seção transversal da barra. Denotando-se por  $V$  aquele volume, da relação (7.22) resultam:

$$M_t = \left( \frac{4G\Theta k}{p} \right) V \rightarrow \Theta = \frac{pM_t}{4GkV} = \frac{M_t}{GI_t} \quad \text{sendo } I_t = 4 \left( \frac{k}{p} \right) V \quad (7.23a, b, c)$$

mostrando que o estudo do equilíbrio da membrana pode também servir para a determinação do momento de inércia à torção. Aliás, um ensaio em laboratório para a determinação de  $I_t$  é até exequível, podendo-se medir o volume deslocado e a inclinação da membrana ponto a ponto; usando-se película de sabão,  $k$  resulta igual à tensão superficial da água.

Sendo o momento de torção proporcional ao volume deslocado pela membrana, conclui-se que seções de mesma área podem resistir a diferentes valores de momento de torção máximo, de acordo com sua geometria.

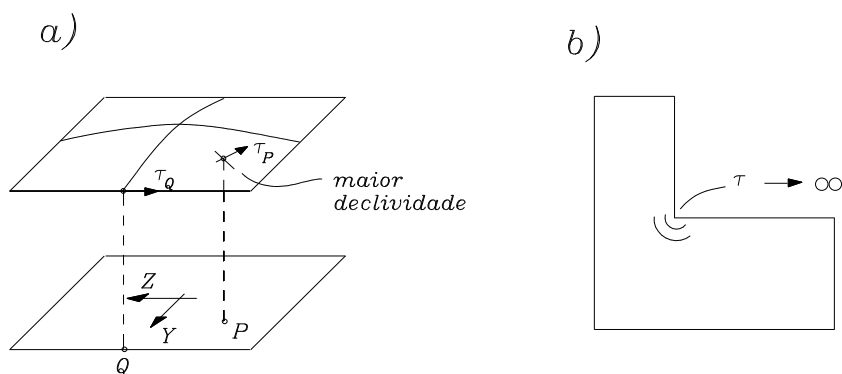
Ainda, considerando a 7.23b, é possível reescrever as expressões (7.20) das tensões de cisalhamento em formas totalmente relacionadas com o problema da membrana:

$$\tau_{xz} = -h_y \left( \frac{M_t}{2V} \right) \quad (7.24 a)$$

$$\tau_{xy} = h_z \left( \frac{M_t}{2V} \right) \quad (7.24b)$$

Uma característica importante é que a tensão de cisalhamento resultante é expressa em função da maior inclinação da tangente à membrana no ponto, e sua direção é sempre ortogonal à direção daquela tangente, (v.fig.7.17a). Por uma questão didática, esse aspecto será demonstrado mais adiante, aproveitando-se o caso da seção de parede fina aberta.





**Figura 7.17 - Intensidade da tensão de cisalhamento proporcional à inclinação da membrana**

Justamente a relação entre intensidade da tensão de cisalhamento e a inclinação da tangente à membrana indica que as maiores tensões tendem a ocorrer nas bordas da seção e paralelamente à elas ; na prática devem ser evitados pontos angulosos reentrantes como indica a figura 7.17b, os quais devem ser arredondados.

Por outro lado, as relações (7.23) e (7.24), mostram que se for possível determinar, para certa geometria, a inclinação da membrana em qualquer ponto e o volume por ela contido, não há necessidade de se resolver a equação diferencial do equilíbrio da membrana e o problema da torção fica resolvido. De fato, como se mostra nos próximos itens, para alguns casos particulares de grande interesse prático, é possível determinar o volume  $V$  e a inclinação da membrana aplicando-se a condição de equilíbrio, porém sem que se resolva a equação diferencial correspondente.

Observa-se, finalmente, que há uma completa analogia entre o problema da torção livre e o do equilíbrio de uma membrana, sob pressão, que ocupa inicialmente uma área geometricamente igual à da seção transversal da barra. Essa conclusão sinaliza, portanto, para a possibilidade de uma abordagem alternativa para a resolução do problema da torção em barras com seção transversal de geometria qualquer, uma vez que o problema da membrana não impõe qualquer restrição sobre sua forma.

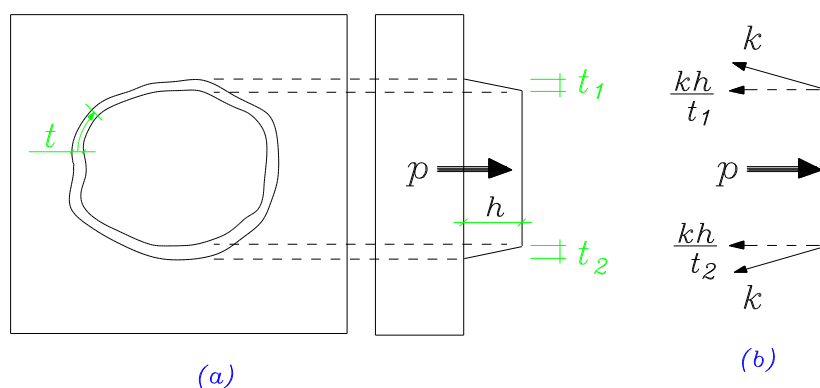
### 7.8.1 Barras de seção transversal vazada fechada com espessura fina

Como uma primeira aplicação da analogia de membrana, consideram-se as barras de seção transversal vazada fechada com paredes de espessura fina variável, submetidas a torção simples livre.

A ideia essencial da analogia consiste em imaginar uma membrana, cuja geometria é exatamente igual à da parede da seção, em equilíbrio sob uma pressão aplicada.

Para caracterizar melhor essa situação, e também para facilitar a obtenção das condições de equilíbrio da membrana, é conveniente idealizar um procedimento experimental fictício.

Seja um recipiente que consiste de uma caixa paralelepipedal em cuja face superior realiza-se um recorte com forma igual à da parede da seção transversal da barra. Em seguida, substitui-se o material da tampa retirado pelo recorte por uma membrana (v.fig.18a).



**Figura 7.18 - Recipiente com pressão interna para o estudo do equilíbrio da membrana**

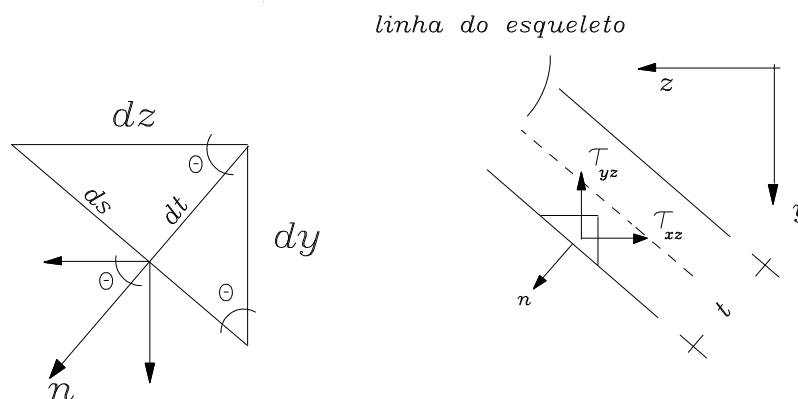
Admita-se que o recipiente assim construído tenha uma abertura, de tal modo que uma pressão possa ser insuflada internamente. Havendo pressão, a região central da face superior, limitada pela membrana, desloca-se em relação ao recipiente assumindo uma posição na qual a membrana apresenta-se

tracionada e em equilíbrio com a pressão aplicada (v.fig.7.18b).

Há duas hipóteses adicionais sobre o sistema idealizado:

- i) O material da caixa de pressão não possui peso;
- ii) Existe uma guia que impõe que a região da face superior limitada pela membrana se desloque paralelamente à face; desse modo, resulta constante o valor do deslocamento  $h$  sofrido por aquela parte.

A primeira hipótese justifica-se para que o equilíbrio da membrana possa ser expresso exclusivamente em função da pressão aplicada. A segunda hipótese é compatível com a condição (7.8) que estabelece que a tensão de cisalhamento resultante seja tangente às bordas, nos contornos da seção.



**Figura 7.19 - Relações geométricas num elemento de parede**

De fato, desenvolvendo-se a (7.8) resulta:

$$\tau_{xy} \cos\theta - \tau_{xz} \sin\theta = 0 \quad (7.25)$$

onde  $\cos\theta$  e  $\sin\theta$  são as componentes, segundo os eixos  $y$  e  $z$ , de um versor direcionado com a normal ao contorno. Levando-se em conta que da geometria indicada na figura 7.19, valem as relações:

$$\cos\theta = \frac{dy}{ds} = \frac{dt}{dz} ; \quad \sin\theta = \frac{dz}{ds} = \frac{dt}{dy} \quad (7.26)$$

e com as (7.24), a (7.25) assume a forma:

$$h_y \frac{dy}{ds} + h_z \frac{dz}{ds} = \frac{dh}{ds} = 0 \quad (7.27)$$

onde  $s$  é uma coordenada que percorre o contorno da membrana.

Essa última relação mostra que não há variação da altura da membrana na direção do seu contorno, o que justifica a segunda hipótese.

A análise do equilíbrio da membrana realiza-se através do diagrama de corpo livre da região deslocada, como mostra a figura 7.18b: a resultante da pressão interna deve ser igual à resultante da força de tração na membrana (\*).

Admitindo-se ainda que o deslocamento  $h$  seja muito pequeno, o que leva a um ângulo também pequeno de inclinação da membrana, a equação de equilíbrio resulta:

$$pA = \oint k \left( \frac{h}{t} \right) ds \quad \rightarrow \quad h = \left( \frac{p}{k} \right) \frac{A}{\oint \frac{I}{t} ds} \quad (7.28)$$

onde  $\oint$  simboliza uma integral fechada. Com essa relação, o volume contido na parte deslocada fica determinado por:

$$V = Ah = \left( \frac{p}{k} \right) \frac{A^2}{\oint \frac{I}{t} ds} \quad (7.29)$$

Assim sendo, a inércia à torção dada pela (7.23c) passa a ser expressa na forma:

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{I}{t} ds} \quad (7.30)$$

Um detalhe importante a ressaltar no que diz respeito à utilização da (7.27) é que, no caso das seções com parede fina,

em estudo neste item, a área da membrana pode ser tomada como a área interna à *linha do esqueleto*; esta é definida como o lugar geométrico dos pontos médios das espessuras medidas ponto a ponto das paredes.

Outra observação importante é relativa a uma conveniente mudança de variáveis para o cálculo da tensão de cisalhamento resultante, que no caso de paredes finas é paralela à linha do esqueleto. Nessa condição é mais conveniente exprimir essa tensão em função da coordenada  $s$ , em lugar das coordenadas  $y$  e  $z$ . Para tanto, considere-se a geometria indicada na figura 7.19 e as relações que seguem:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} \cos\theta ; \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \operatorname{sen}\theta \quad (7.31)$$

Lembrando-se que  $\tau_r^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$  e empregando-se as (7.24) resulta:

$$\tau_r = h_t \frac{M_t}{2V} \quad (7.32 a)$$

onde  $h_t = \frac{\partial h}{\partial t}$ .

Como o ângulo de inclinação da membrana resulta constante e ainda supostamente pequeno, pode-se escrever que:  $h_t = \beta = \frac{h}{t}$ . Finalmente, a expressão para o cálculo da tensão de cisalhamento resultante assume a forma:

$$\tau_r = \frac{M_t}{2V} \beta = \frac{M_t}{2A t} \quad (7.32 b)$$

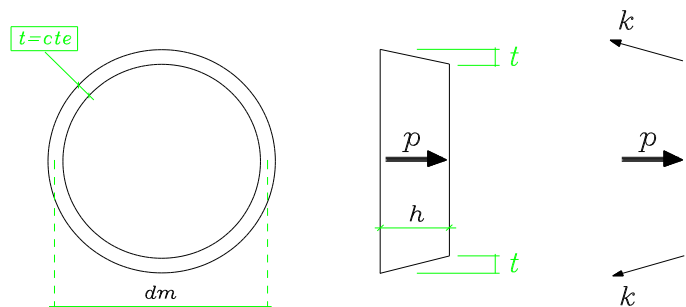
Nota-se que a tensão de cisalhamento máxima ocorre na menor espessura:

---

(\*) Pode-se mostrar que o equilíbrio na direção do plano da parte deslocada é identicamente satisfeito.

$$\tau_{máx} = \frac{M_t}{2 A t_{min}} \quad (7.32 c)$$

**Exemplo 5:** Para o caso da seção circular vazada de parede fina, ilustrada na figura 7.20, particularizar as expressões para o momento de inércia, giro por unidade de comprimento e tensão de cisalhamento.



**Figura 7.20 - Caso da seção circular vazada**

Para o momento de inércia, aplica-se a relação (7.27) sendo:

$$A = \frac{\pi d_m^2}{4} ; \quad \oint \frac{1}{t} ds = \frac{\pi d_m}{t} ;$$

$$\therefore I_t = \frac{4 \pi^2 d_m^4}{16 \frac{\pi d_m}{t}} = \frac{\pi d_m^3 t}{4}$$

Para o giro por unidade de comprimento, obtém-se:

$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{4 M_t}{G \pi d_m^3 t}$$

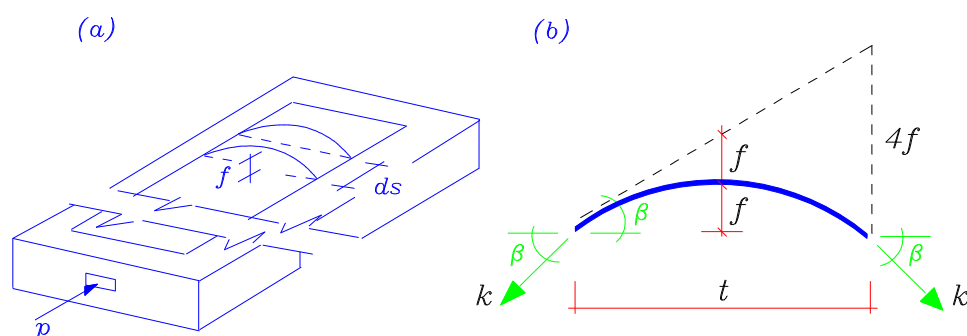
Finalmente, para a tensão de cisalhamento resulta a seguinte expressão:

$$\tau_r = \frac{M_t}{2 A t} \quad \therefore \quad \tau = \frac{2 M_t}{\pi d_m^2 t}$$

Nota-se a coincidência entre essas expressões e as (7.22) obtidas no estudo da seção circular.

### 7.8.2 Barras com seções transversais abertas e paredes finas

No caso das seções delgadas abertas admite-se que a membrana, que substitui o recorte na tampa da caixa de pressão, assume a forma de uma parábola do segundo grau ao longo da espessura, conforme indica a figura 7.21.



**Figura 7.21 - Analogia de membrana para seção delgada aberta**

Assim sendo, o volume contido pela membrana deslocada fica dado pela integral da área da parábola ao longo do comprimento  $\lambda$  da linha do esqueleto:

$$V = \int_{\lambda} \frac{2}{3} f t ds \quad (7.33)$$

onde  $f$  é a flecha da parábola (v.fig.7.21).

A condição de equilíbrio de um elemento de membrana fornece uma relação para a flecha:

$$p(t ds) = 2k ds \frac{4f}{t} \rightarrow f = \frac{pt^2}{k8} \quad (7.34)$$

Substituindo-se, então, a (7.34) na (7.33) resulta:

$$V = \frac{p}{12k} \int_{\lambda} t^3 ds \quad (7.35)$$

e o momento de inércia à torção passa a ser determinado por:

$$I_t = 4V \frac{k}{p} = \frac{I}{3} \int_{\lambda} t^3 ds \quad (7.36)$$

Quanto à tensão de cisalhamento, lembrando-se que ela é proporcional à inclinação da tangente à superfície da membrana, conclui-se que sua variação resulta linear ao longo da espessura da parede, devido à forma parabólica da membrana. Conclui-se também, em função desta análise, que a tensão de cisalhamento é nula na linha do esqueleto e máxima nas bordas da parede.

A inclinação máxima da tangente à parábola pode ser calculada a partir da geometria indicada na figura 7.21 pela seguinte relação:

$$\beta_{máx} = \frac{4f}{t} = \frac{pt}{2k} \quad (7.37)$$

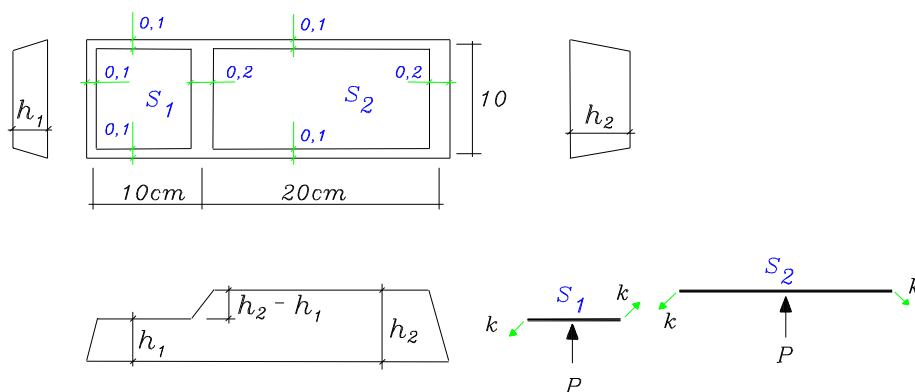
Considerando-se, ainda, a (7.35), a máxima tensão de cisalhamento pode ser calculada por:

$$\tau_{máx} = \frac{M_t}{2V} \beta_{máx} = \frac{M_t t_{máx}}{\frac{I}{3} \int_{\lambda} t^3 ds} \quad (7.38)$$

No caso da seção aberta, ao contrário da seção fechada, a maior tensão de cisalhamento ocorre na altura da maior espessura.

**Exemplo 6:** Uma seção retangular vazada composta por duas células de paredes fina como ilustra a figura 7.22, deve ser submetida à ação de um momento de torção. Determinar o valor máximo do momento aplicado admitindo-se que o material da seção resista a uma tensão de cisalhamento (em módulo) de 10 kN/cm<sup>2</sup>:





**Figura 7.22- Caso de seção celular**

Pela analogia de membrana, imagina-se que a tampa da caixa de pressão tenha um recorte, preenchido por uma membrana, com a forma geométrica da seção. Em pressão, cada uma das partes da tampa correspondentes às células da seção irá se deslocar paralelamente ao nível da tampa, porém com alturas diferentes entre si (v.fig.7.22).

As alturas deslocadas podem ser determinadas impondo-se o equilíbrio de cada uma das partes. Com o auxílio, então, dos diagramas de corpo livre representados na figura 7.22, e lembrando-se que o ângulo de inclinação da membrana confunde-se com a sua tangente ( $\beta = h/t$ ) resultam as seguintes equações de equilíbrio das forças na direção da pressão:

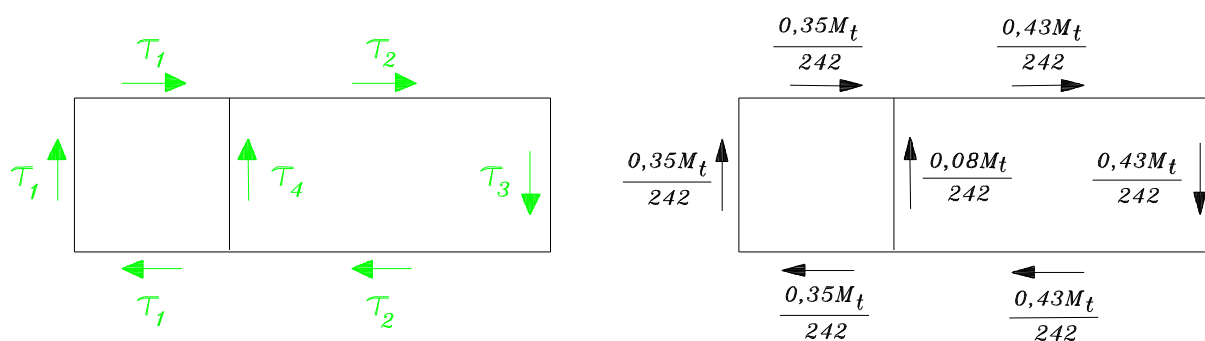
$$p S_1 = k \left[ \frac{h_1}{0,1} \cdot 30 - \frac{h_2 - h_1}{0,20} \cdot 10 \right]$$

$$p S_2 = k \left[ \frac{h_2}{0,1} \cdot 40 + \frac{h_2}{0,20} \cdot 10 + \frac{h_2 - h_1}{0,20} \cdot 10 \right]$$

Como  $S_1$  e  $S_2$  são conhecidos (são as áreas internas às linhas do esqueleto), resolvendo-se o sistema obtém-se  $h_1 = 0,35 p/k$  e  $h_2 = 0,43 p/k$ .

Consequentemente, o volume contido nas partes deslocadas resulta:

$$V = S_1 h_1 + S_2 h_2 \quad \therefore \quad V = 121 p/k$$



**Figura 7.23- Distribuição de tensões de cisalhamento**

Um dado adicional que se obtém de imediato é o momento de inércia à torção:

$$I_t = 4 \left( \frac{k}{p} \right) V = 484 \text{ cm}^4$$

As tensões de cisalhamento são diretamente proporcionais às alturas deslocadas e inversamente proporcionais às espessuras:  $\tau = \frac{M_t h}{2V t}$ . Neste caso foram obtidas duas alturas diferentes, porém como existem também diferentes espessuras, são quatro os valores de tensão de cisalhamento que ocorrem:

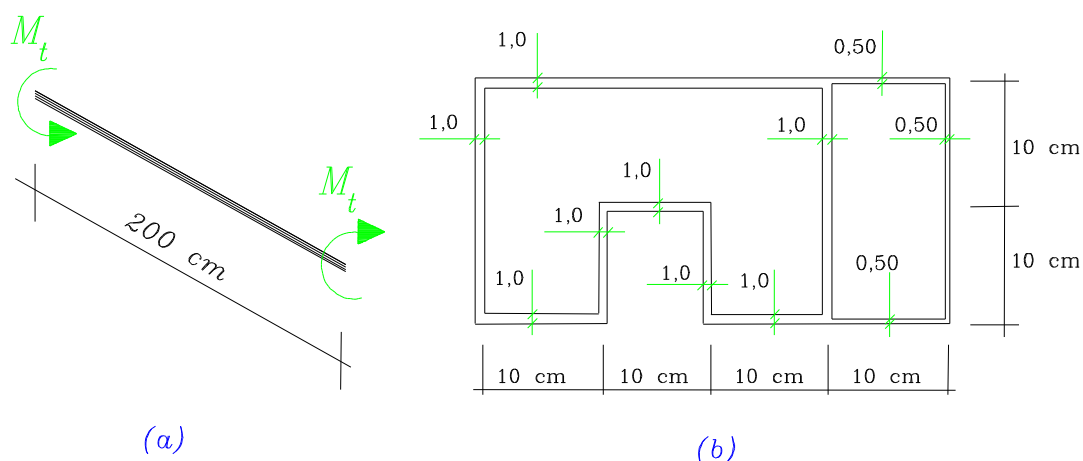
$$\tau_1 = \frac{M_t}{242 \frac{p}{K}} \left( 3,5 \frac{p}{K} \right) = \frac{3,5 M_t}{242}; \quad \tau_2 = \frac{4,3 M_t}{242}; \quad \tau_3 = \frac{2,15 M_t}{242}; \quad \tau_4 = \frac{0,4 M_t}{242}$$

Impondo-se o limite para a maior tensão de cisalhamento, obtém-se o valor procurado para o momento de torção:

$$\therefore (4,3 M_t) / 242 \leq 10 \rightarrow M_t = 562,79 \text{ kN.cm}$$

Na figura 7.23 ilustram-se também as tensões de cisalhamento cujos sentidos dependem de sinais a serem identificados para as inclinações em relação a eixos de referência contidos no plano da seção.

**Exemplo 7:** Para a barra com seção celular ilustrada na figura 7.24, determinar o valor do momento de torção admissível de modo que o  $\tau_{\text{máx}}$  não ultrapasse o valor de  $8 \text{ kN/cm}^2$ . Com o valor do momento de torção obtido e adotando-se  $G=8000 \text{ kN/cm}^2$ , determinar o giro relativo entre as seções das extremidades.



**Figura 7.24 - Barra com seção celular**

**a-) Determinação do volume  $V$**

$$p A_1 = p(500) = k \left[ \frac{h_1}{l}(100) + \frac{h_1 - h_2}{l}(20) \right]$$

$$p A_2 = p(200) = k \left[ -\frac{h_1 - h_2}{l}(20) + \frac{h_2}{0,5}(40) \right]$$

$$\frac{p}{k}(500) = 120h_1 - 20h_2 \quad ; \quad \frac{p}{k}(200) = -20h_1 + 100h_2$$

Resolvendo-se o sistema, os valores das alturas  $h_1$  e  $h_2$  resultam:

$$h_1 = \frac{2700 p}{580 k} \quad ; \quad h_2 = \frac{1700 p}{580 k}$$

Assim sendo, o volume total contido pela membrana deslocada fica dado por:

$$V = A_1 h_1 + A_2 h_2 = 2913,8 \frac{p}{k} \text{ (cm}^3\text{)}$$

**b-) Determinação do momento de torção  $M_t$**

$$\beta_{\max} = \left(\frac{h}{t}\right)_{\max} = \frac{h_2}{0,5} = \frac{3400}{580} \frac{p}{k}$$

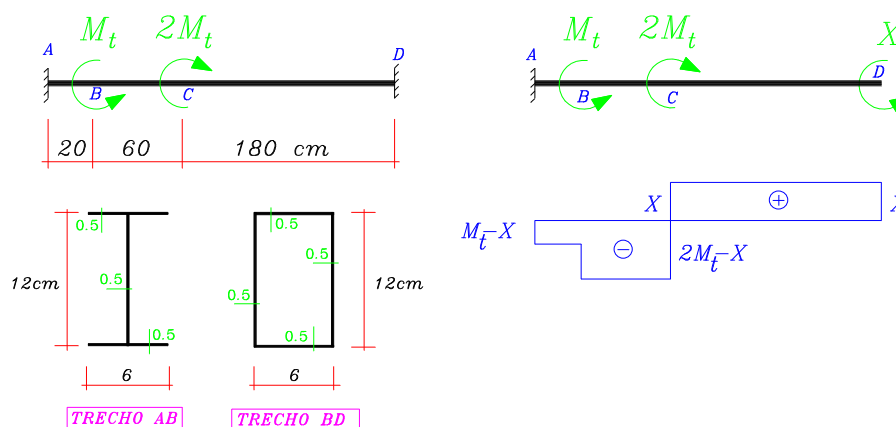
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2V} \beta_{\max} \leq 8 \rightarrow M_t = \frac{16 \cdot (2913,8 \frac{p}{k})}{\frac{3400}{580} \frac{p}{k}} = 7953 \text{ kN.cm}$$

**c-) Determinação do giro relativo entre A e B**

$$I_t = 4V \frac{k}{p} = 4 \cdot 2913,8 = 11655 \text{ cm}^4$$

$$\theta(L) = \frac{M_t}{GI_t} L = \frac{7953 \cdot 200}{8000 \cdot 11655} = \frac{136,5}{8000} = 0,017 \text{ rad}$$

**Exemplo 8:** A viga biengastada, ilustrada na figura 7.25, é composta de seções transversais com geometrias diferentes nos trechos A-B e B-D. Para a viga em questão, determinar o valor do momento de torção máximo, de modo que a tensão de cisalhamento não ultrapasse  $8 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 7.25 - Barra com seções de paredes finas**

Do diagrama de  $M_t$  para a estrutura geometricamente determinada (figura 7.25), escreve-se a condição de compatibilidade na seguinte forma:

$$-\frac{(M_t - X)20}{GI_{t1}} - \frac{(2M_t - X)60}{GI_{t2}} + \frac{(X)180}{GI_{t2}} = 0$$

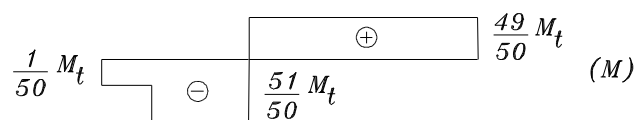
onde:

$$I_{t1} = \frac{1}{3} \sum_i t_i^3 h_i = \frac{(0,50)^3}{3} \cdot (24) = 1 \text{ cm}^4$$

$$I_{t2} = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot (6 \cdot 12)^2}{36} \cdot 0,50 = 288 \text{ cm}^4$$

Portanto:

$$X \left[ 1 + \frac{3}{288} + \frac{9}{288} \right] = M_t \left[ 1 + \frac{6}{288} \right] \rightarrow X = \frac{49}{50} M_t$$



**Figura 7.26 - Diagrama de momentos de torção**

Em função das tensões de cisalhamento máximas nos trechos A-B e B-D, resultam:

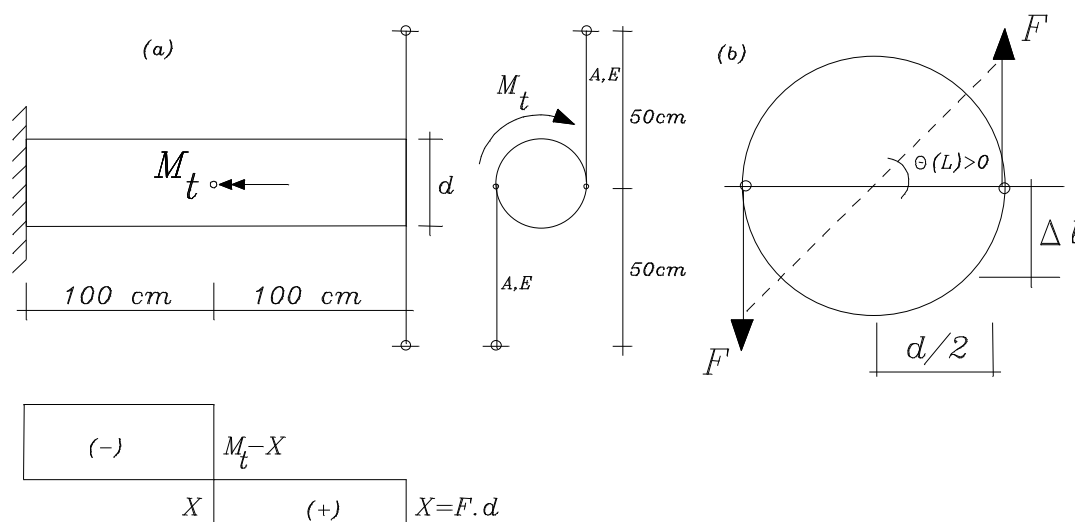
. No trecho A-B

$$\tau = \frac{M_t}{I_{t1}} t_{máx} = \frac{1}{50} \frac{M_t}{I} (0,50) \leq 8 \rightarrow M_t \leq 800 \text{ kNcm}$$

. No trecho B-D

$$\tau = \frac{M_t}{2 A t_{min}} = \frac{\frac{51}{50} M_t}{2(6 \cdot 12)0,50} \leq 8 \rightarrow M_t \leq 564,70 \text{ kNcm}$$

**Exemplo 9:** Uma viga de seção transversal circular está engastada na extremidade esquerda e vinculada através de barras na extremidade direita, como ilustrado na figura 7.27. Determinar o momento de torção máximo que pode ser aplicado, considerando-se os seguintes dados:  $E=20000 \text{ kN/cm}^2$ ;  $A=4 \text{ cm}^2$ ;  $d=8 \text{ cm}$ ;  $\sigma_{m\acute{a}x}=12 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\tau_{m\acute{a}x}=8 \text{ kN/cm}^2$ ;  $G=8000 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 7.27 - Eixo vinculado por barras numa das extremidades**

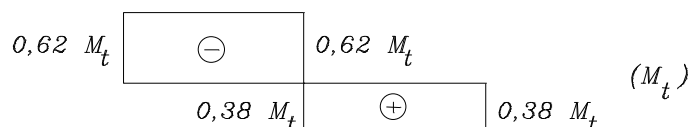
Utilizando-se o diagrama de torção ilustrado na figura 7.27, o giro na extremidade liberada fica expresso por:

$$\begin{aligned} \theta(L) &= -\frac{32(M_t - X)100}{\pi G d^4} + \frac{32(X)100}{\pi G d^4} \\ &= -\frac{32(M_t - F \cdot 8)100}{\pi 8000 \cdot 8^4} + \frac{32(F \cdot 8)100}{\pi 8000 \cdot 8^4} \end{aligned}$$

Como o giro positivo implica em encurtamento das barras, v.fig.7.27, a compatibilidade escreve-se na forma:

$$\theta \cdot \left(\frac{d}{2}\right) = -\Delta L = -\frac{F \cdot 50}{20000 \cdot 4} \rightarrow -M_t + 16F = -5,026F$$

$$\therefore F = 0,0475 M_t \rightarrow X = 0,38 M_t$$



**Figura 7.28 - Diagrama final de momentos de torção**

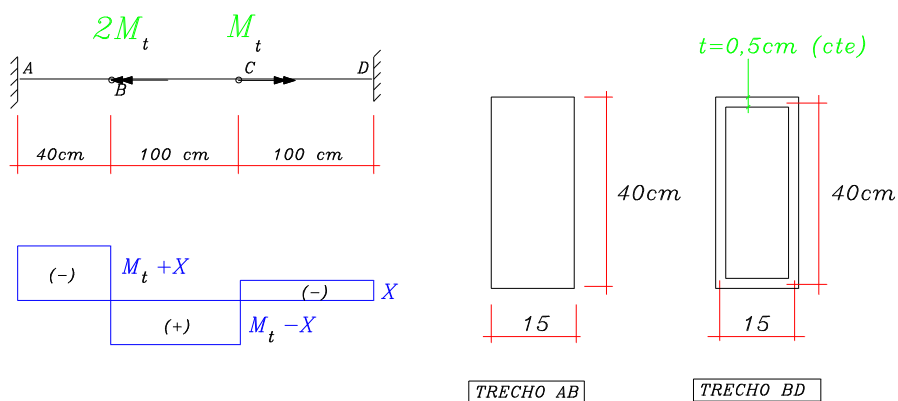
Com base na relação  $F=0,0475 M_t$ , e impondo-se as tensões limites resultam:

$$\bar{F} \leq \sigma_{m\acute{a}x} \cdot A = 12 \cdot 4 = 48 \text{ kN} \rightarrow M_t \leq \frac{48}{0,0475} \approx 1000 \text{ kN.cm}$$

$$\tau = \frac{16(0,62 M_t)}{\pi 8^3} \leq 8 \rightarrow M_t \leq \frac{\pi 8^4}{16 \cdot 0,62} = 1297,20 \text{ kN.cm}$$

$$\therefore \bar{M}_t = 1000 \text{ kN.cm}$$

**Exemplo 10:** Uma barra biengastada apresenta um primeiro trecho com seção transversal cheia e um segundo com seção transversal vazada de parede fina, estando submetida a dois momentos de torção, como ilustrado na figura 7.29. Determinar o momento admissível para a barra em questão, sabendo-se que  $\tau_{m\acute{a}x} = 10 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 7.29 - Barra com seções diferentes por trechos**

Um primeiro dado geométrico de interesse, a determinar para cada uma das seções, é o momento de inércia à torção. Para a seção vazada, pela analogia de membrana, determinam-se, sucessivamente,  $h$ ,  $V$  e  $I_t$ :

$$600p = k \left( \frac{h}{0,50} 110 \right) \rightarrow h = \frac{600}{220} \frac{p}{k}$$

$$V = A \cdot h = 1636,36 \frac{p}{k} \rightarrow I_t = \frac{4 V k}{p} = 6545,45 \text{ cm}^4$$

Para a seção retangular cheia, a analogia de membrana fornece as seguintes relações:

$$I_t = 4 \left( \frac{k}{p} \right) V; \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{2V} h_{\text{máx}} = \frac{M_t}{W_t}$$

Os valores de  $I_t$  e de  $W_t$  são fornecidos por tabelas em função da relação  $n = b/h$ , que no caso vale  $n = 0,375$ . Por interpolação dos valores tabelados resultam:

$$I_t = j b^3 h = 0,25425 \cdot 15^3 \cdot 40 = 34323,75 \text{ cm}^4$$

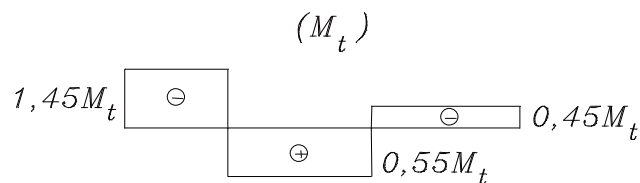
$$W_t = w b^2 h = 0,26175 \cdot 15^2 \cdot 40 = 2355,75 \text{ cm}^3$$

Calculando-se, então, o momento hiperestático, impondo-se como condição de compatibilidade o giro nulo na seção liberada, obtém-se:

$$-\frac{100X}{G \cdot 6545,45} + \frac{100(M_t - X)}{G \cdot 6545,45} - \frac{40(M_t + X)}{G \cdot 34323,75} = 0$$

$$\therefore X = 0,45 M_t$$





**Figura 7.30 - Diagrama final de  $M_t$**

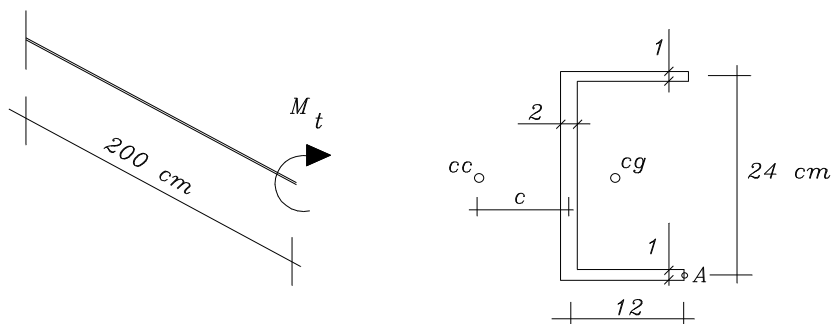
Finalmente, com base no diagrama de momentos de torção, determinam-se:

$$\tau_{cheia} = \frac{1,45 M_t}{2355,75} \leq 10 \rightarrow M_t \leq 16246,55 \text{ kN.cm}$$

$$\tau_{vaz} = \frac{0,55 M_t}{3272,72 \frac{p}{k}} \left( \frac{1200 p}{200 k} \right) \leq 10 \rightarrow M_t \leq 10910 \text{ kN.cm}$$

$$\therefore \tau_{m\acute{a}x} = 10910 \text{ kN/cm}^2$$

**Exemplo 11:** Uma viga em balanço com seção delgada transversal aberta está submetida a um momento de torção na extremidade livre, como ilustrado na figura 7.31. Determinar o momento admissível e o deslocamento vertical do ponto A, sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível é de  $10 \text{ kN/cm}^2$  e  $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 7.31 - Seção aberta de paredes finas**

Para a determinação do momento de torção admissível, um primeiro dado de interesse é o momento de inércia:

$$I_t = \frac{1}{3} \int t^3 ds = \frac{1}{3} \sum t_i^3 h_i = \frac{1}{3} (24 + 8 \cdot 24) = 72 \text{ cm}^2$$

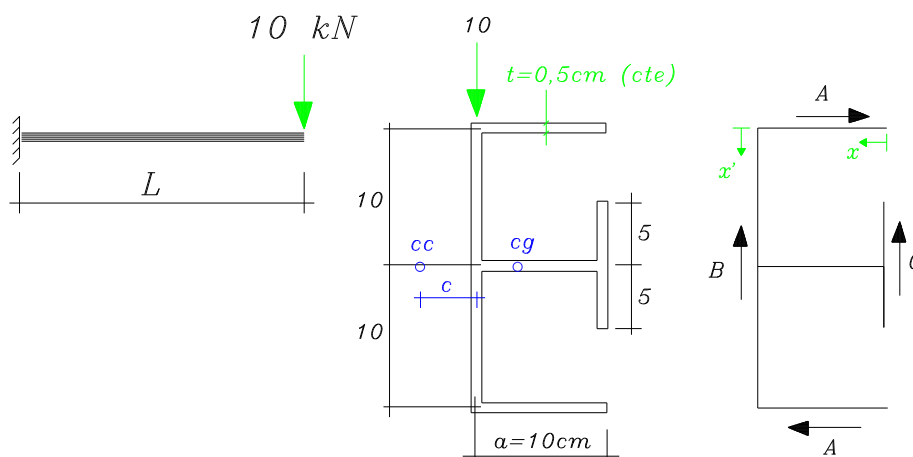
$$\therefore \frac{M_t}{I_t} t_{\text{máx}} \leq 10 \rightarrow \overline{M}_t = \frac{720}{2} = 360 \text{ kN.cm}$$

O deslocamento vertical do ponto A é obtido em função do giro da seção da extremidade livre em relação ao centro de torção. Para giros pequenos, esse deslocamento pode ser calculado pelo produto do giro pela coordenada horizontal do ponto em relação ao centro de torção:

$$\theta(200) = \frac{360 \cdot 200}{8000 \cdot 72} = 0,125 \text{ rd}$$

$$\therefore v_A = \theta \cdot (c + 12)$$

**Exemplo 12:** Determinar a tensão de cisalhamento máxima devida à torção provocada por uma carga concentrada de 10 kN aplicada na extremidade livre de uma viga em balanço com seção transversal delgada aberta, submetida como ilustrado na figura 7.32.



**Figura 7.32 - Viga em balanço**

Para estimar a torção aplicada pelo carregamento, deve-se determinar a posição do centro de torção.

Um dado geométrico de interesse é a inércia à flexão da seção transversal com relação ao eixo de simetria:

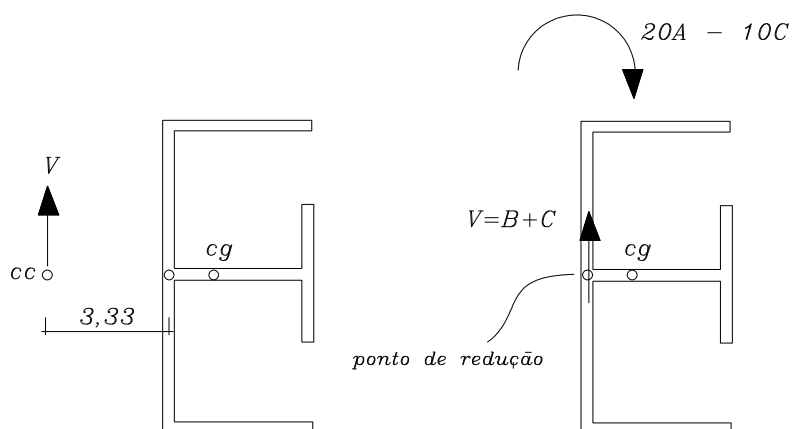
$$I = t \left( \frac{20^3}{12} + \frac{10^3}{12} + 2 \cdot 10^3 \right) = 1375 \text{ cm}^4$$

Em cada parte da seção, as forças resultantes dos fluxos de tensão de cisalhamento adotados valem:

$$A = 250 \frac{V}{I} ; B = 1333,33 \frac{V}{I} ; C = 41,67 \frac{V}{I}$$

O centro de torção coincide com o ponto onde passa a resultante vertical do fluxo. Para encontrá-lo, escolhe-se um ponto de redução das forças, no caso, sobre o eixo de simetria, deslocando-o, posteriormente, de modo a eliminar o momento (v.fig.7.33). Desse modo, a relação que permite determinar a posição do centro de torção resulta:

$$(B+C) \cdot c = 20 \cdot A - 10 \cdot c \quad \therefore c = 3,33 \text{ cm}$$



**Figura 7.33 - Posição do centro de torção**

A tensão de cisalhamento máxima pode ser determinada, neste caso de seção delgada aberta, por:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{I_t} t_{\text{máx}}$$

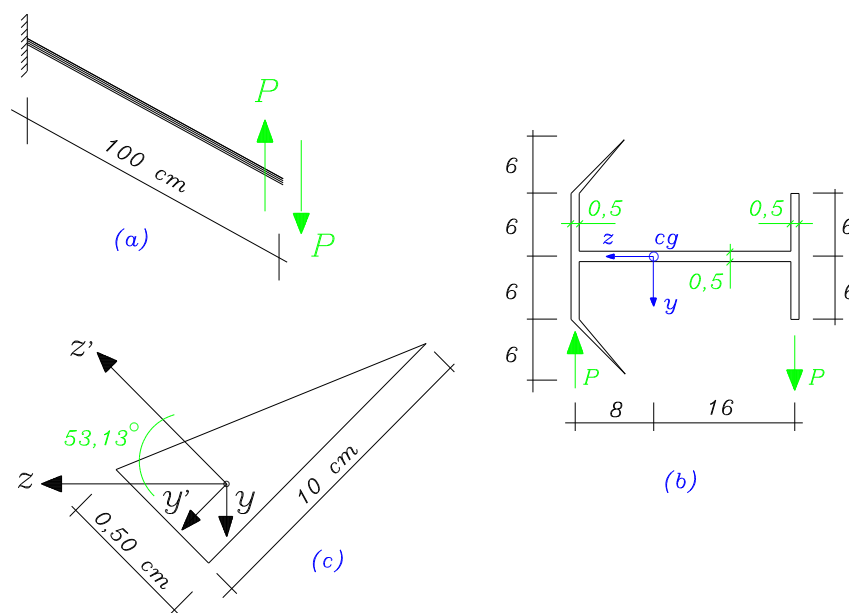
Neste caso, o momento e a inércia à torção resultam, respectivamente:

$$M_t = P \cdot c = 33,33 \text{ kNcm} ; I_t = \frac{1}{3} t^3 6a = 2,50 \text{ cm}^4$$

de onde se conclui que:

$$\tau_{\text{máx}} = 6,66 \text{ kN/cm}^2$$

**Exemplo 13:** Uma viga em balanço está sujeita a um binário de valor  $24P$  aplicado na sua extremidade livre, como mostra a figura 7.34a. Sendo  $\tau_{\text{máx}} = 8 \text{ kN/cm}^2$  e  $G = 7.000 \text{ kN/cm}^2$ , determinar o valor admissível da carga  $P$  e, para esta mesma carga, o deslocamento vertical do ponto A, posicionado na seção da extremidade livre.



**Figura 7.34 - Seção delgada aberta com parede de espessura variável**

Uma primeira propriedade geométrica a determinar é o momento de inércia à flexão da seção segundo o eixo de simetria da seção. Com base na figura 7.34c, a contribuição da aba triangular fica expressa por:

$$I_z = I_z \cos^2(53,13^\circ) + I_y \cdot \sin^2(53,13^\circ) + 0 = 5,0 \text{ cm}^4$$

sendo,

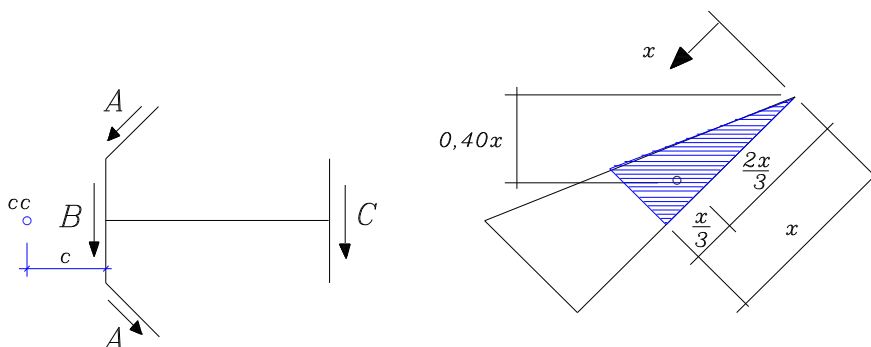
$$I_z = \frac{bh^3}{36} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{36} = 13,89 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{bh^3}{48} = \frac{10 \cdot 0,5^3}{48} = 0 \quad ; \quad I_{xy} = 0$$

Assim, o momento de inércia de toda a seção resulta:

$$I_z = \left[ 5,0 + \frac{0,5 \cdot 10}{2} 8^2 \right] \cdot 2 + \left( \frac{0,5 \cdot 12^3}{12} \right) \cdot 2 = 330 + 144 = 474 \text{ cm}^4$$

Para a determinação da posição do centro de cisalhamento, deve-se tomar cuidado no cálculo da resultante do fluxo de cisalhamento nas abas inclinadas, que têm espessuras variáveis:



**Figura 7.35 - Resultante dos fluxos de cisalhamento e aba inclinada com espessura variável**

Com o auxílio da figura 7.35, o momento estático da aba inclinada, em relação ao eixo de simetria da seção, resulta:

$$M_s = A \cdot d \quad ; \quad \text{com} : t = 0,05x \quad ; \quad A = \frac{tx}{2} = 0,025x^2 \quad ; \quad d = 12 - 0,40x$$

Nessas condições resultam:

$$A = \frac{V}{I} \int_0^{10} \frac{M_s t}{t} dx = \frac{V}{I} \int_0^{10} 0,025x^2(12 - 0,40x) dx = 75 \frac{V}{I}$$

$$B = \frac{V}{I} \int_0^{12} [20 + 0,5(6 - \frac{x}{2})x] dx = \frac{V}{I} \int_0^{12} (20 + 3x - \frac{x^2}{4}) dx = 312 \frac{V}{I}$$

$$C = \frac{V}{I} \int_0^{12} [0,5(6 - \frac{x}{2})x] dx = \frac{V}{I} \int_0^{12} (3x - \frac{x^2}{4}) dx = 72 \frac{V}{I}$$

A posição do centro de torção resulta do seguinte equacionamento, tomando-se um ponto de redução sobre o eixo de simetria, conforme indica a figura 7.35:

$$Bc + 2A \operatorname{sen}(36,87^\circ)c + C(24 + c) - 12A \operatorname{cos}(36,87^\circ) = 0$$

$$312 \frac{V}{I} c + 90 \frac{V}{I} c + 1728 \frac{V}{I} + 72 \frac{V}{I} c + 720 \frac{V}{I} = 0$$

$$c = -\frac{1008}{474} = -2,13 \text{ cm}$$

A determinação da carga admissível segue de:

$$I_t = \frac{1}{3} \int t^3 ds = \frac{1}{3} \left[ \left( \int_0^{10} (0,05x)^3 dx \right) 2 + 48(0,50)^3 \right] = 2,21 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} t_{\max} = \frac{\bar{P} \cdot 24}{2,21} \cdot (0,50) \leq 8 \quad \rightarrow \quad \bar{P} = \frac{8 \cdot 2,21}{12} = 1,47 \text{ kN}$$

E para o deslocamento vertical do ponto A, obtêm-se:

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t} = 2 \cdot 10^{-3} \quad \rightarrow \quad \theta(100) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,20 \text{ rd}$$

$$\therefore v_A = \theta(100) \cdot (24 - 2,13) = 4,37 \text{ cm}$$

## 8 ESTUDO DAS TENSÕES

### 8.1 O estado de tensão num ponto

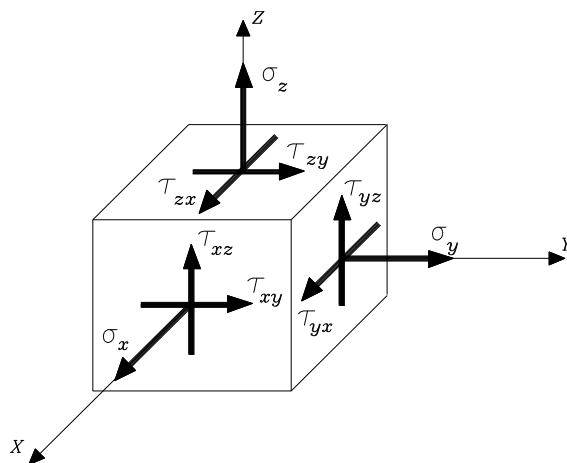
O conceito de tensão num ponto foi apresentado no primeiro capítulo destas notas e, desde então, vem sendo aplicado nos estudos particulares das barras submetidas à força normal, flexão e torção.

Naqueles casos, mostrou-se como determinar as componentes de tensão, normal e de cisalhamento, em relação a um plano particular que passa pelo ponto: o plano da seção transversal. Mostrou-se ainda que a distribuição das tensões normais na seção é tal que sua resultante pode gerar uma força normal e/ou um momento de flexão; já a resultante das tensões de cisalhamento pode gerar uma força cortante e/ou um momento de torção. Esses esforços resultantes devem equilibrar os esforços correspondentes devidos ao carregamento externo aplicado.

Neste capítulo, retoma-se a análise das tensões numa forma mais geral, objetivando-se determinar os valores das componentes segundo planos quaisquer que passam pelo ponto. Decorre dessa análise a identificação das intensidades máximas para as componentes e dos planos onde elas ocorrem. Tal estudo tem importância para se postular critérios que impõem limites admissíveis para estados de tensão, em função das características de resistência de diferentes materiais que podem constituir os elementos estruturais.

Assim sendo, com o objetivo de caracterizar completamente o estado de tensão, o que implica em se poder determinar, segundo um plano qualquer, os valores das componentes normal e de cisalhamento do vetor de tensão, considere-se, inicialmente, entre todos os planos possíveis que passem num ponto, três que são paralelos aos planos coordenados (definidos pelos pares de eixos do sistema de referência triortogonal escolhido). Admita-se que as componentes de tensão segundo cada um dos planos sejam conhecidas.

Para facilitar a representação de todas elas numa mesma figura, confunde-se o ponto com um cubo de dimensões elementares cujas faces são paralelas aos planos coordenados (v.fig.8.1).



**Figura 8.1 - Componentes de tensão num ponto segundo planos coordenados**

Nas três faces que podem ser visualizadas diretamente naquela figura, estão indicadas, com seus sentidos positivos, as componentes de tensão normal e de cisalhamento, indexadas de acordo com a convenção descrita no primeiro capítulo e aqui repetida, por conveniência.

Assim, por exemplo, na face paralela ao plano definido pelos eixos z e y estão as tensões  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{xy}$ ; todas elas possuem um primeiro índice x porque a normal ao plano é paralela ao eixo x.

Por convenção, as tensões normais são positivas quando de tração sobre a face onde atuam. Já o *sentido positivo* para as componentes de cisalhamento é definido em função da coincidência ou não do sentido da tensão normal positiva com o do eixo coordenado a ela paralelo. Por exemplo, se o sentido da tensão normal de tração a um plano coincidir com o sentido do eixo correspondente, as componentes de cisalhamento positivas naquele plano deverão também coincidir com os sentidos dos eixos que lhes correspondem. Ao contrário, se o sentido da tensão normal positiva for oposto ao do eixo a ela paralelo, as

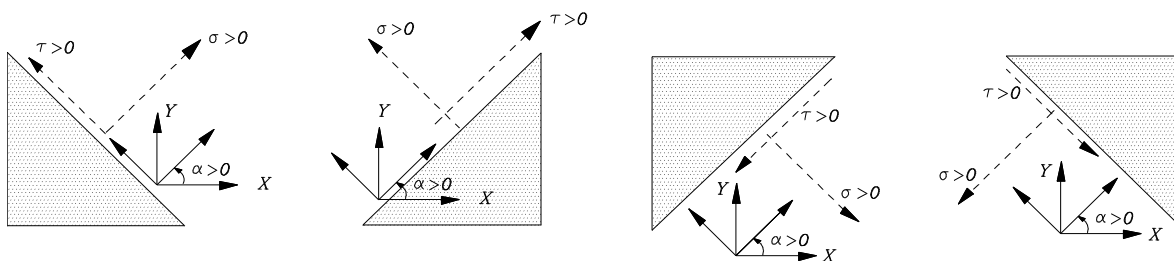


tensões de cisalhamento positivas também deverão ter sentidos discordantes dos respectivos eixos de referência. Na figura 8.1, esta última situação ocorre quando se procura representar as componentes de tensão segundo as faces paralelas às faces visíveis do cubo elementar.

Aliás, é importante observar que nas outras três faces não visualizadas na figura 8.1 existem componentes de tensão iguais àquelas mostradas nos planos visíveis. Além disso, aplicando-se a convenção de sinais, conclui-se que os sentidos positivos nas faces ocultas são exatamente contrários aos sentidos positivos das faces visíveis a elas paralelas. Isto é bastante razoável uma vez que se tratam de visualizações das componentes de tensão segundo pontos de vista situados em lados opostos de um mesmo plano de referência que passa pelo ponto.

Desse modo, numa mesma figura obtém-se uma representação perfeitamente compatível com os efeitos de ação e reação das partes do corpo através de um ponto, observando-se ora um lado ora outro lado do plano.

Observação importante: em planos com inclinação qualquer em relação aos planos coordenados, para a determinação dos sentidos positivos para as componentes de tensão, inicialmente impõe-se um giro anti-horário (positivo) aos eixos coordenados até que suas direções coincidam com as direções normal e tangencial ao plano inclinado; com relação à nova posição dos eixos aplica-se, então, a regra anterior.



Tendo-se em vista, portanto, os planos coordenados adotados resultam nove componentes de tensão:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ . Em termos de notação, é usual reuni-las numa representação matricial:

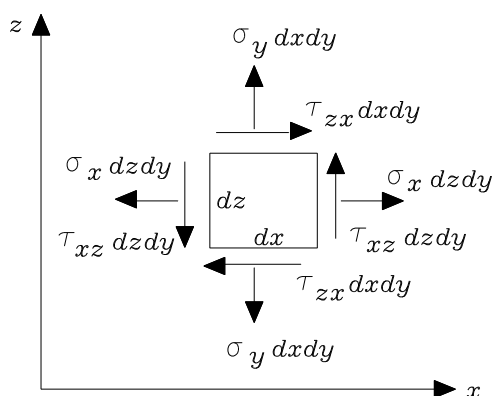
$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

É possível provar, por imposição do equilíbrio das resultantes de tensões que atuam nas faces de um elemento do corpo, que as componentes de cisalhamento de mesmos índices são iguais, ou seja:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (8.2a,b,c)$$

e, portanto, a matriz  $T$  resulta simétrica.

De fato, sem perda de generalidade considere-se que o sólido esteja submetido a um estado homogêneo (as forças de interação entre as partes do corpo não variam de ponto para ponto). A figura 8.2 representa a projeção do estado de tensão indicado na figura 8.1 sobre o plano z-x, sendo que nos lados do quadrado obtido representam-se as forças resultantes das tensões atuantes.



**Figura 8.2 - Componentes de tensão no plano z-x**

Impondo-se a nulidade dos momentos das forças com relação a um ponto qualquer do plano resulta:

$$\tau_{zx} dx dy dz - \tau_{xz} dz dy dx = 0 \quad (8.3)$$

ou  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  .

Um procedimento análogo pode ser empregado para provar as outras duas igualdades, tomando-se projeções sobre os outros planos coordenados.

As componentes de tensão até agora descritas tem como referência os três planos coordenados ortogonais que passam pelo ponto. De um modo geral, no mesmo ponto, com relação a outro conjunto de planos ortogonais, as componentes de tensão apresentam outros valores.

Nesse sentido, um aspecto importante a ser observado é que em decorrência da hipótese de continuidade do meio, deve resultar contínua a variação das componentes de tensão num ponto em função da inclinação do plano considerado.

Na verdade, como se mostrará em seguida, as componentes de tensão variam segundo uma regra bem definida de transformação de coordenadas, o que matematicamente acaba por conferir à matriz  $T$  o caráter de representação de um tensor de segunda ordem; por esse motivo,  $T$  é também denominado tensor de tensão.

Além disso, também se mostrará mais adiante que é suficiente conhecer as componentes de tensão segundo três planos ortogonais para se determinar as componentes segundo outro plano de inclinação qualquer com relação aos primeiros; diz-se, então, que as componentes de  $T$  definem o estado de tensão no ponto.

Por outro lado, tendo-se em vista a continuidade na variação das tensões de acordo com o plano considerado no ponto, é natural imaginar que exista um determinado plano com relação ao qual a componente de tensão normal, por exemplo, tenha um valor extremo (máximo ou mínimo) quando confrontada com todas as outras componentes normais aos outros planos; a mesma ideia vale para as componentes de cisalhamento.

A busca de resposta a este tipo de questionamento

considerando-se diretamente o caso tridimensional, apesar de sua generalidade, penaliza em demasia o lado didático. Felizmente esse estudo pode ser desenvolvido, em seus aspectos essenciais, considerando-se um estado simples de tensão ou mesmo uma análise plana. Além disso, tal consideração se justifica não somente pela simplificação que proporciona, mas também porque é compatível com diversas situações da prática.

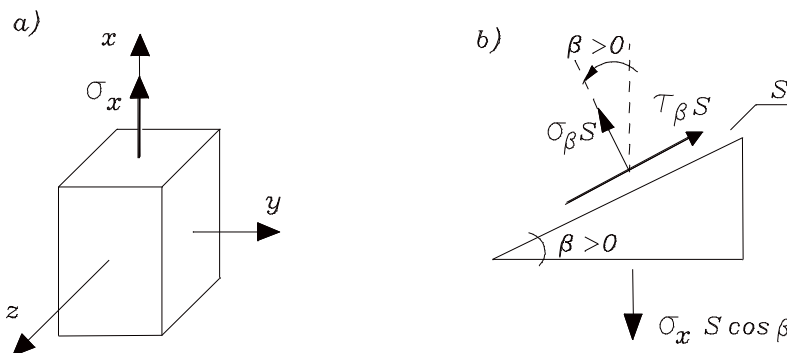
## 8.2 Estado simples de tensão

O caso já estudado de uma barra submetida nas suas extremidades a uma força de tração ou de compressão centrada, sendo desconsideradas forças de natureza volumétrica associadas ao seu peso próprio, configura, em primeiro lugar, o que se denomina por *estado homogêneo*, uma vez que todos os pontos da barra apresentam um mesmo estado de tensão.

Em segundo lugar, adotando-se um referencial com origem numa das extremidades da barra e com eixo  $x$  coincidente com o eixo longitudinal, com faces paralelas aos planos coordenados, um cubo elementar apresenta somente uma componente de tensão não-nula, conforme ilustra a figura 8.3a), o que configura um estado simples de tensão. Por esse motivo, com relação ao sistema de referência adotado, o tensor  $T$  assume a seguinte representação:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Para o estudo da variação das componentes de tensão com o plano de corte, pode-se tomar partido da homogeneidade do estado de tensão ao longo da barra e considerar o equilíbrio de uma sua porção de volume finito, como se indica na figura 8.3b).



**Figura 8.3 - a) Estado simples de tensão;  
b) Componentes de tensão segundo um plano inclinado  
em relação ao eixo da barra**

Do equilíbrio de forças nas direções das componentes  $\sigma_\beta$  e  $\tau_\beta$ , que atuam num plano cuja normal é inclinada de um ângulo  $\beta$  com relação ao eixo  $x^{(*)}$ , resultam:

$$\sigma_\beta S = [\sigma_x (S \cos \beta)] \cos \beta \rightarrow \sigma_\beta = \sigma_x \cos^2 \beta \quad (8.5a)$$

$$\tau_\beta S = [\sigma_x (S \cos \beta)] \sin \beta \rightarrow \tau_\beta = \sigma_x \sin \beta \cos \beta \quad (8.5b)$$

Nota-se que para  $\beta$  positivo, segundo a convenção descrita um  $\tau_\beta$  positivo deve ser marcado em sentido horário sobre o elemento, conforme mostra a figura 8.3b.

As relações anteriores mostram que é possível determinar as componentes de tensão segundo um plano qualquer, conhecendo-se a componente  $\sigma_x$  e o ângulo entre a normal ao plano inclinado e o eixo  $x$  (ou com a direção da normal ao plano onde atua  $\sigma_x$ ).

Existem planos particulares segundo os quais a tensão normal  $\sigma_\beta$  assume valores extremos, máximo ou mínimo. Tais planos podem ser determinados pela condição de primeira variação nula de  $\sigma_\beta$  com relação a  $\beta$ :

<sup>(\*)</sup>  $\beta$  é positivo quando marcado no sentido anti-horário do eixo para a normal.

$$\frac{d\sigma_{\beta}}{d\beta} = -2\sigma_x \operatorname{sen}\beta \cos\beta = 0 \quad (8.6)$$

A condição explicitada pela (8.6) é atendida para  $\beta = 0, \pi/2, \pi, -\pi/2$ .

Observa-se ainda que nos planos aonde a tensão normal atinge valores extremos as componentes de cisalhamento são nulas, pois em vista da (8.5b):

$$\frac{d\tau_{\beta}}{d\beta} = -2\tau_{\beta} = 0 \quad (8.7)$$

Passando ao cálculo dos valores extremos de  $\sigma_{\beta}$ , com  $\beta = \pm\pi/2$  resulta  $\sigma_{(\pm\pi/2)} = 0$ ; já com  $\beta = 0$  ou  $\beta = \pi$  obtém-se  $\sigma_{(\pm\pi)} = \sigma_x$ .

No caso em estudo, sendo  $\sigma_x$  uma tensão normal de tração, ela é positiva por convenção, então:  $\sigma_{(\pm\pi)} = \sigma_{max}$  e  $\sigma_{(\pm\pi/2)} = \sigma_{min}$ . Os planos onde atuam  $\sigma_{máx}$  e de  $\sigma_{min}$  são ditos planos principais e são ortogonais entre si.

Por outro lado, a busca de valores extremos para  $\tau_{\beta}$  e dos correspondentes planos principais de cisalhamento, realiza-se de modo análogo:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{\beta}}{d\beta} &= \sigma_x \cos^2 \beta - \sigma_x \operatorname{sen}^2 \beta \\ &= \sigma_x (\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta) = 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

A condição anterior pode ser atendida para  $\beta = \pm\pi/4$ . Assim, os planos de cisalhamento máximo e mínimo também são ortogonais entre si e fazem  $45^\circ$  com os planos principais de tensão normal.

Substituindo-se os valores particulares de  $\beta$  que atendem a (8.8), determinam-se os seguintes valores extremos:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad ; \quad \tau_{\min} = -\frac{\sigma_x}{2} \quad (8.9a,b)$$

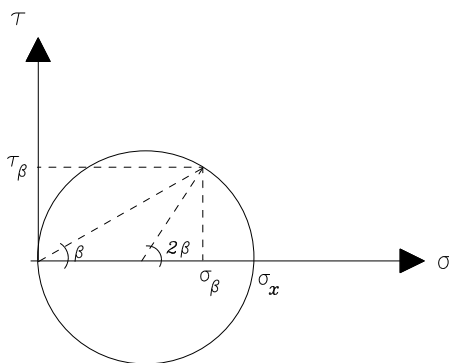
É importante observar que nos planos principais de cisalhamento as tensões normais não são nulas, mas valem:

$$\sigma_{(\pi/4)} = \frac{\sigma_x}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{(-\pi/4)} = \frac{\sigma_x}{2}.$$

Todos os resultados obtidos podem ser reproduzidos a partir de uma representação gráfica. Nesse sentido, explorando-se a relação trigonométrica:  $\cos^2 \beta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta)$ , as expressões de  $\sigma_\beta$  e  $\tau_\beta$  passam a ser escritas nas formas:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\beta) \\ \tau_\beta &= \frac{\sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\beta \end{aligned} \quad (8.10a,b)$$

As relações anteriores admitem uma interpretação geométrica num sistema de eixos  $\sigma - \tau$ . Nesse sistema os pares  $(\sigma_\beta, \tau_\beta)$  definem uma circunferência com centro no ponto de coordenadas  $\left(\frac{\sigma_x}{2}, 0\right)$  e raio  $\frac{\sigma_x}{2}^{(*)}$ , denominada circunferência de Mohr, conforme ilustrado na figura 8.4.



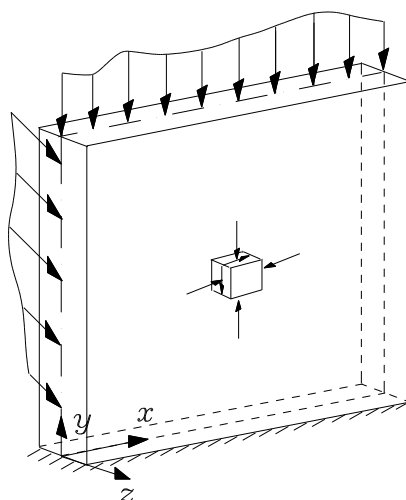
**Figura 8.4 - Circunferência de Mohr**

(\*) De fato, neste caso a equação do círculo resulta:  $\sigma_\beta^2 + \tau_\beta^2 = \frac{\sigma_x^2}{2}(1 + \cos^2 \beta)$ , dedutível das (8.10).

### 8.3 Estado duplo de tensão

Considere-se um elemento estrutural com superfície média plana de dimensões muito maiores do que a espessura medida em qualquer um de seus pontos. Admita-se que as ações externas tenham componentes contidas no plano médio, e que se distribuam uniformemente ao longo da espessura em cada ponto.

O elemento estrutural com essas características tem a denominação técnica de *chapa*, (v.fig.8.5), e os estados de tensão em pontos contidos no plano médio são representativos daquilo que ocorre em termos de sollicitações internas ao longo da chapa. Observa-se que na figura, por conveniência de representação, o carregamento externo foi reduzido ao plano médio, apresentando, assim, dimensão de força por unidade de comprimento.



**Figura 8.5 - Chapa**

Nas condições descritas, posicionando-se os eixos de referência  $x$  e  $y$  no plano médio da chapa, conclui-se que o tensor de tensão num ponto deste plano apresenta somente três componentes não nulas:  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Sua representação em forma matricial resulta:

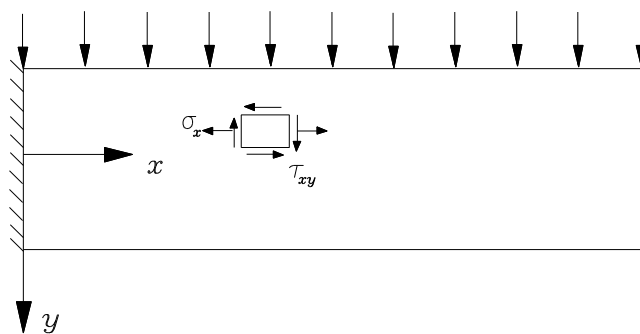


$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

Formalmente, quando três componentes de tensão pertencem a um mesmo plano e são suficientes para caracterizar o estado de tensão num ponto, configura-se um *estado duplo ou plano de tensão*.

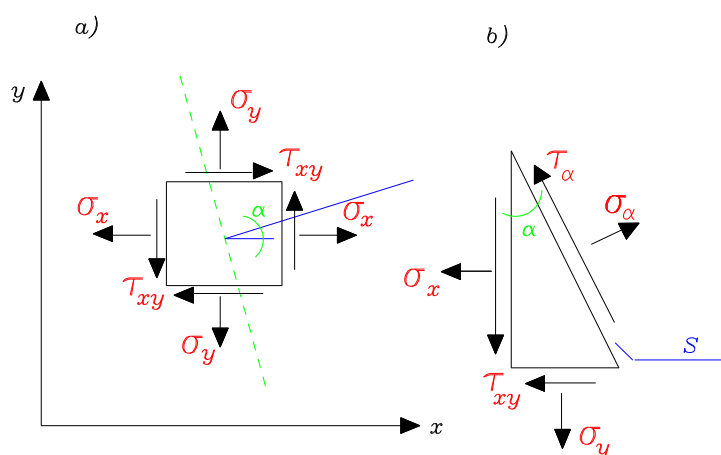
Chama-se a atenção, novamente, para o fato de que o tensor de tensão de qualquer ponto da chapa, representado por suas componentes segundo os planos coordenados, tem a mesma forma indicada pela (8.11).

Um caso prático já estudado que pode ser enquadrado numa análise plana é o das *vigas de eixo reto* com um plano longitudinal de simetria, no qual está contido o carregamento externo. Nesse elemento estrutural, as dimensões da seção transversal são muito menores que o comprimento da peça e levando-se em conta as hipóteses clássicas sobre a deformação por flexão da seção, as componentes de tensão não nulas ficam reduzidas a duas:  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ , conforme ilustra a figura 8.6.



**Figura 8.6 - Viga como um caso plano**

É importante observar que o estado duplo não é um caso particular do estado triplo, constituindo-se sim numa simplificação que permite desenvolver o estudo das tensões num espaço bidimensional.



**Figura 8.7 - Componentes de tensão segundo um plano inclinado**

Considere-se, então, um caso plano<sup>(\*)</sup>, como o ilustrado na figura 8.7a, com base no qual se quer determinar as componentes de tensão normal e de cisalhamento segundo um plano cuja normal é inclinada de um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo x.

Os sentidos indicados para as componentes foram obtidos aplicando-se a regra comentada no item 8.1.

Do equilíbrio de forças segundo as direções normal e tangencial ao plano inclinado, (fig.8.7b), resultam:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} S &= \sigma_x S \cos \alpha \cos \alpha + \sigma_y S \sin \alpha \sin \alpha + 2 \tau_{xy} S \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{\alpha} S &= -\sigma_x S \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y S \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} S \cos \alpha \cos \alpha \\ &\quad - \tau_{xy} S \sin \alpha \sin \alpha\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (8.12 \text{ a,b})$$

Os valores extremos de tensão normal ocorrem em planos cujas normais possuem inclinações  $\alpha$  particulares em relação ao eixo x de referência. Tais inclinações podem ser determinadas a partir da (8.12a), impondo-se a nulidade da sua primeira derivada em relação à  $\alpha$ :

<sup>(\*)</sup> Por simplificação, de solicitação homogênea, o que não implica em perda de generalidade das relações deduzidas.

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \tau_{xy} (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \quad (8.13)$$

Observa-se pela (8.13), e comparando-se com a (8.12b), que anular a primeira variação da expressão de  $\sigma_\alpha$  equivale a impor a nulidade da tensão de cisalhamento. Portanto, nos planos onde a tensão normal assume valores extremos, a tensão de cisalhamento é nula.

Tendo-se em vista que  $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$ , da (8.13) resulta:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (8.14)$$

Nota-se que:  $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha \pm \pi)$ , portanto os ângulos  $\alpha$  e  $\alpha \pm \pi/2$  satisfazem a (8.14), o que implica na existência de dois planos ortogonais segundo os quais as tensões normais assumem valores extremos. Esses planos são denominados de planos principais.

Os valores extremos de tensão normal determinam-se substituindo a (8.14) na (8.12a). Operando-se analiticamente essa substituição, é possível deduzir uma expressão para o cálculo direto dos chamados valores principais de tensão. Nesse sentido, considere-se a seguinte redação alternativa para a (8.12a):

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (8.15)$$

Considerando-se então a (8.14), pode-se mostrar que:

$$\left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \right]^2 = \left[ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \quad (8.16)$$

Finalmente, combinando-se as (8.15) e (8.16) segue que:

$$\sigma_{máx,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.17)$$

Segundo uma notação bastante usual, que será adotada no que segue, representa-se:  $\sigma_{máx} = \sigma_1$  e  $\sigma_{min} = \sigma_2$ .

A expressão (8.17) permite calcular diretamente os valores principais de tensão normal sem que se calculem, previamente, os ângulos das normais aos planos principais.

Outra expressão bastante útil combina, por assim dizer, as (8.14) e (8.17), permitindo-se determinar o plano aonde atua a tensão principal maior.

Para a dedução dessa expressão, admita-se que segundo um ângulo  $\alpha_1$  a tensão normal correspondente seja  $\sigma_1$ , a principal maior. Nessas condições, a (8.12a) fornece:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \alpha_1 + \sigma_y \sin^2 \alpha_1 + 2\tau_{xy} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \\ \therefore \sigma_1 - \sigma_x &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin^2 \alpha_1 + 2\tau_{xy} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (8.18a)$$

Como a tensão de cisalhamento ao mesmo plano é nula, da (8.12b) segue que:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) = 0 \\ \therefore (\sigma_y - \sigma_x) &= \frac{\tau_{xy} (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1)}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} \end{aligned} \quad (8.18b)$$

Combinando-se as (8.18) resulta a expressão procurada:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (8.19)$$

lembrando que o ângulo  $\alpha_1$  positivo é marcado em sentido anti-horário a partir do eixo x.

Por outro lado, para a determinação dos planos onde ocorrem as tensões de cisalhamento com valores extremos, é mais

simples se fazer uso do conhecimento prévio das direções principais de tensão normal. Nessa condição, o ângulo que define a direção da normal ao plano de tensão de cisalhamento extrema será marcado em relação às direções principais.

Tomando-se, então, as direções principais como referência, as expressões (8.12a,b) assumem as formas:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} &= -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}\quad (8.20 \text{ a,b})$$

Impondo-se a nulidade da primeira derivada da (8.20b) em relação à  $\alpha$  obtém-se:

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_1 - \sigma_2)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

$$\therefore \alpha = \pm \pi/4$$

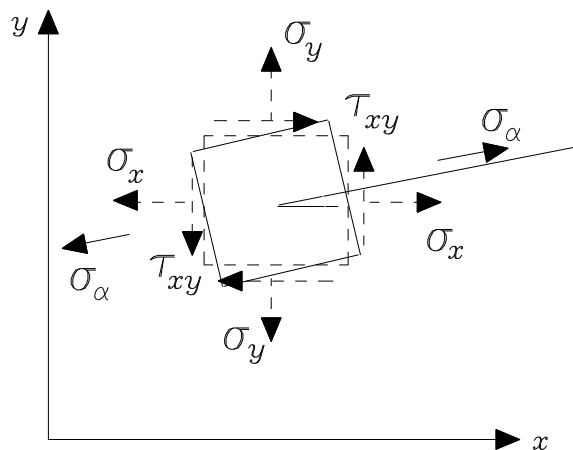
Com relação às tensões de cisalhamento, interessam seus valores máximos em módulo, de modo que com qualquer um dos  $\alpha$  determinados acima, substituídos na (8.20b), resulta:

$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\quad (8.21 \text{ a})$$

É importante observar que nesse mesmo plano pode existir uma tensão normal cujo valor fica determinado pela (8.20a):

$$\sigma_{\pi/4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\quad (8.21 \text{ b})$$

**Exemplo 1:** Determinar as tensões principais, e suas respectivas direções, conhecidas as seguintes componentes de tensão para um estado plano:  $\sigma_x = 8 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_y = 2 \text{ kN/cm}^2$  e  $\tau_{xy} = 4 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 8.8 - Componentes de tensão num ponto segundo planos paralelos aos planos coordenados e planos principais**

As tensões principais são determinadas aplicando-se a (8.17), observando-se que os sentidos indicados na figura (8.8) são positivos:

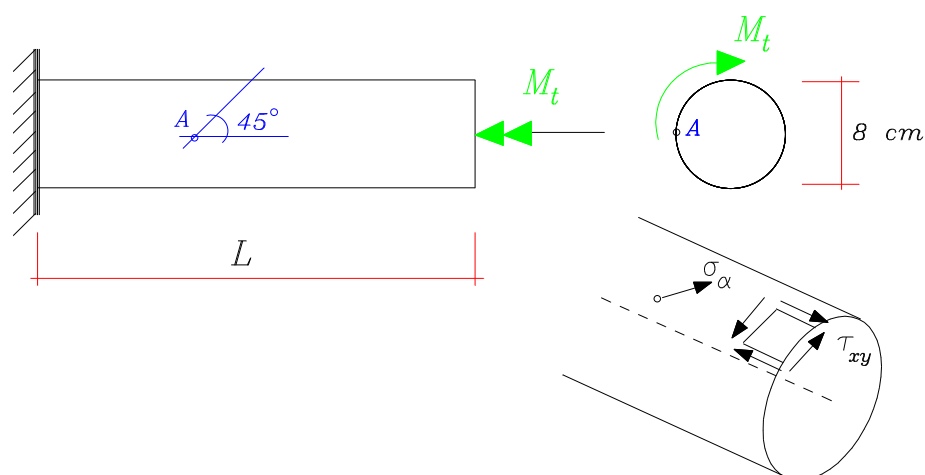
$$\sigma_1 = \frac{8+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{8-2}{2}\right)^2 + 4^2} = 5+5 = 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{8+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{8-2}{2}\right)^2 + 4^2} = 5-5 = 0$$

A inclinação, com relação ao eixo x da normal ao plano principal onde atua  $\sigma_1$ , representada na figura 8.8, é dada pela (8.19):

$$\tan \alpha_1 = \frac{10-8}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 26,57^\circ$$

**Exemplo 2:** Uma barra engastada numa das extremidades está submetida a um momento de torção na sua extremidade livre, como ilustrado na figura 8.8. Determinar o valor do momento, sabendo-se que a tensão normal no ponto A, numa direção a  $45^\circ$  em relação ao eixo da barra é de  $8 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 8.9 - Barra submetida a torção**

Do estudo da torção livre em barras de seção circular, sabe-se que nos planos das seções transversais aparecem tensões de cisalhamento que se distribuem linearmente em relação ao centro geométrico, atingindo-se os valores máximos nas bordas da seção.

A tensão de cisalhamento máxima pode ser determinada em função do momento de torção da seguinte forma:

$$\tau_{xy} = \frac{16 M_t}{\pi D^3} = 0,00995 M_t$$

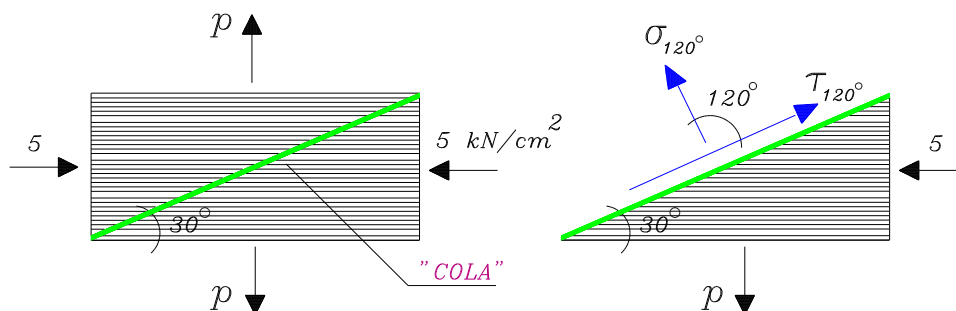
Por sua vez, a tensão normal conhecida atua num plano a  $45^\circ$  em relação ao plano da seção, e sua relação com  $\tau_{xy}$  fica expressa pela (8.12a) como segue:

$$\sigma_{45} = \sigma_x \cos^2(45^\circ) + \sigma_y \sin^2(45^\circ) + 2 \tau_{xy} \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = \tau_{xy}$$

Portanto, resulta que:

$$\therefore 0,00995 M_t = 8 \rightarrow M_t = 804,25 \text{ kN.cm}$$

**Exemplo 3:** Duas peças de madeira foram coladas através de suas faces inclinadas, como ilustrado na figura 8.10. Sabendo-se que o valor em módulo da tensão de cisalhamento admissível na madeira é  $4\text{ kN/cm}^2$  e que a cola não resiste a esforços de tração, determinar o intervalo admissível para a intensidade da tensão  $p$ :



**Figura 8.10 - Peça de madeira colada submetida a um regime homogêneo de tensões**

As duas condições limitantes devem ser impostas, isto é: a tensão normal ao plano inclinado não deve ser positiva e a tensão de cisalhamento, em módulo, não deve ultrapassar o valor prescrito.

Observando-se a figura 8.10, a restrição sobre a tensão normal ao plano inclinado fornece:

$$\sigma_{120} = -5 \cos^2(120^\circ) + p \sin^2(120^\circ) + 2\tau_{xy} \sin(120^\circ) \cos(120^\circ) \leq 0$$

$$\therefore p \leq 1,66 \text{ kN/cm}^2$$

Da limitação sobre a tensão de cisalhamento resulta:

$$\tau_{120} = -[-5 - p] \sin(120^\circ) \cos(120^\circ) + 0 [\cos^2(120^\circ) - \sin^2(120^\circ)]$$

$$\left| -[5 + p] \frac{\sqrt{3}}{4} \right| \leq |\bar{\tau}|$$

Dessa condição seguem duas outras, uma vez que não se conhece o sinal de  $p$ :



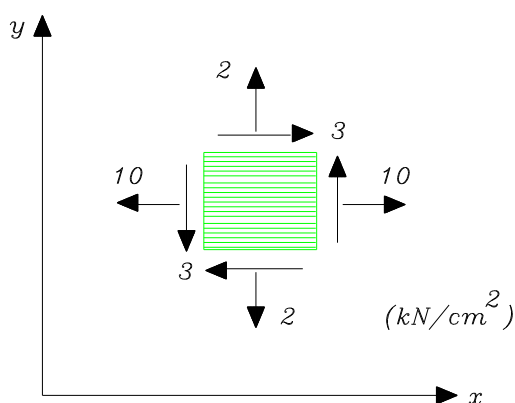
$$-[5+p] \frac{\sqrt{3}}{4} \leq 4 \rightarrow p \geq -14,24 \text{ kN/cm}^2$$

$$-[5+p] \frac{\sqrt{3}}{4} \geq -4 \rightarrow p \leq 4,24 \text{ kN/cm}^2$$

Juntando-se todas as condições obtidas, conclui-se que o intervalo admissível para a tensão  $p$  é:

$$-14,24 \leq p \leq 1,66 \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

**Exemplo 4:** Para o estado de tensão indicado na figura 8.11, determinar o valor da tensão máxima de cisalhamento em módulo.



**Figura 8.11 - Estado de tensão num ponto**

Como a máxima tensão de cisalhamento ocorre num plano que forma  $45^\circ$  com relação aos planos principais de tensão normal, um primeiro passo é justamente a determinação desses planos principais.

Determinando-se inicialmente as tensões principais, obtêm-se:

$$\sigma_1 = \frac{10+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{10-2}{2}\right)^2 + 3^2} = 6 + 5 = 11,0 \text{ kN/cm}^2$$

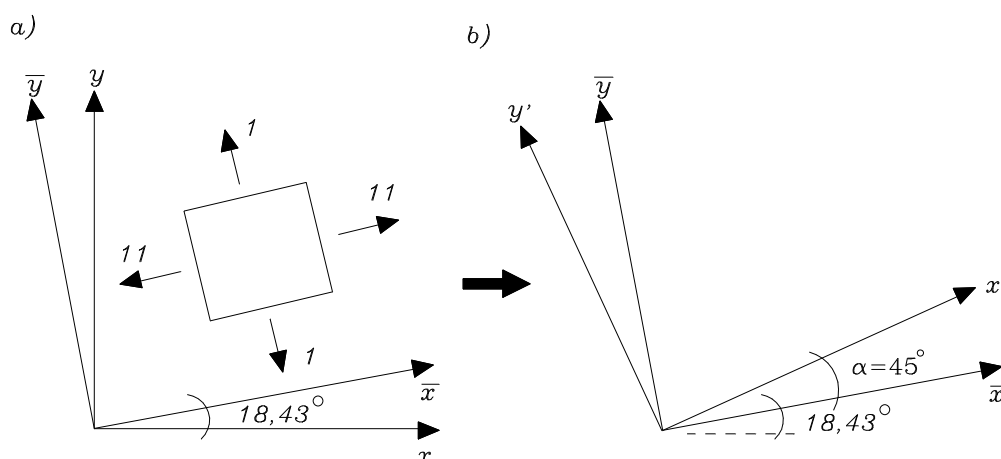
$$\sigma_2 = \frac{10+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{10-2}{2}\right)^2 + 3^2} = 6 - 5 = 1,0 \text{ kN/cm}^2$$

A inclinação da normal ao plano onde atua a tensão principal maior resulta de:

$$\tan \alpha_1 = \frac{11-10}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha_1 = 18,43^\circ$$

Os planos onde ocorrem as tensões normais principais estão indicados na (figura 8.11a).

Para se determinar a direção da máxima tensão de cisalhamento, basta aplicar uma rotação de  $45^\circ$  a partir dos eixos principais como ilustrado na figura 8.12b.



**Figura 8.12 - a) direções principais de tensão normal  
b) direções principais de cisalhamento**

Conhecidos os valores das tensões normais principais, o valor em módulo da máxima tensão de cisalhamento pode ser calculado aplicando-se a relação (8.21a):

$$|\tau|_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 5,0 \text{ kN/cm}^2$$

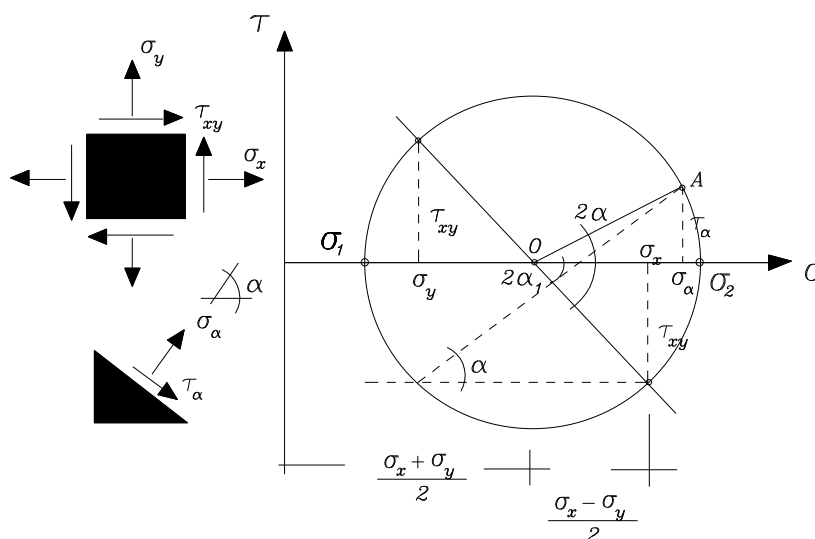
#### 8.4 Círculo de Mohr no estado duplo

As relações (8.12), reescritas nas formas:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right) \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (8.22)$$

representam um círculo no plano  $\sigma$ - $\tau$ , com centro no ponto de coordenadas  $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$  e raio  $R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$ .

A figura 8.12 mostra o círculo de Mohr e a conseqüente interpretação geométrica para as relações (8.22).



**Figura 8.12 - Círculo de Mohr**

De fato, a interpretação geométrica justifica-se a partir das seguintes relações para  $\sigma_\alpha$  e  $\tau_\alpha$ , escritas com base na geometria da figura 8.12:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha} &= \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \overline{OA} \cos(2\alpha - 2\alpha_1) \\
&= \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \overline{OA} \cos 2\alpha \cos 2\alpha_1 + \overline{OA} \frac{\sin 2\alpha}{2} \frac{\sin 2\alpha_1}{2} \\
&\quad \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \tau_{xy} \\
\tau_{\alpha} &= \overline{OA} \sin(2\alpha - 2\alpha_1) \\
&= \overline{OA} \cos 2\alpha \frac{\sin 2\alpha_1}{2} - \overline{OA} \frac{\sin 2\alpha}{2} \cos 2\alpha_1 \\
&\quad \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{8.23 a,b}$$

Observa-se que  $\alpha$  é o ângulo entre a normal ao plano onde atua  $\sigma_x$  e a normal ao plano inclinado onde atua  $\sigma_{\alpha}$ . Outro detalhe importante nesta interpretação é que no círculo de Mohr muda-se a convenção para a tensão de cisalhamento positiva, isto é: *a tensão positiva percorre em sentido horário o traço do plano onde atua.*

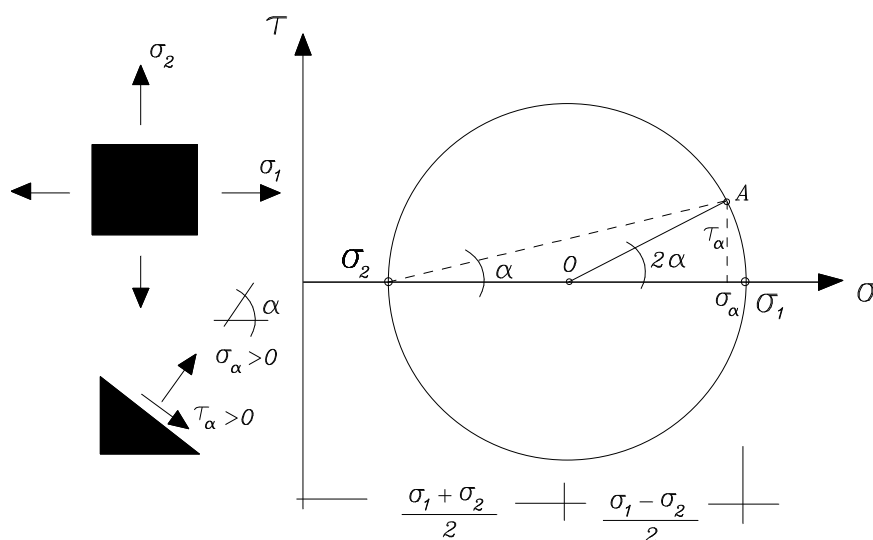
Uma interpretação gráfica mais simples resulta quando o estado de tensão conhecido é um estado principal de tensão. Tendo-se por base as tensões principais, as relações (8.22) se simplificam para:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha} &= \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \cos 2\alpha \\
\tau_{\alpha} &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \sin \alpha
\end{aligned} \tag{8.24 a,b}$$

Nesse caso, a representação do círculo de Mohr passa a ser aquela indicada na figura 8.13.

O círculo de Mohr fornece uma alternativa gráfica ao cálculo analítico, que pode ser empregada, portanto, quando conhecidas as componentes de tensão segundo dois planos ortogonais quaisquer, procuram-se as tensões principais e os planos onde atuam. Nessa situação, a construção do círculo deve obedecer ao roteiro que segue, o qual tem como particularidade a

identificação de um ponto auxiliar denominado pólo.

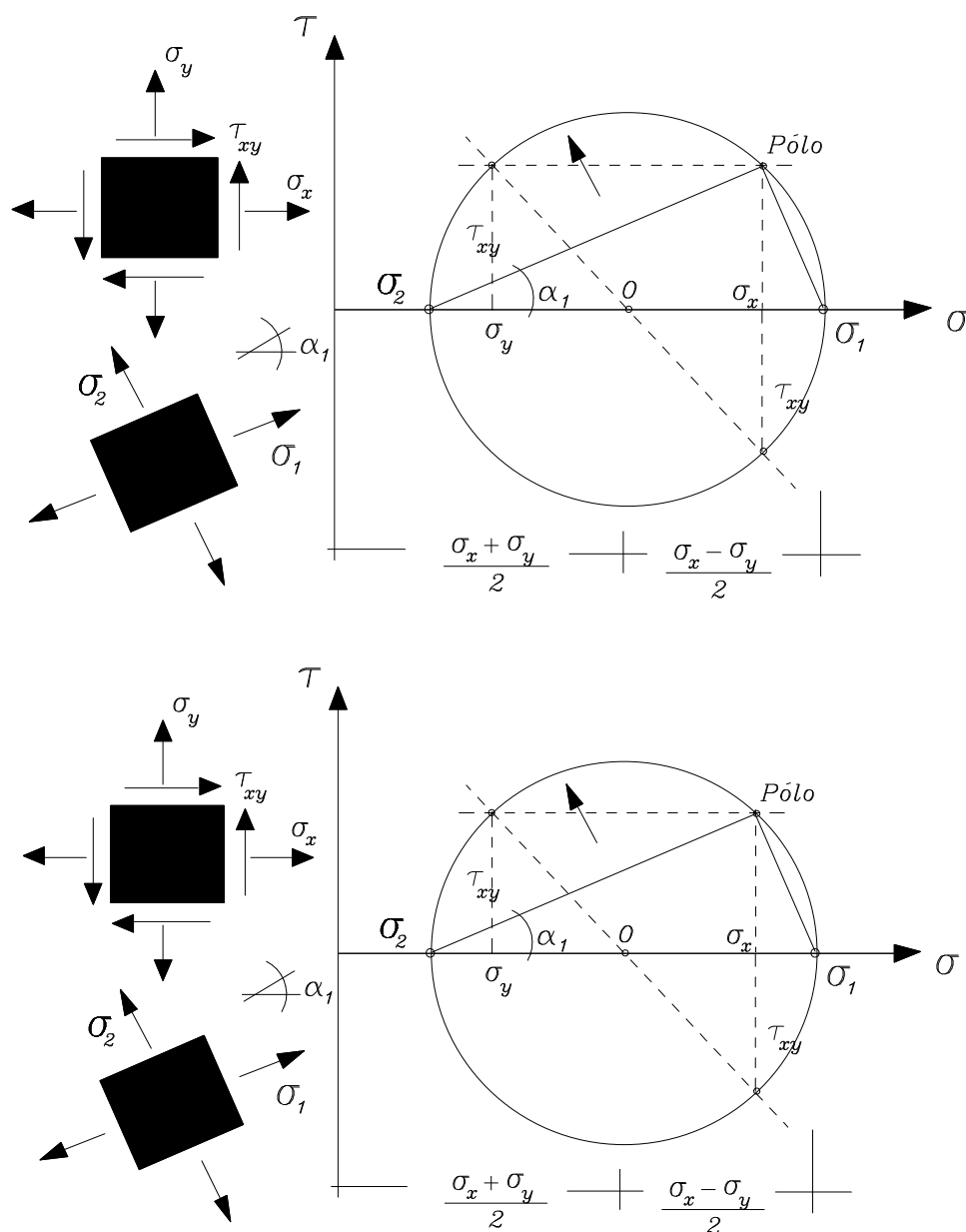


**Figura 8.13 - Círculo de Mohr a partir de um estado de tensão principal**

Tendo sido posicionados em relação a um sistema de eixos  $\sigma$   $\tau$  os pontos de coordenadas  $(\sigma_x, -\tau_{xy})$  e  $(\sigma_y, \tau_{xy})$ , seguem as etapas:

- a-)** Unem-se por um segmento de reta os dois pontos determinados, identificando-se no cruzamento com o eixo das tensões normais, o centro do círculo que os contém ;
- b-)** Uma vez traçado o círculo, suas intersecções com o eixo das tensões normais definem as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ;
- c-)** Pelo ponto  $(\sigma_y, \tau_{xy})$  traça-se uma reta paralela ao plano onde essas componentes atuam ;
- d-)** Analogamente, pelo ponto  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  traça-se uma reta paralela ao plano onde essas componentes atuam ;
- e-)** O encontro das retas traçadas nos itens c-) e d-) determina o ponto pertencente à circunferência denominado "pólo";
- f-)** A reta unindo o pólo com o ponto correspondente à tensão principal  $\sigma_2$  define a direção principal  $\alpha_1$ . Para a determinação da outra direção principal, une-se o pólo com o ponto correspondente à tensão principal  $\sigma_1$ .

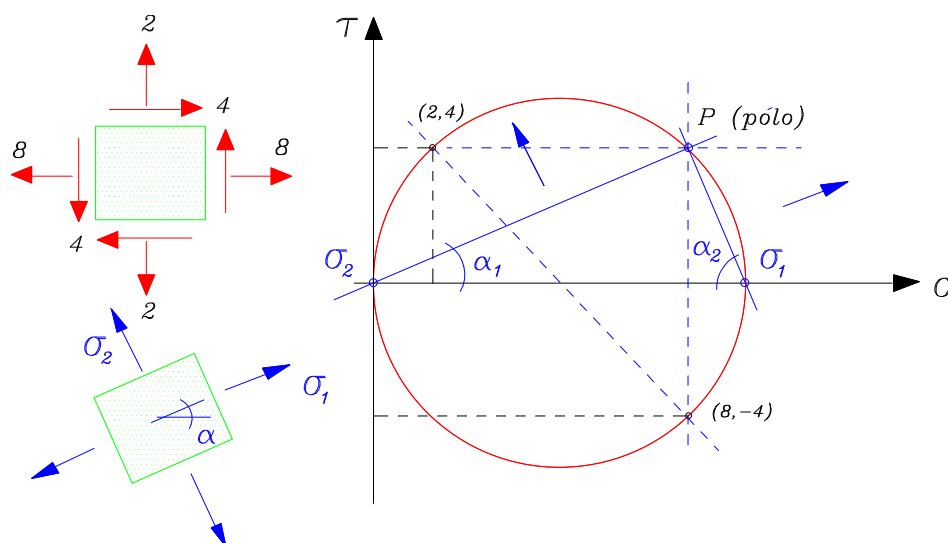
O roteiro descrito está ilustrado na figura 8.14.



**Figura 8.14 - Traçado gráfico das direções principais utilizando-se o pólo**

**Exemplo 5** - Estimar graficamente as tensões normais principais e respectivas direções, tendo-se por base o estado plano de tensão descrito no exemplo 1.

A resolução gráfica está ilustrada na figura 8.15.



**Figura 8.15 - Determinação gráfica de tensões e direções principais pelo círculo de Mohr**

**Exemplo 6:** Para o estado de tensão caracterizado pelas seguintes componentes:  $\sigma_x = 10 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_y = 0,0 \text{ kN/cm}^2$  e  $\tau_{xy} = 4 \text{ kN/cm}^2$ , determinar as tensões e direções principais, verificando-se o resultado pelo círculo de Mohr.

As tensões principais resultam:

$$\sigma_1 = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 4^2} = 11,4 \text{ kN/cm}^2$$

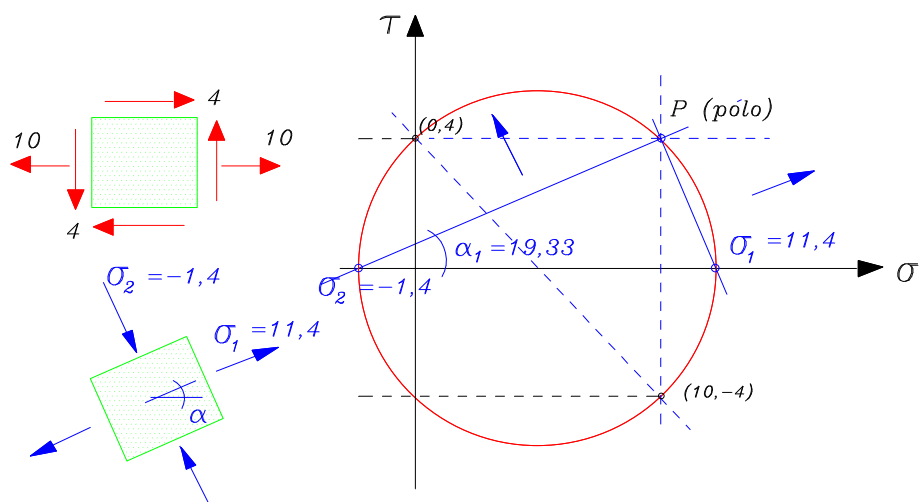
$$\sigma_2 = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 4^2} = -1,4 \text{ kN/cm}^2$$

As direções principais determinam-se a partir de:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot 4}{10} = 0,8 \quad \therefore \alpha = 19,3^\circ \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = \frac{11,4 - 10}{4} = 0,35 \quad \therefore \alpha = 19,3^\circ$$

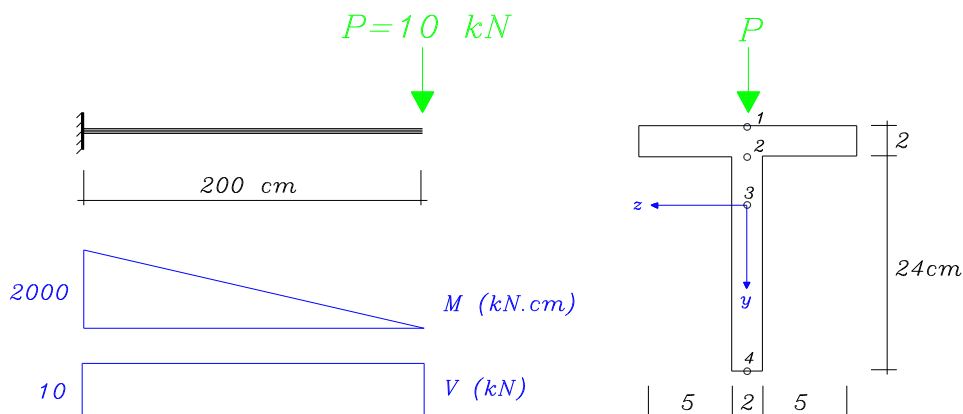
Pode-se verificar que esse ângulo corresponde ao plano onde atua a tensão principal  $\sigma_1$ .

A solução gráfica pelo círculo de Mohr está ilustrada na figura 8.16.



**Figura 8.16 - Solução gráfica pelo círculo de Mohr**

**Exemplo 7:** Uma viga engastada de seção transversal em forma de "T" é submetida a uma carga concentrada na sua extremidade livre, como ilustrado na figura 8.17. Determinar as máximas tensões normais e cisalhamento, indicando o ponto (1,2,3,ou 4), a seção e o plano onde elas ocorrem.



**Figura 8.17 - Viga em balanço submetida à flexão**

As características geométricas de interesse da seção são:

$$z_{cg} = [(2 \cdot 12) \cdot 6 + (2 \cdot 24) \cdot 6] / 72 = 6,00 \text{ cm}$$

$$y_{cg} = [(2 \cdot 12) \cdot 1 + (2 \cdot 24) \cdot 14] / 72 = 9,67 \text{ cm}$$



$$I_z = (12 \cdot 2^3) / 12 + 24 \cdot (-8,67)^2 + (2 \cdot 24^3) / 12 + 48 \cdot (4,33)^2 = 5016 \text{ cm}^4$$

As tensões normais de maior intensidade ocorrem nos pontos mais afastados da linha neutra da seção transversal do engastamento (seção submetida ao maior momento de flexão). Portanto, nos pontos 1 e 4 calculam-se:

$$\sigma_{x(1)} = -\frac{2000}{5016} (-9,67) = 3,86 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{x(4)} = -\frac{2000}{5016} (16,33) = -6,51 \text{ kN/cm}^2$$

Lembrando-se que nas vigas  $\sigma_y = 0$  e que as tensões de cisalhamento são nulas nos pontos das bordas da seção, conclui-se que:

$$\text{No ponto 1: } \sigma_{\text{máx}} = \sigma_x = 3,86 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{mín}} = \sigma_y = 0 ;$$

$$\text{No ponto 4: } \sigma_{\text{máx}} = \sigma_y = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{\text{mín}} = \sigma_x = -6,51 \text{ kN/cm}^2.$$

A tensão de cisalhamento máxima pode ser procurada numa seção transversal qualquer uma vez que a força cortante é constante ao longo da viga. Tomando-se a seção transversal do engastamento, nos pontos 1 e 4  $\tau_{\text{máx}}$ , em módulo, está numa direção a  $45^\circ$  com a direção das tensões normais principais e vale:

$$|\tau|_{\text{máx}(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 1,93 \text{ kN/cm}^2$$

$$|\tau|_{\text{máx}(4)} = \frac{6,51}{2} = 3,25 \text{ kN/cm}^2$$

No ponto 2, segundo os eixos coordenados  $x$  e  $y$  resultam:

$$\sigma_{x(2)} = -\frac{2000}{5016} (-7,67) = 3,04 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_y = 0 ;$$

$$\tau_{xy(2)} = \frac{10[24.8,67]}{2.5016} = 0,207 \text{ kN/cm}^2$$

As tensões normais principais ficam determinadas por:

$$\sigma_1 = \frac{3,04+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{3,04-0}{2}\right)^2 + 0,207^2} = 3,05 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{3,04+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{3,04-0}{2}\right)^2 + 0,207^2} = -0,49 \text{ kN/cm}^2$$

No mesmo ponto a máxima tensão de cisalhamento em módulo resulta:

$$|\tau|_{\text{máx}(2)} = \frac{3,05+0,49}{2} = 1,77 \text{ kN/cm}^2$$

No ponto 3,  $\sigma_{x(3)} = 0$ , por coincidir com o centro de gravidade da seção. Para a tensão de cisalhamento no plano da seção obtém-se:

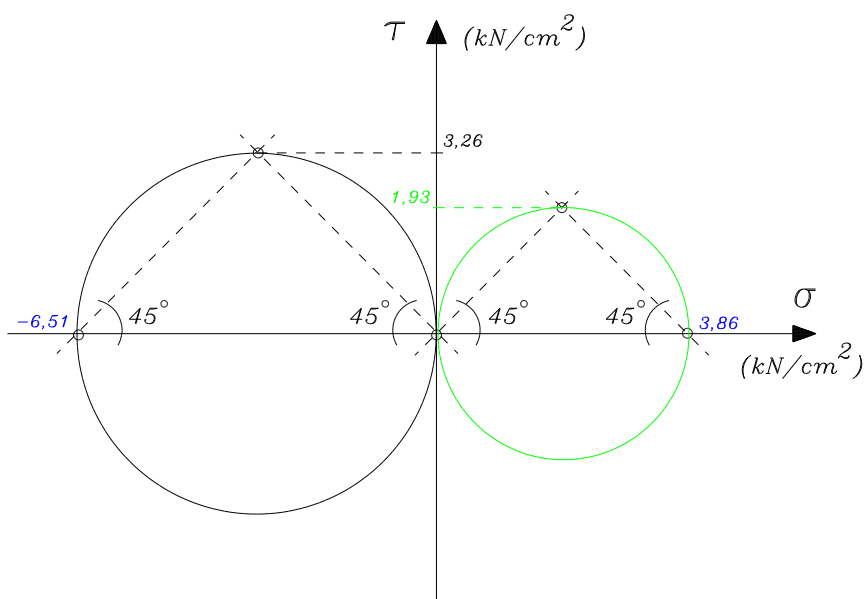
$$\tau_{xy(3)} = \frac{10[2.16,33.8,17]}{2.5016} = 0,265 \text{ kN/cm}^2$$

Conclui-se, de imediato, que neste ponto têm-se:

$$\sigma_1 = 0,265 \text{ kN/cm}^2 ; \sigma_2 = -0,265 \text{ kN/cm}^2 ; |\tau|_{\text{máx}} = 0,265 \text{ kN/cm}^2 .$$

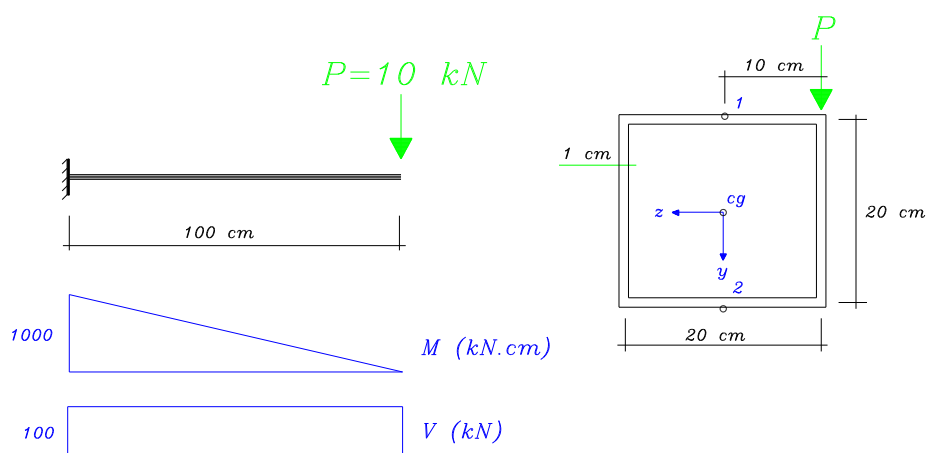
Portanto, com relação à tensão normal,  $\sigma_{\text{máx}} = 3,86 \text{ kN/cm}^2$  e ocorre na seção do engastamento, no ponto 1 e tem direção paralela ao eixo x. Quanto à tensão de cisalhamento máxima, ela vale  $3,25 \text{ kN/cm}^2$  e ocorre no ponto 4 numa direção à  $45^\circ$  com o eixo x.

Os círculos de Mohr da figura 8.18 ilustram a determinação gráfica das tensões de cisalhamento máximas nos pontos 1 e 4.



**Figura 8.18** - Círculos de Mohr para os pontos 1 e 4

**Exemplo 8:** Uma viga em balanço, de seção transversal quadrada vazada de paredes finas é submetida a uma carga concentrada aplicada na sua extremidade livre, conforme ilustra a figura 8.18. Desprezando-se o efeito da força cortante, determinar  $\sigma_{\text{máx}}$  e  $\tau_{\text{máx}}$ .



**Figura 8.19** - Viga em balanço submetida à flexão e torção simples

No caso da seção vazada com uma célula, o cálculo da tensão de cisalhamento pode ser feito aplicando-se a analogia de membrana ou, diretamente, pela relação  $\tau = \frac{M_t}{2At}$ .

Pela analogia de membrana segue que:

$$S = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$$

$$pS = K \left[ \frac{h}{l} \cdot 80 \right] \rightarrow h = \frac{5p}{K} \rightarrow V = h \cdot S = \frac{2000p}{K}$$

$$\tau = \frac{M_t}{2V} \beta = \frac{100}{\left( \frac{4000p}{K} \right)} \left( \frac{5p}{K} \right) = \frac{5}{40} = 0,125 \text{ kN/cm}^2$$

Pela relação direta resulta:

$$\tau = \frac{M_t}{2St} = \frac{100}{2 \cdot 400 \cdot 1} = \frac{5}{40} = 0,125 \text{ kN/cm}^2$$

Observa-se que a tensão de cisalhamento é a mesma em todos os pontos da seção, e também ao longo da viga, uma vez que o momento de torção é constante.

Para o cálculo da tensão normal, na seção do engastamento, escolhe-se o ponto 1, por simplificação na linha do esqueleto, pertencente à região tracionada da seção.

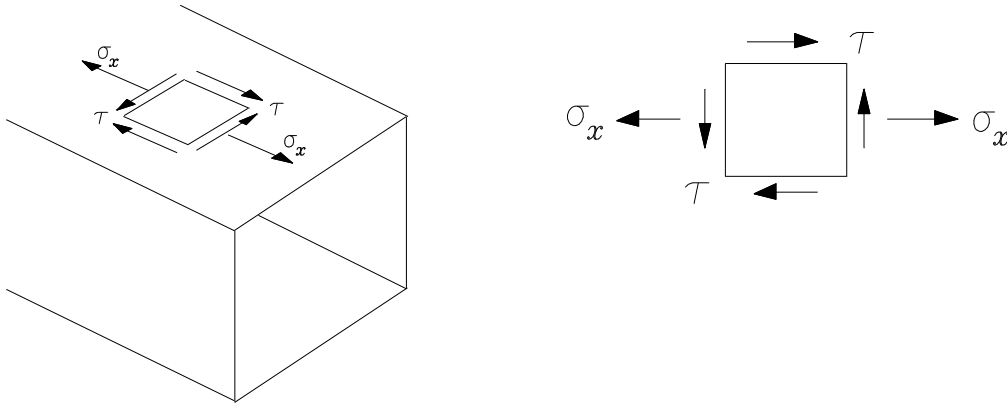
Tirando-se partido da forma delgada da seção, o momento de inércia resulta:

$$I_z = 2 \left( \frac{1 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 1 \cdot 10^2 \right) = 5333,3 \text{ cm}^4$$

Para a tensão normal no ponto 1 obtém-se:

$$\sigma_x = -\frac{10000}{5.346,47}(-10,5) = 1,969 \text{ kN/cm}^2$$

Na altura do ponto 1 o estado de tensão é plano e está representado na figura seguinte:



**Figura 8.20- Estado de tensão no ponto 1**

As tensões normais principais no plano resultam:

$$\sigma_1 = \frac{1,969+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{1,969-0}{2}\right)^2 + 0,125^2} = 1,977 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{1,969+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{1,969-0}{2}\right)^2 + 0,125^2} = -0,008 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{1,977-1,969}{0,125} \rightarrow \alpha_1 = 3,66^\circ$$

A maior tensão de cisalhamento ocorre num plano inclinado de  $3,66^\circ + 45^\circ$  em relação ao eixo da peça (eixo x) e vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1,977+0,008}{2} = 1,029 \text{ kN/cm}^2$$

## 9 ESTUDO DAS DEFORMAÇÕES

### 9.1 Introdução

Já se tratou, no primeiro capítulo destas notas, dos conceitos de deslocamento e deformação. Neste capítulo o estudo das deformações será novamente colocado em destaque, discutindo-se suas medidas, relações com os campos de deslocamentos e variações, segundo diferentes direções, a partir de um ponto.

Diz-se que um ponto material, de coordenadas  $(x,y,z)$  com relação a um sistema cartesiano fixo, sofre um deslocamento de componentes  $u,v$  e  $w$ , nas direções dos eixos de referência, quando há uma mudança da sua posição inicial, isto é, as suas coordenadas, medidas na nova posição, passam a  $(x+u,y+v,z+w)$ .

Nota-se que o conceito de deslocamento está sendo aplicado a um ponto do meio, independentemente dos outros. Já o conceito de deformação exige a consideração de pontos vizinhos.

Assim, um corpo, entendido como um meio contínuo, e, portanto, formado por uma infinidade de pontos materiais, desloca-se sem se deformar sempre que se mantiverem inalteradas as posições relativas entre seus pontos. Entretanto, se durante o movimento, pontos do corpo não mantiverem suas posições relativas, diz-se que o meio sofre deformação.

Tomando-se por referência uma região adjacente a um ponto do corpo na sua situação inicial, de uma maneira geral observa-se que a deformação conduz a mudanças no volume e na forma dessa região. É interessante que se possa caracterizar matematicamente cada uma das mudanças mencionadas, e, nesse sentido, definem-se dois tipos de medidas de deformação.

Formalmente, a medida linear, ou simplesmente deformação linear, aqui simbolizada por  $\epsilon$ , é definida pela razão entre a variação da distância inicial entre dois pontos vizinhos e a própria distância inicial. Essa medida é adimensional e serve para caracterizar as variações de volumes adjacentes a pontos do corpo.

A medida angular, ou simplesmente deformação angular, aqui simbolizada por  $\gamma$ , é o valor da variação, ou distorção, sofrida pelo ângulo formado por dois segmentos de retas inicialmente ortogonais entre si, tomadas na vizinhança de um ponto, e serve para caracterizar as variações de formas ou áreas de elementos superficiais adjacentes a pontos do corpo.

Para que essas medidas possam de fato servir para caracterizar a deformação em diferentes situações, o tamanho da vizinhança do ponto a ser considerada possui um papel fundamental.

Por exemplo, o estado de deformação do corpo é dito homogêneo quando as medidas de deformação linear e angular, segundo as mesmas direções, resultam invariáveis de ponto para ponto do corpo. Esta situação ocorre em poucos casos particulares, mas, nesses casos, para vizinhança pode-se adotar dimensões quaisquer, de acordo com a conveniência.

Na maior parte das situações, porém, as deformações variam de ponto para ponto. Assim, de uma forma geral, adota-se uma vizinhança infinitesimal, com isto evitando-se grandes variações, ou gradientes, que podem fazer com que as medidas linear e angular, se calculadas tomando-se uma vizinhança qualquer, resultem em valores médios pouco representativos daquilo que ocorre localmente em termos de deformação.

Portanto, considerando-se em qualquer caso uma vizinhança infinitesimal, além da adequada representatividade, preserva-se também um caráter local para as medidas de deformação, que podem, de fato, ser associadas ao ponto. Isto é muito importante, pois servirá, mais adiante, como justificativa para se passar a relacionar as medidas locais de tensão e de deformação.

Uma hipótese adicional, bastante razoável e que simplifica significativamente a modelagem matemática, consiste em admitir que as deformações sejam pequenas. Isto implica, no caso linear, que o quadrado de sua medida ou o produto dela por outra também pequena pode ser desprezado no confronto da mesma; no caso da

deformação angular, a tangente ou o seno do ângulo podem ser confundidos com o respectivo arco.

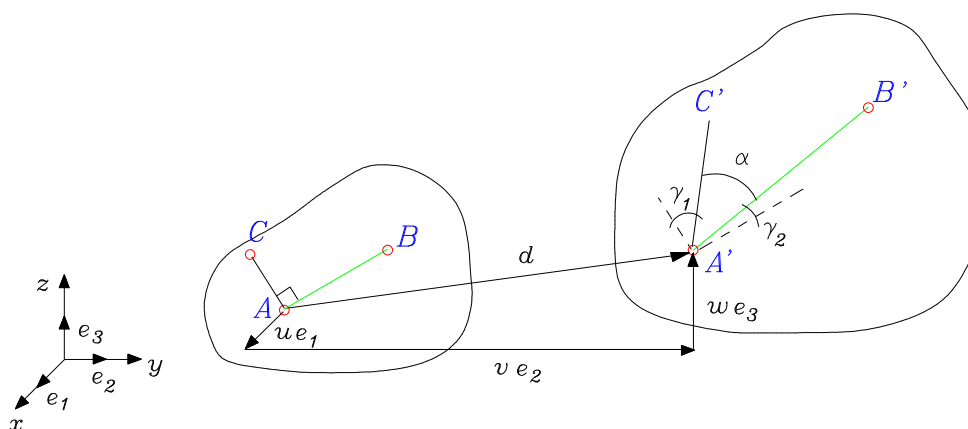
Duas outras observações são importantes, e é oportuno que sejam feitas neste ponto do texto.

Uma primeira é que devido à hipótese de continuidade, as partes do corpo que se deformam impõem às outras um movimento de corpo rígido, imaginando-se que estas não estejam sofrendo qualquer restrição ao movimento.

Uma segunda observação decorre do caráter direcional das medidas de deformação. De fato, pontos vizinhos e o ponto de referência definem direções, às quais se associam medidas de deformação. Assim, as direções a serem tomadas podem ser quaisquer no interior de um corpo deformado, configurando-se, nesse caso, um estado triplo de deformação. No estudo da deformação na superfície<sup>(\*)</sup> do corpo, as direções devem estar contidas no plano tangente à superfície no ponto de referência; configura-se, nesse caso, um estado duplo.

## 9.2 Medidas de deformação e o estado duplo

Seja um corpo qualquer de volume inicial  $V$ , que tenha sofrido um processo de deformação, conforme indicado genericamente na figura 9.1.



**Figura 9.1 - Deformação de um corpo de volume "V"**

<sup>(\*)</sup> Superfície é uma região limite ou de contorno de um volume no espaço.



A medida de deformação linear, ou deformação específica, no ponto  $A$  segundo a direção do segmento de reta  $AB$ , (v.fig.9.1), fica definida pela seguinte relação:

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (9.1)$$

Na situação limite os pontos  $A$  e  $B$  estão inicialmente distantes de  $ds$  entre si, então, pela (9.1), a distância final entre eles será dada por:

$$ds' = (1 + \varepsilon_{AB}) ds \quad (9.2)$$

Portanto, conclui-se que conhecida no ponto a deformação específica  $\varepsilon$ , associada a certa direção, pode-se, em função dela, determinar a distância final entre o ponto e um outro ponto vizinho.

A distorção angular, segundo o plano definido pelas direções  $AC$  e  $AB$ , inicialmente ortogonais, e também indicadas na figura 9.1, fica expressa por:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (9.3)$$

sendo que para deformações pequenas :  $\gamma_1 \approx tg\gamma_1$  e  $\gamma_2 \approx tg\gamma_2$ .

As duas medidas locais em estudo podem ser expressas em função das componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  do campo de deslocamentos  $d$  sofrido pelo ponto em consideração. Nesse sentido, tomando-se por base os elementos indicados na figura 9.1, o campo vetorial de deslocamentos pode ser expresso na forma:

$$d(x, y, z) = ue_1 + ve_2 + we_3 \quad (9.4)$$

onde  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  são versores associados aos eixos de referência  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

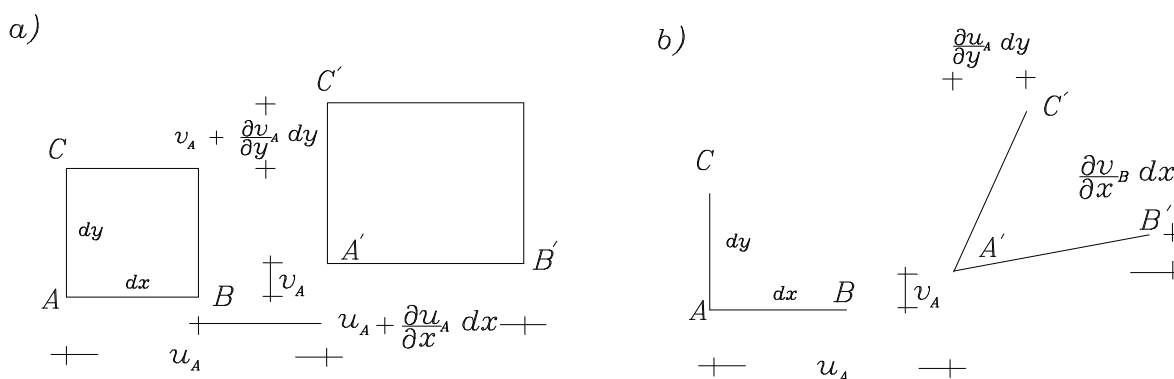
Por conveniência, admitindo-se que as direções dos segmentos de reta  $AB$  e  $AC$  estejam alinhadas com as direções  $x$  e

$y$ , respectivamente, conforme ilustra a figura 9.2a, aplicando-se a definição dada pela (9.1), seguem as deformações lineares:

$$\varepsilon_x = \frac{(dx + \frac{\partial u_A}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\partial u_A}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{(dy + \frac{\partial v_A}{\partial y} dy) - dy}{dy} = \frac{\partial v_A}{\partial y} \quad (9.5a, b)$$

Por outro lado, com os valores indicados na figura 9.2b, aplicando-se a definição (9.3), a distorção angular resulta:

$$\gamma_1 = \frac{\partial v_B}{\partial x}; \quad \gamma_2 = \frac{\partial u_A}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial v_B}{\partial x} + \frac{\partial u_A}{\partial y} \quad (9.6)$$



**Figura 9.2 - Relação entre as medidas de deformação linear e angular com as componentes do campo de deslocamentos**

No caso geral, considerando-se, a partir de um ponto do meio, pontos vizinhos segundo três direções paralelas às dos eixos coordenados, por extensão dos casos ilustrados na figura 9.2, resultam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9.7 a, b, c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9.8 a, b, c)$$

As componentes de deformação acima relacionadas podem ser reunidas numa matriz simétrica, denominada matriz do estado de deformação, a qual tem a seguinte representação:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

onde os fatores  $1/2$  aparecem para garantir que matematicamente a matriz  $\mathbf{E}$  seja representativa de um tensor de segunda ordem (\*).

Um caso particular de interesse, já mencionado anteriormente, é o chamado estado duplo de deformação, situação típica das membranas, mas que também ocorre num elemento da superfície do corpo. Nesse caso, todas as componentes de deformação ficam contidas num único plano, e a matriz do estado de deformação assume a seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

É importante novamente lembrar que as medidas de deformação são locais, isto é, associadas a um ponto e segundo determinadas direções. Nota-se, ainda, que as direções em relação às quais se determinaram as componentes do tensor representado pela (9.9) são ortogonais entre si, ou, segundo a álgebra linear: linearmente independentes.

Limitando-se, por simplificação, ao estado plano de deformação indicado acima, onde as componentes se referem a direções paralelas aos eixos de referência, é possível mostrar que em função dessas componentes, pode-se conhecer as componentes de deformação segundo quaisquer outras direções ortogonais, contidas no mesmo plano, que passam pelo ponto.

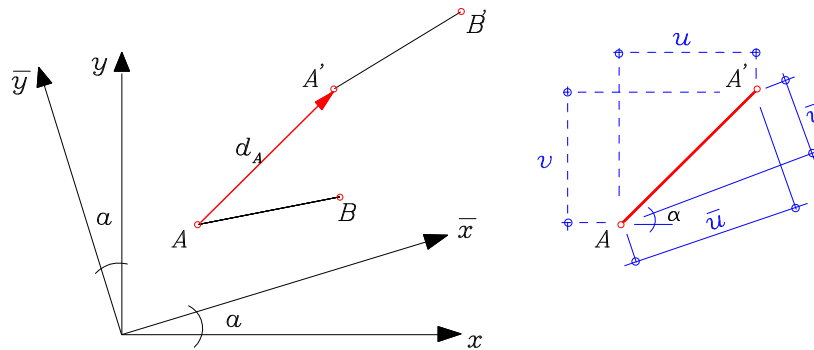
De fato, considere-se uma rotação  $\alpha$  no sistema de eixos  $x-y$ , como a ilustrada na figura 9.3.

As coordenadas de pontos do plano segundo o sistema original e o sistema rodado, devem obedecer a seguinte regra de transformação:

---

(\*) Da álgebra linear, os tensores de segunda ordem são transformações lineares que associam vetor a vetor.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{x}(x, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ \bar{y} &= \bar{y}(x, y, \alpha) = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}\quad (9.11 \text{ a,b})$$



**Figura 9.3 - Rotação do sistema de eixos e respectivas componentes dos deslocamentos do ponto A**

Da mesma forma relacionam-se as componentes dos deslocamentos de um ponto qualquer:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u \cos \alpha + v \operatorname{sen} \alpha \\ \bar{v} &= -u \operatorname{sen} \alpha + v \cos \alpha\end{aligned}\quad (9.12a,b)$$

Utilizando-se da regra da cadeia, a deformação específica na direção do eixo  $\bar{x}$ , pode ser escrita na forma:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\quad (9.13)$$

Tendo-se em vista as relações de transformação (9.11) e (9.12), segue que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(u \cos \alpha) = \cos \alpha \quad ; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(v \operatorname{sen} \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \varepsilon_x \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \varepsilon_y \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo-se as relações anteriores na expressão 9.13, obtém-se:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 \alpha + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (9.14)$$

De forma análoga, pode-se deduzir uma expressão para a distorção segundo as novas direções ortogonais, partindo-se de:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} &= \cos \alpha \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = \operatorname{sen} \alpha \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = -\operatorname{sen} \alpha \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.15)$$

Com as mesmas regras de transformação (9.11) e (9.12) segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\varepsilon_x \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \quad ; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha + \varepsilon_y \cos \alpha \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \varepsilon_x \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \varepsilon_y \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Por substituição na (9.15), obtém-se então:

$$\frac{\gamma_{\bar{xy}}}{2} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (9.16)$$

Observa-se a semelhança formal entre as expressões de deformação (9.14) e (9.16) com as expressões de tensão (9.12a,b), deduzidas no capítulo anterior.

Analogamente ao estudo das tensões existem direções principais de deformação linear, às quais correspondem valores de deformações máxima e mínima relativamente a quaisquer outras direções no plano. As deformações principais ocorrem segundo direções ortogonais entre si, e em relação a elas não há distorção angular associada. Pode-se chegar a essas conclusões

partindo-se da pesquisa de valores extremos para a função definida pela (9.14), seguindo um procedimento absolutamente análogo ao que foi feito para as tensões.

As expressões para a determinação das deformações principais e das correspondentes direções principais resultam:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (9.17a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (9.17b)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\gamma_{xy}} \quad (9.17c)$$

sendo que  $\alpha_1$  é o ângulo (anti-horário se positivo) marcado da direção de  $\varepsilon_x$  para a de  $\varepsilon_1$ .

A distorção máxima, por sua vez, ocorre numa direção a  $45^\circ$  com relação a uma das direções de deformação linear principal e vale:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (9.17d)$$

### 9.3 Decomposição aditiva do tensor de deformações

Considere-se, agora, o caso particular de um paralelepípedo cujos lados apresentam dimensões infinitesimais  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . Imagine-se que tal paralelepípedo venha a sofrer um processo de deformação provocando apenas uma variação de seu volume, mantendo-se a forma inicial.

As dimensões dos lados do elemento passam a ser:  $dx(1+\varepsilon_x)$ ,  $dy(1+\varepsilon_y)$  e  $dz(1+\varepsilon_z)$ , de modo que os volumes inicial e final do paralelepípedo ficam expressos respectivamente por:

$$V_0 = dx dy dz$$

$$V = dx dy dz (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) \quad (9.18 a,b)$$

Em coerência com um regime de pequenas deformações, na (9.18b) podem ser desprezados os produtos entre as medidas de deformação linear, de modo que:

$$V = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (9.19)$$

Pode-se concluir de imediato, que:

$$\therefore \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (9.20)$$

Assim sendo, diz-se que a soma das deformações lineares segundo três direções ortogonais entre si fornecem uma medida de deformação volumétrica nas vizinhanças do ponto. Além disso, essa medida constitui um invariante, no sentido de que a soma das deformações lineares segundo outras três direções ortogonais entre si, tomadas no mesmo ponto, resulta no mesmo valor numérico.

Considere-se, por outro lado, a decomposição aditiva do tensor de deformações, formada por uma parcela dita esférica e outra anti-esférica. A parcela esférica é representada por uma matriz diagonal, cujos elementos são iguais entre si e iguais à deformação linear média, calculada por:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (9.21)$$

Por sua vez, a parte anti-esférica é determinada pela diferença entre o tensor original de deformações e a sua parte esférica. Matricialmente, a decomposição resulta:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_m) & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & (\varepsilon_y - \varepsilon_m) & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & (\varepsilon_z - \varepsilon_m) \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

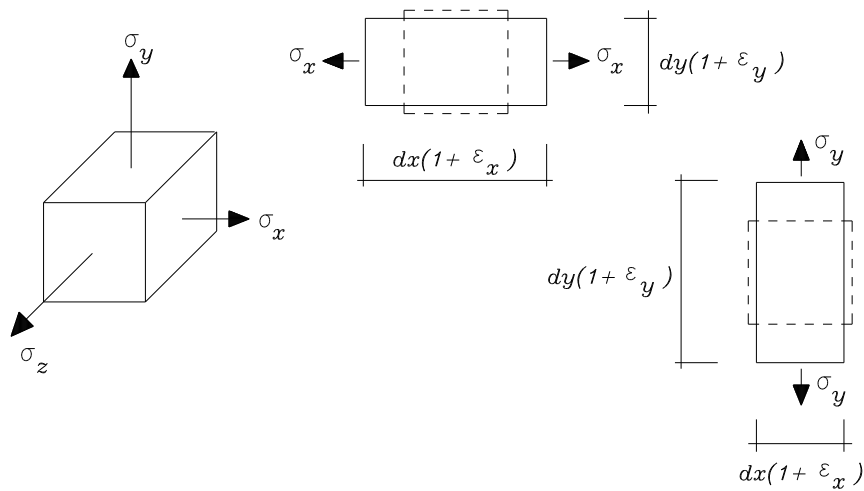
Um detalhe a observar é que a soma dos elementos da diagonal principal da parte esférica resulta igual a:  $3\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

Assim sendo, tendo-se em vista a (9.20), diz-se que a parcela esférica do tensor de deformações contém informações sobre a variação volumétrica provocada pelo processo de deformação. Já a soma dos elementos da diagonal principal da parte anti-esférica resulta nula, razão pela qual se afirma que essa parcela reúne informações sobre as mudanças de forma provocadas pela deformação.

#### 9.4 O módulo de elasticidade volúmico e o módulo de elasticidade transversal

Considere-se que o corpo seja constituído por um material isotrópico com resposta elástica-linear. Na hipótese de que um seu elemento de volume venha a ser submetido exclusivamente a um regime homogêneo de solicitações normais às suas faces, conforme ilustra a figura 9.4, cada uma das componentes de tensão normal provoca deformações lineares nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , para as quais contribui diretamente o efeito de Poisson.





**Figura 9.4 - Deformações provocadas pelas componentes de tensão**

a) Devido a  $\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (9.23 \text{ a,b,c})$$

b) Devido a  $\sigma_y$ :

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (9.24 \text{ a,b,c})$$

c) Devido a  $\sigma_z$ :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad ; \quad \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (9.25 \text{ a,b,c})$$

Superpondo-se os efeitos das tensões atuando nas três direções, resultam:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (9.26 \text{ a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (9.26 \text{ b})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (9.26 \text{ c})$$

e, portanto:

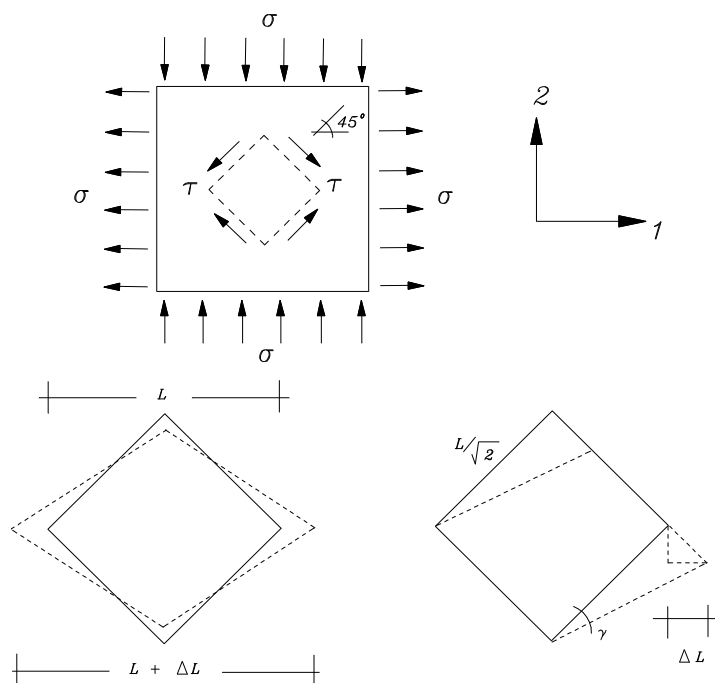
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (9.27)$$

Na última relação o fator  $\frac{E}{(1-2\nu)}$  recebe o nome de módulo de elasticidade volúmico, sendo frequentemente simbolizado pela letra  $K$ .

Seja, por outro lado, conforme mostra a figura 9.5, um estado duplo de tensão em que a soma das tensões principais é nula. Tal situação também caracteriza um estado de cisalhamento simples, como se pode concluir se forem determinadas as componentes de tensão segundo direções a  $45^\circ$  com as direções das tensões principais.

Pela análise da deformação provocada, conforme ilustra a figura 9.5b, a distorção angular resulta:

$$\gamma = \Delta\lambda\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{\lambda} = 2\varepsilon \quad (9.28)$$



**Figura 9.5 - Estado de cisalhamento simples**

A deformação linear indicada relaciona-se com as tensões normais aplicadas na forma:

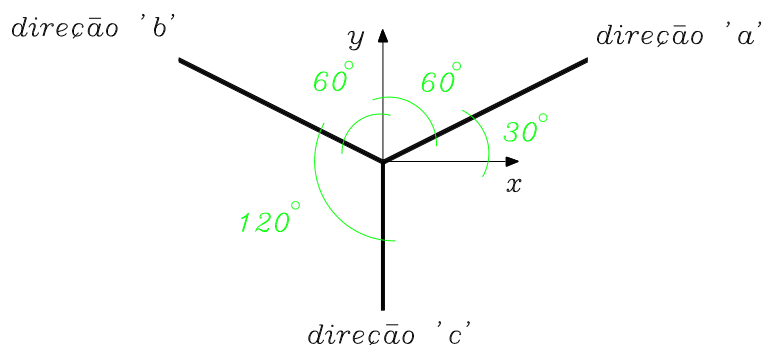
$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma - \nu(-\sigma)] = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma \quad (9.29)$$

Combinando-se a (9.28) com a (9.29) e lembrando-se que, nesse caso,  $\sigma = \tau$ , resulta:

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \quad (9.30)$$

Nessa última relação, o fator  $\frac{E}{2(1+\nu)}$  é denominado módulo de elasticidade transversal, sendo usualmente representado pela letra  $G$ .

**Exemplo 1:** Segundo as direções  $a$ ,  $b$  e  $c$ , ilustradas na figura 9.6, mediram-se as seguintes deformações:  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 2.10^{-4}$ ;  $\varepsilon_c = -1.10^{-4}$ . Determinar as deformações principais e direções onde elas ocorrem.



**Figura 9.6- Direções das deformações medidas**

Trata-se de um estado plano, para o qual se aplicam diretamente as relações (9.14) e (9.17). Para aplicar a (9.14) em particular, deve-se observar que a medida de deformação segundo a direção  $c$  coincide com  $\varepsilon_y$ , enquanto que as medidas segundo  $a$  e  $b$  devem ser igualadas a  $\varepsilon_x$ . Nessas condições resultam:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{30^\circ} = \varepsilon_x \frac{3}{4} - 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{4} + \gamma_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot 10^{-4}$$

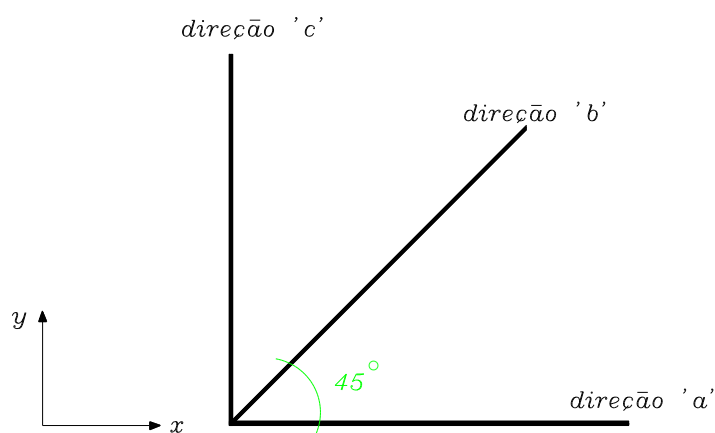
$$\varepsilon_b = \varepsilon_{150^\circ} = \varepsilon_x \frac{3}{4} - 1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{4} - \gamma_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_a + \varepsilon_b = 4 \cdot 10^{-4} = \varepsilon_x \frac{3}{2} - 0,50 \cdot 10^{-4} \rightarrow \varepsilon_x = 9 \cdot 10^{-4}$$

A substituição do valor da deformação na direção  $x$  em qualquer uma das expressões, de  $\varepsilon_a$  ou de  $\varepsilon_b$ , conduz a:  $\gamma_{xy} = 0$ . Portanto, uma vez que a distorção associada às direções  $x$  e  $y$  é nula, não há necessidade de se aplicar a (9.17), pois as deformações nas direções  $x, y$  são principais.

Assim sendo, com relação às deformações e direções principais, resultam:  $\varepsilon_1 = 9 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_2 = -1 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha_1 = 0^\circ$ .  $\square$

**Exemplo 2:** Para uma situação plana de tensão e deformação, num meio elástico-linear, segundo as direções  $a$ ,  $b$  e  $c$ , ilustradas na figura 9.7, foram tomadas as respectivas medidas lineares de deformação. Pede-se escrever as relações para a determinação das tensões, das deformações lineares principais e suas direções principais. Admite-se que sejam conhecidos o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ .



**Figura 9.7 - Direções das deformações conhecidas**

**a)** As componentes de tensão, a partir de medidas de deformação, resultam da aplicação da lei de Hooke, expressa pelas formas (9.26) e (9.30). Considerando-se, então, que  $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ , invertendo-se as (9.26) resultam:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_a + \nu\varepsilon_c)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_c + \nu\varepsilon_a)$$

A (9.30) particularizada para o plano x-y assume a forma:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \text{ onde}$$

$$E, \nu \rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

**b)** As deformações e direções principais seguem das (9.14) e (9.17). Com a (9.14), pode-se calcular  $\gamma_{xy}$ :

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_a \frac{1}{2} + \varepsilon_c \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \rightarrow \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

Com as (9.17), calculam-se:

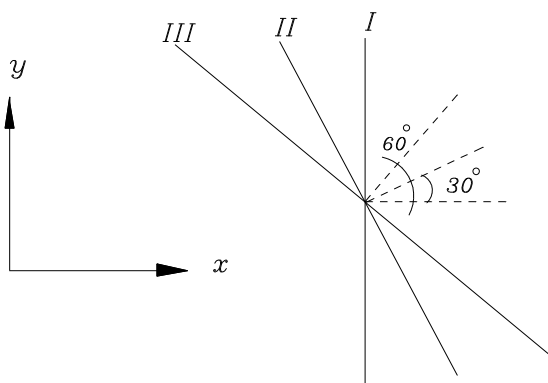
$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\alpha_1 = \arctan \left[ \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_a)}{2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)} \right]$$

**Exemplo 3:** Com relação aos planos I, II, e III, indicados na

figura 9.8, atuam as tensões normais:  $\sigma_I = 10 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{II} = 0$  e  $\sigma_{III} = -10 \text{ kN/cm}^2$ . Admitindo-se um estado plano de tensão ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ), determinar as tensões normais principais, direções principais e a distorção máxima. Dados complementares:  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0,25$ .



**Figura 9.8 - Traços dos planos em relação aos quais são conhecidas as tensões normais**

**a)** Para o cálculo das tensões e direções principais, é necessário determinar as componentes  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . A tensão normal ao plano I coincide com  $\sigma_x$ ; as outras componentes podem ser determinadas utilizando-se os dados referentes aos planos inclinados, empregando-se a (9.12a):

$$\sigma_I = \sigma_x = 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{(30^\circ)} = \sigma_x \cos^2(30^\circ) + \sigma_y \sin^2(30^\circ) + 2\tau_{xy} \sin(30^\circ)\cos(30^\circ)$$

$$\therefore \sigma_{II} = \frac{30}{4} + \frac{\sigma_y}{4} + 2\tau_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\sigma_{III} = \sigma_{(60^\circ)} = \sigma_x \cos^2(60^\circ) + \sigma_y \sin^2(60^\circ) + 2\tau_{xy} \sin(60^\circ)\cos(60^\circ)$$

$$\sigma_{III} = \frac{10}{4} + 3\frac{\sigma_y}{4} + 2\tau_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} = -10$$

Resolvendo-se o sistema, determinam-se os seguintes

valores:  $\sigma_y = -10 \text{ kN/cm}^2$  e  $\tau_{xy} = -5,77 \text{ kN/cm}^2$ .

Com os valores determinados, calculam-se as tensões e direções principais, aplicando-se as (9.17) e (9.19):

$$\sigma_1 = \frac{10-10}{2} + \sqrt{100+(-5,77)^2} = 11,55 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{10-10}{2} - \sqrt{100+(-5,77)^2} = -11,55 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{11,55-10}{-5,77} \rightarrow \alpha_1 = -15^\circ$$

**b)** O cálculo de  $\gamma_{\text{máx}}$  pode ser feito diretamente pela lei de Hooke, relacionando-o com  $\tau_{\text{máx}}$ , ou em função das deformações principais, aplicando-se a (9.17c):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20000}{2,5} = 8000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G} = \frac{1}{8000} \left( \frac{11,55+11,55}{2} \right) = 0,00144$$

ou,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{1,25 \cdot 11,55}{20000} = 0,000722$$

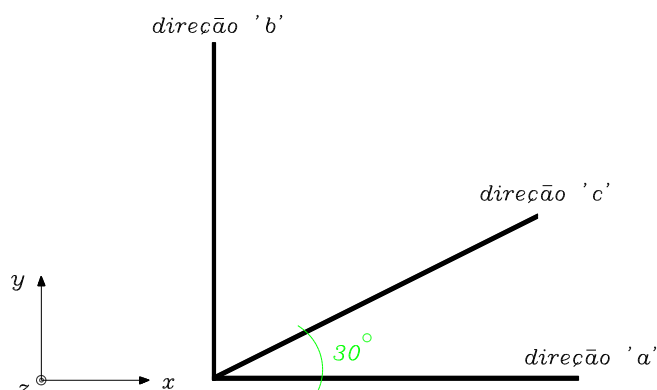
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = -\frac{1,25 \cdot 11,55}{20000} = -0,000722$$

$$\gamma_{\text{máx}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0,00144$$

**Exemplo 4:** Segundo as direções a, b e c da figura 9.9, foram medidas as deformações:  $\varepsilon_a = 1.10^{-5}$ ;  $\varepsilon_b = 1,75.10^{-5}$  e  $\varepsilon_c = 1.10^{-5}$ .

Determinar as deformações e direções principais no plano x-y e  $\tau_{\text{máx}}$  considerando-se que a tensão normal na terceira direção

principal é nula. Dados complementares:  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0,25$ .



**Figura 9.9 - Direções das deformações conhecidas**

**a)** Para se determinar as deformações e direções principais, precisa-se conhecer  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ . Em função dos dados do problema, tem-se que:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x = 1.10^{-5}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_y = 1,75.10^{-5}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{30} = \varepsilon_x \cos^2(30^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(30^\circ) + \gamma_{xy} \sin(30^\circ) \cos(30^\circ) = 1.10^{-5}$$

$$\therefore \gamma_{xy} = -0,433.10^{-5}$$

Com relação às deformações e direções principais, resultam:

$$\varepsilon_1 = \frac{2,75.10^{-5}}{2} + \sqrt{\left(\frac{0,75.10^{-5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-0,433.10^{-5}}{2}\right)^2} = 1,81.10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2,75.10^{-5}}{2} - \sqrt{\left(\frac{0,75.10^{-5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-0,433.10^{-5}}{2}\right)^2} = 0,94.10^{-5}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{2(1,81.10^{-5} - 1.10^{-5})}{-0,433.10^{-5}} \rightarrow \alpha_1 = -75^\circ$$

**b)** O valor da tensão de cisalhamento máxima é determinado em



função da diferença entre as tensões normais principais e ocorre num plano a  $45^\circ$  com os planos das tensões principais que a determinam. Assim, deve-se verificar a seguinte condição:

$$\tau_{\text{máx}} = \text{máx} \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right]$$

As tensões normais principais podem ser determinadas em função das deformações principais pela lei de Hooke. Da condição  $\sigma_3 = 0$  segue que:

$$\varepsilon_3 = -\nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0,69 \cdot 10^{-5}$$

As tensões normais principais calculam-se da seguinte forma:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3) = 0,47 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3) = 0,33 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 0$$

Para a tensão de cisalhamento, obtêm-se:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{0,140}{2} = 0,07 \text{ kN/cm}^2$$

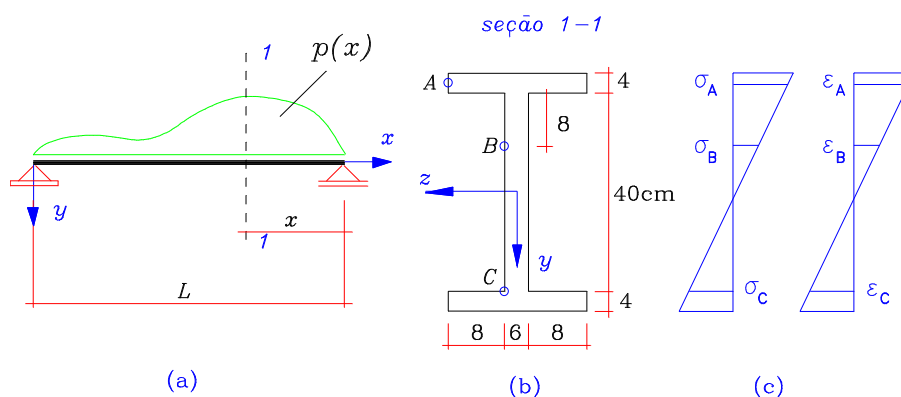
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{0,47}{2} = 0,235 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{0,33}{2} = 0,165 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto, a máxima tensão de cisalhamento ocorre num plano a  $45^\circ$  com o plano definido pelas direções  $x$  e  $z$ .

**Exemplo 5:** Uma viga biapoiada, de seção transversal "I", é sujeita a um carregamento distribuído qualquer, como ilustra a figura 9.10. Monitoraram-se nesta viga as deformações

longitudinais nos pontos A, B e C pertencentes a uma mesma seção transversal, medindo-se:  $\varepsilon_A = -11.10^{-6}$ ;  $\varepsilon_B = -5.10^{-6}$  e  $\varepsilon_C = 1.10^{-5}$ , sendo que um deles está incorreto. Pede-se determinar qual está incorreto e qual deve ser o valor correto. Em seguida, pede-se calcular o valor do momento de flexão atuante na seção, adotando-se  $E=2000 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 9.10 - Viga em flexão**

Em coerência com a teoria de vigas, a distribuição de deformações longitudinais numa seção qualquer é linear; conseqüentemente, para material elástico linear o diagrama de tensões também será linear.

A identificação da medida incorreta resulta de uma análise da proporcionalidade, que deve existir, entre as deformações longitudinais nos pontos A, B e C. Tal proporcionalidade escreve-se na forma:

$$\frac{\varepsilon_A}{-22} = \frac{\varepsilon_B}{-12} = \frac{\varepsilon_C}{20} \rightarrow \frac{-11.10^{-6}}{-22} = \frac{-5.10^{-6}}{-12} = \frac{1.10^{-5}}{20}$$

$$\therefore 5.10^{-7} \neq 4,17.10^{-7} \neq 5.10^{-7}$$

Conclui-se que a medida tomada no ponto B é incorreta. O seu valor correto, de acordo com a proporcionalidade entre as deformações, é  $\varepsilon_B = -6.10^{-6}$ .

O valor do momento de flexão atuante na seção pode ser determinado a partir de sua relação com a tensão normal em

qualquer ponto da seção, em particular os pontos A, B ou C.

Por se tratar de uma viga, sabe-se que  $\sigma_x \neq 0$  e  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . Portanto, a relação entre a tensão normal e a deformação na direção  $x$ , escreve-se na forma:

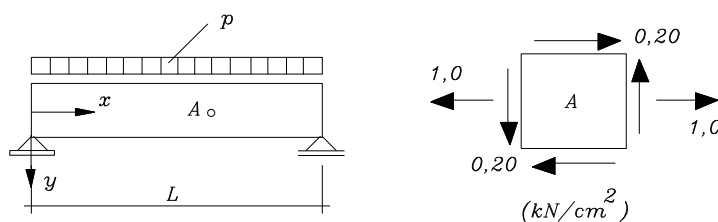
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E}$$

Adotando-se o ponto "C" como ponto de referência, o valor de "M" resulta de:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E \rightarrow \sigma_x^C = \varepsilon_x^C E = 2 \cdot 10^{-2} = \frac{M}{I_z} y$$

$$M = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{20} \left[ \frac{22 \cdot 48^3}{12} - 2 \left( \frac{8 \cdot 40^3}{12} \right) \right] = 117,42 \text{ kN.cm}$$

**Exemplo 6:** No ponto A da viga biapoiada apresentada na figura 9.11, são conhecidas as tensões normal na direção  $x$  e de cisalhamento. Pede-se determinar em qual direção deverá ser colocado um extensômetro elétrico para que a medida indicada no mesmo seja nula. Dados complementares:  $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$  e  $\nu = 0,25$ .



**Figura 9.11 - Viga biapoiada**

A deformação procurada está em direção inclinada com relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Portanto, para determiná-la aplica-se a relação:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

As componentes de deformação que aparecem na relação anterior podem ser calculadas, em função das componentes de

tensão conhecidas, por meio da lei de Hooke, lembrando-se que nas vigas o estado é plano de tensão:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{I}{2000} = 5.10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -0,25.5.10^{-4} = -1,25.10^{-4}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2000}{2,50} = 800 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0,20}{800} = 2,5.10^{-4}$$

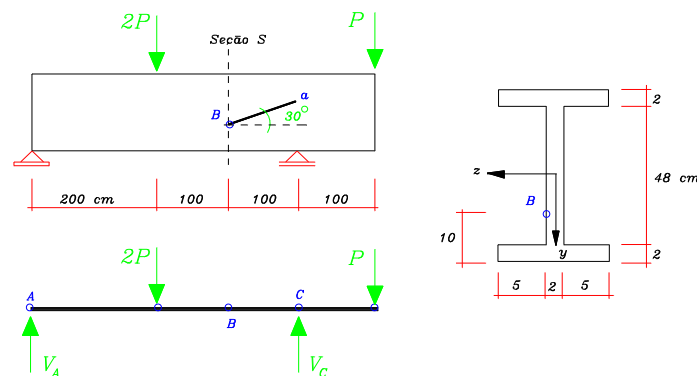
$$\varepsilon_{\bar{x}} = 5.10^{-4} \cos^2 \alpha - 1,25.10^{-4} \operatorname{sen}^2 \alpha + 2,5.10^{-4} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$$

$$5.10^{-4} (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 1,25.10^{-4} \operatorname{sen}^2 \alpha + 1,25.10^{-4} \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

$$5.10^{-4} - 6,25.10^{-4} \operatorname{sen}^2 \alpha + 1,25.10^{-4} \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

Finalmente, por tentativa, obtém-se:  $\alpha = 72,8^\circ$ .

**Exemplo 7:** No ponto "B" da viga bi-apoiada, ilustrada na figura 9.12, foi medida a deformação  $\varepsilon_a = 5.10^{-4}$ , na direção "a", indicada na mesma figura. Sabendo-se que  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$  e  $\nu = 1/3$ , pede-se determinar o valor de  $P$ .

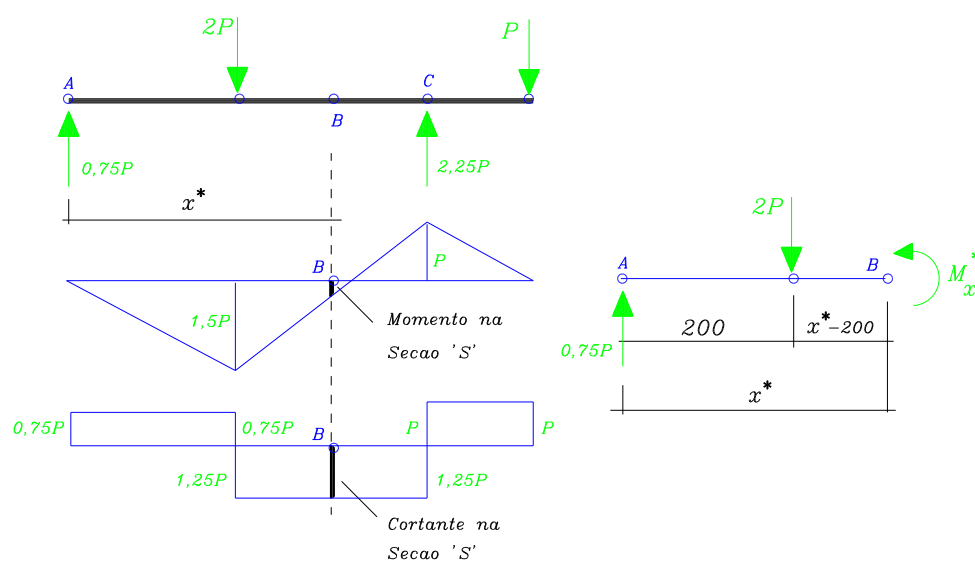


**Figura 9.12 - Viga bi-apoiada**

Inicialmente, por equilíbrio, determinam-se os diagramas de momento fletor e força cortante:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P \cdot 5 + 2P \cdot 2 - 4 \cdot V_C = 0 \rightarrow V_C = 2,25P$$

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow V_A + V_C = 3P \rightarrow V_A = 0,75P$$



**Figura 9.13 - Diagramas de estado**

Pelos diagramas, conclui-se que o valor da força cortante na seção "S" da viga é  $1,25P$ .

Já o valor do momento fletor na mesma seção de interesse, pode-se obter por equilíbrio, tomando-se os momentos das forças à sua esquerda, por exemplo:

$$\sum M_D = 0 \rightarrow M_{x^*} = (0,75P)x^* - (2P)(x^* - 2,0)$$

$$\therefore p/x^* = 3,0 \rightarrow M_{x^*} = 2,25P - 2P(3,0 - 2,0) = 0,25P$$

Os valores  $M = 0,25P$  (kN.m) e  $V = 1,25P$  (kN) atuantes na seção "S", podem ser relacionados com as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ . É importante lembrar que  $\sigma_y = 0$  nos casos de viga.

Para a determinação das tensões normal e de cisalhamento na altura do ponto "B", interessam os valores de momento de inércia da seção, em relação ao eixo z, e do momento estático na altura do ponto B:

$$I_z = \frac{2 \cdot 48^3}{12} + \left[ \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 12 \cdot 2 \cdot (25)^2 \right] \cdot 2 = 48448 \text{ cm}^4$$

$$M_S = (2 \cdot 10 \cdot 25) + (10 \cdot 2 \cdot 21) = 920 \text{ cm}^3$$

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20000}{2(1+1/3)} = 7500 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_x = \frac{M_B}{I_z} y_B = \frac{25 P}{48448} \cdot 16 = 8,256 \cdot 10^{-3} P \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_B M_S}{b I_z} = \frac{1,25 P \cdot 920}{2 \cdot 48448} = 0,012 P \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

Por outro lado,  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  podem ser relacionados com a medida de deformação  $\varepsilon_a$ . Assim, segue que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{8,256 \cdot 10^{-3} P}{20000} = 4,128 \cdot 10^{-7} P$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{8,256 \cdot 10^{-3} P}{3 \cdot 20000} = -1,376 \cdot 10^{-7} P$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0,012 P}{7500} = 1,6 \cdot 10^{-6} P$$

e, para  $\alpha = 30^\circ$ ,

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

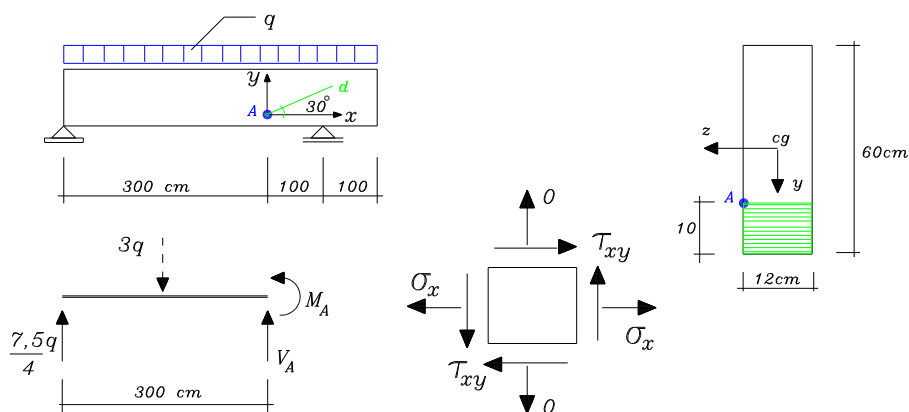
$$5 \cdot 10^{-4} = (4,128 \cdot 10^{-7} P) \cdot 0,75 - (1,376 \cdot 10^{-7} P) \cdot 0,25 + (1,6 \cdot 10^{-6} P) \cdot 0,50$$

$$5 \cdot 10^{-4} = 1,0752 \cdot 10^{-6} P \rightarrow P = 465,03 \text{ kN}$$

**Exemplo 8:** A viga, ilustrada na figura 9.14, deve estar submetida a um carregamento  $q$  uniformemente distribuído.

Determinar o valor da carga  $q$  e a deformação  $\varepsilon_y$  no ponto A, sabendo-se que:

$$E=2000 \text{ kN/cm}^2, \quad \nu = 0,25 \text{ e } \varepsilon_d = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$



**Figura 9.14 - Viga submetida a carregamento distribuído**

Para a viga em estudo, na seção transversal que contém o ponto.

Na seção transversal que contém o ponto A atuam os esforços:  $M_a = 450q/4$  (kN.cm) e  $V_a = 4,50q/4$  (kN).

Com os dados sobre a seção transversal indicada, determinam-se:  $I_z = 216000 \text{ cm}^4$  e, com referência ao ponto A,  $M_s = (12 \cdot 10) \cdot 25 = 3000 \text{ cm}^3$ . Com esses valores, tem-se que:

$$\sigma_x = \frac{M_A}{I_z} y_a = \frac{20 \cdot 450q}{4 \cdot 216000} = 1,04 \cdot 10^{-2} q$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_A M_{SA}}{b I_z} = \frac{3000 \cdot 4,5q}{4 \cdot 12 \cdot 216000} = 0,13 \cdot 10^{-2} q$$

A medida de deformação dada é segundo uma direção inclinada com relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Para ela vale a relação:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

As componentes de deformação que aparecem na relação acima podem ser expressas em função das componentes de tensão por meio

da lei de Hooke. Lembrando-se que na viga tem-se um estado plano de tensão, resultam:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] = \frac{\sigma_x}{E} ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} ;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{com} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2000}{2,50} = 800 \text{ kN/cm}^2 .$$

Levando-se em conta essas relações, segue que:

$$\varepsilon_d = \frac{\sigma_x}{E} \cos^2 30 - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sin^2 30 + \frac{\tau_{xy}}{G} \sin 30 \cos 30 = 0,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{3,104 \cdot 10^{-2} q}{4.2000} - \frac{0,25 \cdot 1,04 \cdot 10^{-2} q}{2000 \cdot 4} + \frac{0,13 \cdot 10^{-2} q \sqrt{3}}{800 \cdot 4} = 0,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\therefore q = 11,686 \text{ kN/cm}^2 ; \quad \varepsilon_y = -\frac{0,25 \cdot 1,04 \cdot 10^{-2} \cdot 11,686}{2000} = 1,52 \cdot 10^{-5}$$

## 10 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Costuma-se classificar os materiais de uso comum em engenharia em dois grandes grupos, de acordo com sua capacidade de deformação: os materiais frágeis e os dúcteis. Os primeiros rompem após apresentarem níveis de deformação bastante pequenos, enquanto que os últimos se deformam significativamente antes da ruptura.

Essa classificação é limitada, pois pressupõe que os materiais sejam livres de defeitos internos. Na realidade, defeitos de diferentes naturezas são intrínsecos a qualquer meio



e afetam diretamente a sua capacidade de deformação (dando origem aos chamados efeitos de escala, nos quais a resposta a certo regime de deformação passa de frágil para dúctil dependendo das dimensões do corpo). Apesar dessa importante limitação, a classificação acima serve aos objetivos deste texto, sem prejuízo das análises que seguem.

Além das características de ductilidade ou fragilidade, a heterogeneidade do meio também afeta a sua resposta mecânica, que pode ser diferente de acordo com o tipo da solicitação. Por exemplo, o concreto, um material composto, é heterogêneo, mostrando-se frágil nas solicitações predominantes de tração e dúctil nas de compressão, devido às características de cada um de seus componentes e da ligação entre eles. Já os metais, por possuírem uma estrutura interna bastante homogênea, apresentam sempre uma boa deformabilidade para diferentes tipos de solicitação.

Por esses motivos, entre outros, a capacidade resistente dos materiais é o resultado de uma combinação de efeitos, alguns deles mais outros menos importantes, o que torna difícil a tarefa de formular matematicamente relações que permitam prever limites para ela em situações mais complexas de solicitação. Entretanto, identificar estados de solicitação que possam exceder a capacidade de resistência dos materiais é algo de grande importância para a realização de projetos seguros e, portanto, é preciso buscar bases ou critérios que permitam efetuar tal julgamento.

Uma alternativa para contornar as dificuldades de uma formulação geral para a identificação de situações limites de resistência dos materiais consiste em buscar interpretações mais simples, porém plausíveis, dos fenômenos responsáveis pela ruptura, daí resultando os critérios de resistência. Por exemplo, de acordo com o tipo de material, pode-se postular que a limitada resistência à tensão normal, ou então, à tensão de cisalhamento, seja a responsável pela eventual ruptura. Uma consequência dessa maneira de abordar a questão é que certo

critério acaba por se aplicar melhor a um do que a outro material, havendo, portanto, a necessidade de se proporem diferentes critérios.

Matematicamente cada critério é representado por uma relação, envolvendo as componentes de tensão, permitindo quantificar de modo equivalente, por assim dizer, a intensidade do estado local de sollicitação.

Por outro lado, para intensidades das resistências postuladas como responsáveis pela ruptura, adotam-se medidas que podem ser determinadas em laboratório, realizando-se ensaios uniaxiais de tração e compressão, e também de cisalhamento simples. De acordo com a hipótese sobre a ruptura, uma das medidas passa a ser comparada com a intensidade equivalente calculada com a expressão do critério correspondente. Segue dessa comparação, a identificação de estados de tensão admissíveis ou não.

No que segue, admite-se que os materiais em estudo sejam livres de defeitos ou vazios iniciais, constituindo-se em meios contínuos e homogêneos. Desse modo, o conceito de fragilidade ou ductilidade fica diretamente relacionado à sua capacidade de deformação. A questão das diferenças intrínsecas de resposta de acordo com o tipo de sollicitação, típicas de materiais como o concreto, por exemplo, poderão ser levadas em conta adotando-se diferentes capacidades resistentes (níveis de tensão) para a tração e compressão.

Os critérios de resistência aqui estudados são basicamente critérios de ruptura e objetivam caracterizar estados limites de tensão que possam violar a capacidade resistente de um determinado material, desconsiderando-se a eventual existência de deformações residuais.

Por outro lado, existem materiais dúcteis como o aço ou ligas especiais, que de fato apresentam acentuada quantidade de deformação residual antes da ruptura. Neste caso, alguns dos critérios aqui apresentados, com a conveniente escolha da tensão de referência, podem ser empregados como critérios de

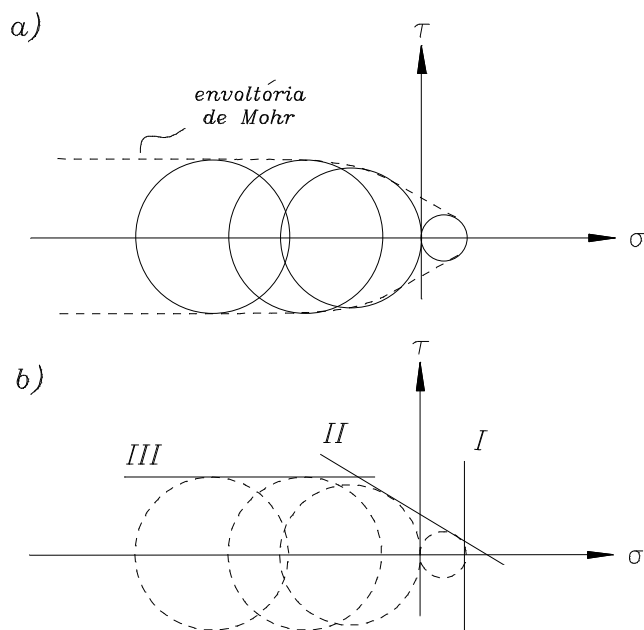
plastificação, passando a caracterizar os limites de resposta elástica.

Nos itens seguintes, apresentam-se critérios de uso mais simples e que se aplicam à boa parte dos materiais empregados em engenharia; para cada um deles, discutem-se suas hipóteses fundamentais e as expressões que os representam.

### *10.1 Envoltória de Mohr*

Uma representação que serve para compreender melhor, e visualizar, as combinações de sollicitação que levam à ruptura local de certo material, resulta da construção, num sistema de eixos  $(\sigma, \tau)$ , dos círculos de Mohr máximos de tensões principais  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ , com  $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$ . Os círculos correspondem a diversas situações de sollicitações limites, realizadas em laboratório, variando desde a tração e a compressão simples até os estados duplos e triplos.

A envoltória do conjunto de círculos reúne as combinações de sollicitações correspondentes a estados limites de ruptura (v.fig.10.1a). Observa-se que a região de  $\sigma < 0$  da resposta ilustrada na figura é típica de materiais que apresentam grande resistência a estados predominantes de compressão, incluindo-se aí os concretos, as rochas e os metais, não sendo o caso, por exemplo, dos solos não saturados.



**Figura 10.1 - Visualização das condições de ruptura pela envoltória de Mohr**

Tomando-se uma linearização por partes da envoltória, (v.fig.10.1b), nota-se que a resposta do material muda de acordo com o regime e intensidade das tensões. Nessa mudança, algumas características distintas típicas dos materiais dúcteis e frágeis podem ser identificadas, e a partir dessa análise resultam sugestões para critérios mais simples de resistência.

Na envoltória linearizada, distinguem-se três trechos:

- No trecho I a ruptura é governada pela resistência à tração pura. Um critério baseado somente nesta condição poderia ser aplicado a materiais frágeis não resistentes à tração como o concreto ou o giz;

- No trecho II a ruptura é governada pela combinação, linear, das tensões de cisalhamento e normal, o que se observa em materiais granulares como o concreto, por exemplo;

- No trecho III observa-se que não há influência de estados hidrostáticos (nos quais  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) sobre a ruptura, sendo a mesma governada pelo cisalhamento máximo, ou a semi-diferença entre as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ . Um critério com essas características aplica-se aos materiais dúcteis como os metais.

Nesse caso, a resistência ao cisalhamento pode ser interpretada como valor de referência para identificar o início de um regime de resposta elasto-plástica do material.

Os critérios de resistência mais simples decorrem da adoção de cada um dos trechos lineares em substituição à envoltória de Mohr e, portanto, aplicam-se melhor a uma ou outra classe de materiais (frágeis ou dúcteis).

### 10.2 Critério da máxima tensão normal

Este critério deriva da adoção do trecho I da envoltória linearizada como limitante de estados de tensão admissíveis. A limitada resistência à tração é a interpretação para o fenômeno da ruptura.

De uma maneira mais formal, a ruptura ocorre quando a máxima tensão normal ultrapassa o valor de referência  $\sigma_T > 0$  estabelecido com base na resistência à tração simples do material. A relação que verifica, segundo o critério, se um estado de tensão é admissível, ou não, é a seguinte:

$$\sigma_{m\acute{a}x} \leq \sigma_T \quad (10.1)$$

Nota-se que de acordo com a condição acima, o material pode resistir indefinidamente a estados triaxiais de compressão. Alguns materiais frágeis como o concreto e as rochas possuem uma característica similar a essa.

Para a aplicação do critério, no sentido de verificar se um certo material pode resistir a um determinado regime de sollicitação, deve-se calcular, no ponto mais sollicitado do meio, a maior tensão principal normal e compará-la com  $\sigma_T$ . O regime de sollicitação será admissível se a (10.1) for verificada, caso contrário será inadmissível. Evidenciando-se a ruptura, ela se dará segundo um plano ortogonal à direção da tensão normal máxima.

**Exemplo 1:** Uma barra com seção circular (diâmetro de 10 cm) é constituída por um material que apresenta resistência à tração simples  $\sigma_T = 1,0 \text{ kN/cm}^2$ . Determinar os valores limites de força axial de tração e momento de torção que podem ser aplicados nas extremidades da barra.



a) *Determinação da força normal:*

A tensão normal em qualquer ponto da barra, segundo um plano ortogonal ao eixo, é constante e dada por  $\sigma_x = \frac{F}{A}$ ; esse valor é também igual à tensão principal maior  $\sigma_1$ . Portanto, aplicando-se o critério segue que:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \leq \sigma_T \quad \therefore F \leq \sigma_T A$$

O valor máximo de força normal resulta:

$$F = \frac{\pi 10^2}{4} \cdot 1,0 = 78,5 \text{ kN}$$

b) *Determinação do momento de torção*

Os momentos aplicados nas extremidades da barra geram uma distribuição de torção constante ao longo do seu comprimento. Assim, para fins de aplicação do critério, deve-se encontrar, numa seção genérica, o ponto mais solicitado.

Sabe-se que na seção o momento de torção provoca tensões de cisalhamento que se distribuem de forma linearmente

crescente a partir do centro de gravidade. Portanto, a tensão de cisalhamento máxima ocorre nos pontos situados no perímetro e, para a seção circular, pode ser calculada por:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16 M_T}{\pi D^3}$$

As componentes de tensão num ponto considerando-se o plano da seção transversal e o plano ortogonal a ele são exclusivamente de cisalhamento. Tensões normais aparecem somente segundo planos inclinados em relação àqueles. Em particular, a tensão normal máxima atua num plano inclinado a  $45^\circ$  com o eixo da barra e o seu valor é igual a  $\tau_{\text{máx}}$ . Portanto, aplicando-se o critério resulta:

$$\frac{16 M_T}{\pi D^3} \leq \sigma_T \quad \therefore M_T \leq \frac{\pi D^3}{16} \sigma_T$$

Substituindo-se os dados, o valor limite do momento de torção resulta:

$$M_T = 196,3 \text{ kN.cm}$$

### 10.3 Critério de Mohr-Coulomb

Este critério deriva da adoção do trecho II da envoltória de Mohr linearizada como limitante de estados de tensão admissíveis. Portanto, a combinação das tensões normal e de cisalhamento é a responsável pela ruptura.

A proporcionalidade entre as componentes de tensão, admitida pelo critério, é bastante razoável e pode ser justificada pela analogia com o modelo simples do escorregamento de um sólido sobre uma superfície com atrito.

Considere-se, então, um sólido apoiado sobre uma superfície, com coeficiente de atrito  $\mu$ , submetido a uma força

$F$  inclinada de um ângulo  $\alpha$  com a normal ao plano de apoio (v.fig.10.2a). As componentes normal e tangencial da força  $F$  resultam:

$$N = -F \cos \alpha \quad ; \quad T = F \sin \alpha \quad (10.2 \text{ a,b})$$

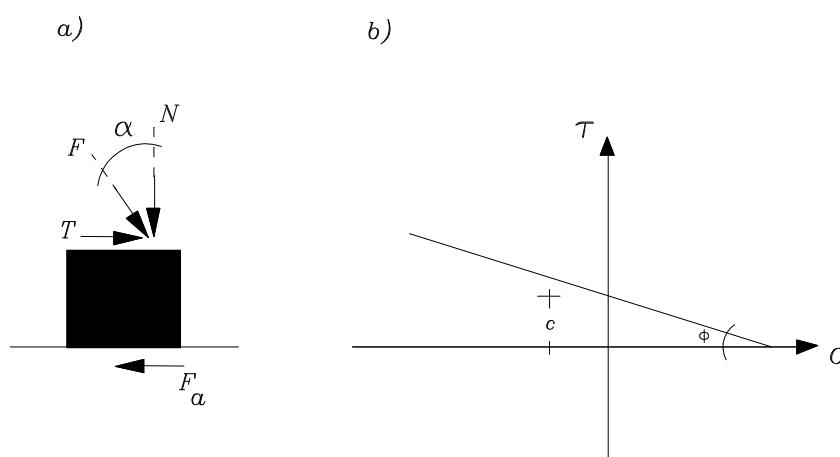
A força de atrito, por sua vez, é proporcional à força normal:

$$F_a = \mu N = -\mu F \cos \alpha \quad (10.3)$$

e a ruptura ocorre a partir do instante em que a componente horizontal  $T$  iguala  $F_a$  ou:

$$F \sin \alpha = -\mu F \cos \alpha \quad \rightarrow \quad -\operatorname{tg} \alpha = \mu \quad (10.4)$$

No caso dos meios contínuos, num certo ponto de interesse, o modelo de escorregamento em questão pode ser aplicado considerando-se, idealmente, 'superfícies internas' sobre as quais se apóiam as partes do material. Nas faces de uma das superfícies internas adjacentes ao ponto, atuam componentes de tensão normal e de cisalhamento que correspondem às componentes  $N$  e  $T$  de  $F$  no modelo do sólido.



**Figura 10.2 - a) escorregamento do sólido com atrito  
b) envoltória linearizada**

A correspondência com o coeficiente de atrito daquele modelo é realizada por meio de um ângulo  $\phi$ , característico do



efeito de atrito interno do material, de modo que:  $\mu = tg\phi$ .

Nessas condições a condição de ruptura, equivalente àquela expressa pela (10.4) no modelo de escorregamento simples, resulta:

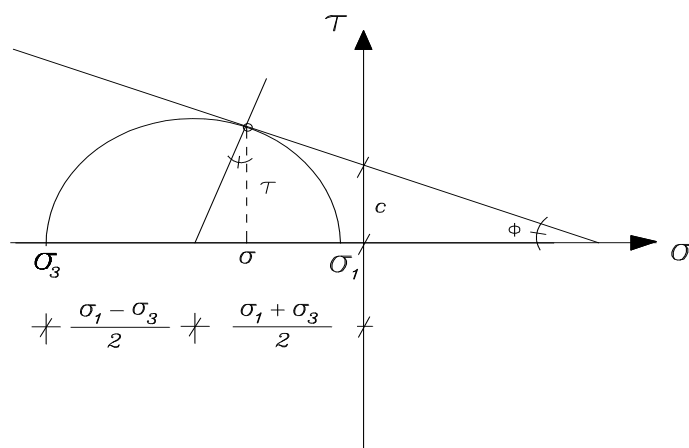
$$\tau = -\sigma tg\phi \quad (10.5)$$

Observa-se, em primeiro lugar, que a relação entre  $\sigma$  e  $\tau$  resultou linear. Além disso, como indica a relação (10.5), a ruptura é condicionada pela resistência ao cisalhamento (estados admissíveis são tais que  $\tau \leq -\sigma tg\phi$ ). Em particular, se não houver  $\sigma$  a ruptura é imediata para qualquer valor de  $\tau$ .

Essa forma dada ao modelo aplica-se diretamente a materiais sem coesão interna como a areia seca (que somente admite  $\sigma \leq 0$ ). Entretanto se a areia estiver úmida, ela apresentará uma certa coesão, o que significa uma capacidade de resistência ao cisalhamento mesmo com  $\sigma = 0$ . Para contemplar também o caso dos materiais coesivos, a relação do critério que caracteriza estados admissíveis passa a ser expressa por:

$$\tau \leq -\sigma tg\phi + c \quad (10.6)$$

No sistema  $(\sigma, \tau)$  a relação anterior representa uma reta que reproduz a linearização representada pelo trecho II do critério de Mohr (v.fig.10.2b). Segundo a representação gráfica, círculos correspondentes a estados de tensão admissíveis devem estar dentro de uma região limitada pela reta do critério (v.fig.10.3).



**Figura 10.3 - Estado de tensão crítico genérico**

Tendo-se em vista a representação gráfica, e considerando-se um estado limite genérico dado por um círculo que tangencia a reta do critério, é possível exprimir a relação (10.6) em função de tensões principais ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

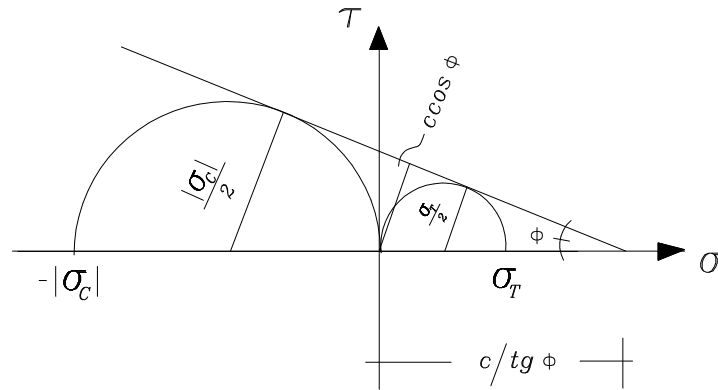
Pela geometria indicada na figura 10.3, segue que:

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} \cos \phi \\ \sigma &= \frac{(\sigma_3 + \sigma_1)}{2} - \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (10.7 \text{ a,b})$$

Substituindo-se as (10.7) na (10.6), após alguns desenvolvimentos resulta:

$$\frac{\sigma_1(1 + \operatorname{sen} \phi)}{2c \cos \phi} - \frac{\sigma_3(1 - \operatorname{sen} \phi)}{2c \cos \phi} \leq 1 \quad (10.8)$$

Um terceiro modo de escrever a expressão do critério envolve as resistências à tração ( $\sigma_T$ ) e à compressão simples ( $\sigma_C$ ), que são mais facilmente identificáveis em laboratório. A relação entre essas resistências e os parâmetros de coesão e do ângulo de atrito, segue da semelhança de triângulos indicada na figura 10.4:



**Figura 10.4 - Relação entre parâmetros do critério**

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{\sigma_T}{2 \left( \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} - \frac{\sigma_T}{2} \right)} \quad ; \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{|\sigma_c|}{2 \left( \frac{c}{\operatorname{tg} \phi} + \frac{|\sigma_c|}{2} \right)} \quad (10.9 \text{ a,b})$$

Operando-se nas (10.9) resultam:

$$\sigma_T = \frac{2c \cos \phi}{(1 + \operatorname{sen} \phi)} \quad ; \quad |\sigma_c| = \frac{2c \cos \phi}{(1 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (10.10 \text{ a,b})$$

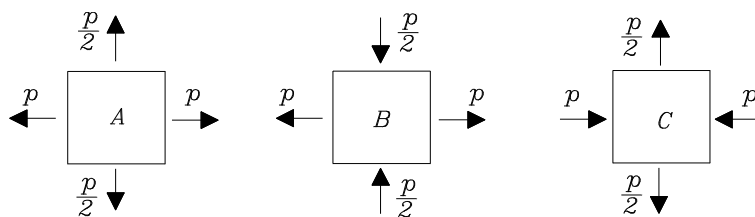
Finalmente, a expressão do critério passa a ser:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_T} - \frac{\sigma_3}{|\sigma_c|} \leq 1 \quad (10.11)$$

ou ainda

$$m \frac{\sigma_1}{|\sigma_c|} - \frac{\sigma_3}{|\sigma_c|} \leq 1 \quad \text{sendo} \quad m = \frac{|\sigma_c|}{\sigma_T} \quad (10.12)$$

**Exemplo 2:** O material, ferro fundido, segue o critério de Mohr-Coulomb, onde  $\sigma_T = 5 \text{ kN/cm}^2$  e  $|\sigma_c| = 10 \text{ kN/cm}^2$ . Determinar, para os casos A, B e C ilustrados na figura 10.5, o valor limite da carga p.



**Figura 10.5 - Estados planos de tensão**

A resolução segue pela aplicação da relação (10.11), observando-se que pelos dados do problema:  $m = \frac{|\sigma_c|}{\sigma_T} = 2$ .

Em cada caso, identificam-se as tensões principais, ordenando-as na forma:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Como se tratam de estados planos de tensão, sempre haverá uma componente nula de tensão principal.

- **Caso A:**  $\sigma_1 = p$  ;  $\sigma_2 = p/2$  ;  $\sigma_3 = 0$  .

O valor limite da carga  $p$  resulta:  $p = \bar{\sigma}_T = 5 \text{ kN/cm}^2$

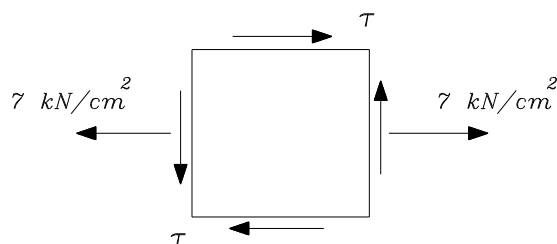
- **Caso B:**  $\sigma_1 = p$  ;  $\sigma_2 = 0$  ;  $\sigma_3 = -p/2$  .

$$2 \frac{p}{10} - \frac{-p}{2 \cdot 10} = 1 \quad \therefore p = 4 \text{ kN/cm}^2$$

- **Caso C:**  $\sigma_1 = p/2$  ;  $\sigma_2 = 0$  ;  $\sigma_3 = -p$  .

$$2 \frac{p}{2 \cdot 10} - \frac{-p}{10} = 1 \quad \therefore p = 5 \text{ kN/cm}^2$$

**Exemplo 3:** Um material segue o critério de Mohr-Coulomb, apresentando os seguintes valores de resistência:  $\sigma_T = 7 \text{ kN/cm}^2$  e  $|\sigma_c| = 14 \text{ kN/cm}^2$ . Determinar, para o estado plano de tensão indicado na figura 10.6, o valor de  $\tau$  que leva o estado em questão à ruptura.



**Figura 10.6 - Estado plano de tensão**

A resolução segue pela aplicação da relação (10.11), observando-se que pelos dados do problema:  $m = \frac{|\sigma_c|}{\sigma_T} = 2$ .

O passo essencial é determinar as tensões principais no plano, ordenando-as, considerando-se de valor nulo a terceira tensão principal correspondente à direção ortogonal ao plano.

As tensões principais no plano são dadas por:

$$\sigma_1 = 3,5 + \sqrt{3,5^2 + \tau^2} \quad ; \quad \sigma_2 = 3,5 - \sqrt{3,5^2 + \tau^2}$$

Denominando-se por  $x = \sqrt{3,5^2 + \tau^2}$ , segue o ordenamento das tensões principais para fins de aplicação do critério:

$$\sigma_1 = 3,5 + x \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = 3,5 - x$$

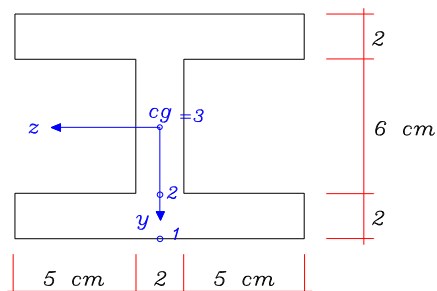
A (10.11) resulta:

$$2 \frac{(3,5 + x)}{14} - \frac{(3,5 - x)}{14} = 1 \quad \therefore x = 5,833$$

Finalmente, da definição de  $x$  segue que:  $\tau = \pm 4,67 \text{ kN/cm}^2$

**Exemplo 4:** Uma viga de ferro fundido, com seção transversal ilustrada na figura 10.7, está sujeita a ação de um momento fletor  $M = 650 \text{ kN.cm}$  e de uma força cortante  $V = 55 \text{ kN}$ . Verificar a capacidade resistente da seção aos esforços mencionados.

Dados complementares:  $\sigma_T = 4 \text{ kN/cm}^2$  e  $|\sigma_c| = 8 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 10.7 - Seção transversal de uma viga**

Para a análise em questão, escolhem-se alguns pontos da seção e verifica-se a admissibilidade, ou não, dos estados de tensão correspondentes de acordo com o critério de Mohr-Coulomb.

Lembra-se que nas vigas os estados de tensão são planos, sendo, ainda,  $\sigma_y = 0$ .

Os pontos a serem analisados estão indicados na figura 10.7; tomando-se partido da simetria, todos eles estão localizados do lado positivo do eixo  $y$ .

Admite-se que o momento solicitante provoque tração nos pontos 1 e 2. Já os sinais das tensões de cisalhamento não tem importância na análise (uma vez que os seus valores ao quadrado é que entram nos cálculos das tensões principais), de modo que essas componentes serão consideradas positivas.

Um primeiro dado geométrico de interesse é o momento de inércia da seção em relação ao eixo  $z$ :

$$I_z = \frac{12 \cdot 10^3}{12} - 2 \cdot \left( \frac{5 \cdot 6^3}{12} \right) = 820 \text{ cm}^4$$

- **Para o ponto 1 da seção transversal:**

$$\sigma_x = \frac{650}{820} \cdot (5,0) = 3,96 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 ;$$

$$\sigma_1 = \frac{3,96}{2} + \sqrt{\left( \frac{3,96}{2} \right)^2 + 0} = 3,96 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 0 ;$$

O ordenamento das tensões principais, para fins de aplicação do critério resulta:  $\sigma_1 = 3,96 \text{ kN/cm}^2$  ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Segue,

então, que:

$$2 \cdot \frac{3,96}{8} \leq 1 \quad \therefore \text{ o estado é admissível no ponto 1.}$$

- **Para o ponto 2 da seção transversal:**

$$\sigma_x = \frac{650}{820} \cdot (3,0) = 2,378 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_y = 0 \quad ;$$

$$\tau_{xy} = \frac{55 \cdot [12.4.2]}{2.820} = 3,22 \text{ kN/cm}^2 \quad ;$$

$$\sigma_1 = 1,189 + \sqrt{1,189^2 + 3,22^2} = 4,62 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 1,189 - \sqrt{1,189^2 + 3,22^2} = -2,24 \text{ kN/cm}^2$$

O ordenamento das tensões principais resulta:

$$\sigma_1 = 4,62 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = -2,24 \text{ kN/cm}^2.$$

Aplicando-se o critério, conclui-se que:

$$2 \cdot \frac{4,62}{8} - \frac{-2,24}{8} \geq 1 \quad \therefore \text{ o estado de tensão não é admissível e o}$$

material sofre ruptura no ponto.

- **Para o ponto 3 da seção transversal :**

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad ;$$

$$\tau_{xy} = \frac{55 \cdot [(12.4.2) + (2.3.1,5)]}{2.820} = 3,52 \text{ kN/cm}^2 \quad ;$$

$$\sigma_1 = 0 + \sqrt{0 + 3,52^2} = 3,52 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = -3,52 \text{ kN/cm}^2 \quad ;$$

O ordenamento das tensões principais resulta:

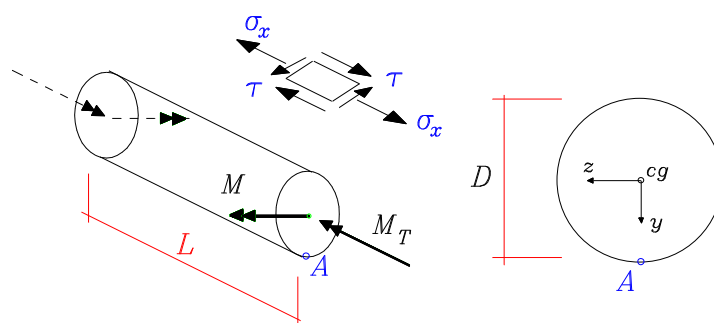
$$\sigma_1 = 3,52 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = -3,52 \text{ kN/cm}^2 \quad ;$$

Aplicando-se o critério, conclui-se que:

$$2 \cdot \frac{3,52}{8} - \frac{-3,52}{8} \geq 1 \quad \therefore$$

O estado de tensão não é admissível e o material sofre ruptura no ponto 3.

**Exemplo 5:** Um eixo em ferro fundido, cuja seção circular tem diâmetro  $D$ , está sujeito a momentos de flexão  $M = 300 \text{ kN.cm}$  e de torção  $M_T = 240 \text{ kN.cm}$ . Sendo  $\sigma_T = 3 \text{ kN/cm}^2$ ,  $|\sigma_C| = 9 \text{ kN/cm}^2$ , determinar o diâmetro do eixo.



**Figura 10.8 - Eixo submetido a flexão e torção**

Os momentos aplicados provocam, em cada ponto da peça, um estado plano de tensão, composto pela tensão normal associada ao momento de flexão e por uma tensão de cisalhamento associada ao momento de torção. Numa seção transversal, ambas as componentes de tensão tem distribuição linear, com valor nulo no centro de gravidade. Desse modo os pontos mais solicitados serão aqueles pertencentes ao perímetro da seção, como o ponto A indicado na figura 10.8.

No ponto A as componentes de tensão valem:

$$\sigma_x = \frac{M}{\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad ; \quad \tau = \frac{16 M_T}{\pi D^3} ;$$

As tensões normais principais no plano definido por  $(\sigma_x, \tau)$  resultam:



$$\sigma_1 = \frac{16}{\pi D^3} \left[ M + \sqrt{M^2 + M_t^2} \right] = \frac{16}{\pi D^3} \left[ 300 + \sqrt{300^2 + 240^2} \right] = \frac{3484,54}{D^3}$$

$$\sigma_2 = \frac{16}{\pi D^3} \left[ M - \sqrt{M^2 + M_t^2} \right] = \frac{16}{\pi D^3} \left[ 300 - \sqrt{300^2 + 240^2} \right] = -\frac{427,81}{D^3}$$

As tensões principais, ordenadas para a aplicação do critério são:  $\sigma_1 = 3484,54/D^3$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -427,81/D^3$ .

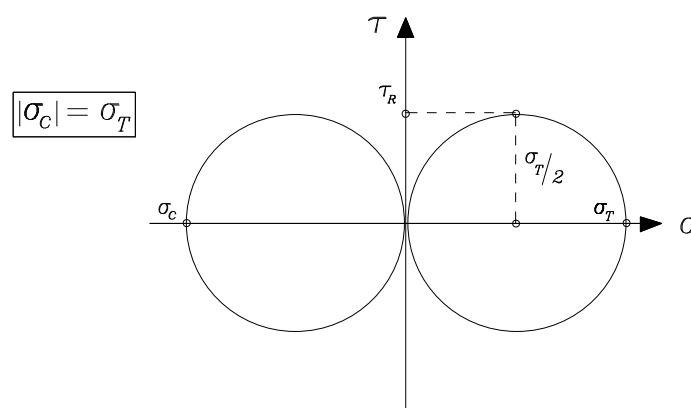
Segue, finalmente, que:

$$3 \cdot \frac{3484,54}{9D^3} + \frac{427,81}{9D^3} \leq 1 \quad \therefore D \geq 10,6 \text{ cm}$$

#### 10.4 Critério de Tresca

Este critério aplica-se a materiais dúcteis, que tenham as resistências à tração e à compressão uniaxiais praticamente iguais. Ele também deriva da analogia com o trecho III da envoltória de Mohr linearizada, adotado como limitante de estados de tensão admissíveis pelo material. Portanto, estados hidrostáticos de tensão não levam à ruptura, sendo a mesma provocada pela tensão de cisalhamento ou, de outro modo, por desvios daqueles estados.

Formalmente, o critério de Tresca, ou critério da máxima tensão de cisalhamento, admite que o material rompa quando a maior tensão de cisalhamento, definida em função das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , iguala um valor de referência  $\tau_R$  determinado num ensaio de cisalhamento simples.



**Figura 10.9 - Relação entre as resistências à tração e à compressão com a de cisalhamento**

A expressão geral do critério escreve-se na forma:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_R \quad (10.13)$$

A figura 10.9, ilustra a relação entre as resistências normais e a resistência ao cisalhamento. Assim, com base em que:

$\tau_R = \frac{\sigma_T}{2}$ , a (10.13) pode ser escrita como:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_T \quad (10.14)$$

Pode-se ainda, particularizar o critério para o caso plano de tensão ( $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ) que se apresenta no estudo das vigas em flexão. Nesse caso, as tensões principais atuantes num ponto da seção transversal, já ordenadas para fins de aplicação do critério são determinadas por:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10.15 \text{ a,b})$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

observando-se que  $\sigma_2 = 0$ . Substituindo-se as (10.15) na (10.14),

resulta a seguinte forma particular para o critério de Tresca:

$$\sigma_i = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_T \quad (10.16)$$

onde  $\sigma_i$  indica uma tensão ideal, ou equivalente, que mede a intensidade do estado de tensão no ponto.

**Exemplo 6:** Aplicando-se o critério de Tresca, deduzir uma expressão para a determinação do diâmetro  $D$  de um eixo submetido nas suas extremidades a momentos de flexão  $M$  e de torção  $M_T$ .

Como justificado no exemplo 5, as tensões normal e de cisalhamento nos pontos mais solicitados do eixo são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{M}{\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad ; \quad \tau = \frac{16M_T}{\pi D^3} ;$$

Substituindo-se essas expressões na (10.16), segue que:

$$\frac{32}{\pi D^3} \sqrt{M^2 + M_T^2} \leq \sigma_T$$

Definindo-se o momento equivalente  $M_i = \sqrt{M^2 + M_T^2}$ , resulta a seguinte relação para a determinação do diâmetro:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \sigma_T} M_i}$$

**Exemplo 7:** Determinar o valor mínimo do diâmetro para o eixo do exemplo 6, considerando-se os seguintes dados:  $M = 300 \text{ kN.cm}$ ;  $M_T = 240 \text{ kN.cm}$ ;  $\sigma_T = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

O momento equivalente resulta:

$$M_i = \sqrt{300^2 + 240^2} \cong 384,2 \text{ kN.cm}$$

Para o diâmetro mínimo, obtém-se:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi 10} \cdot 384,2} \rightarrow D_{\min} = 7,3 \text{ cm}$$

### 10.5 Critério de von Mises

O critério de von Mises, ou Critério da Máxima Energia de Distorção, é também dedicado à análise dos materiais de comportamento dúctil.

Analogamente ao critério de Tresca, postula-se que estados hidrostáticos de tensão não provocam ruptura. Esta acontece quando a energia de distorção capaz de ser absorvida no processo de deformação atinge um valor limite de referência.

Para definir a energia de distorção é necessário considerar, inicialmente, as decomposições aditivas dos tensores de tensão e de deformação em partes esféricas e anti-esféricas.

Tais decomposições se exprimem pelas seguintes relações:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = [A] + [B] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix}$$

(10.17)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = [C] + [D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

(10.18)

A energia de deformação por unidade de volume ( $u$ ) é definida em função do produto das tensões pelas respectivas deformações. Levando-se em conta a decomposição apresentada para os tensores, aquela energia acaba também sendo composta por duas parcelas: uma correspondente à variação de volume e outra à

variação de forma, ou de distorção. Assim sendo, com as (10.17) e (10.18), segue, por definição, que:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = u_V + u_D \quad (10.19)$$

onde  $u_V$  é a parcela de energia de volume, calculada pelo produto entre as matrizes  $A$  e  $C$ , que aparecem nas decomposições e  $u_D$  é a energia de distorção, obtida pelo produto das matrizes  $B$  e  $D$ . Observa-se que os produtos  $AD$  e  $BC$  são nulos.

Explicitando-se a parcela de energia de distorção, obtém-se:

$$u_D = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_m) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_m) + (\sigma_2 - \sigma_m) \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_m) + (\sigma_3 - \sigma_m) \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_m)] \quad (10.20)$$

Pode-se escrever essa parcela de energia somente em função de componentes de tensão, tendo-se em vista a lei de Hooke generalizada, que no caso das componentes principais assume a forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \quad ; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)] \end{aligned} \quad (10.21 \text{ a,b,c})$$

Substituindo-se as (10.21) na (10.20), após algumas simplificações resulta:

$$u_D = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (10.22)$$

A expressão (10.22) aplica-se a estados tridimensionais de tensão; para encontrar um valor de referência com o qual se pode compará-la para definir a admissibilidade do estado de tensão, considera-se um caso de ruptura por tração uniaxial. Neste estado, em particular, tem-se as seguintes componentes de tensão principais:  $\sigma_1 = \sigma_T$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , e o valor de referência para a

energia de distorção resulta:

$$u_D = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_T)^2 + (\sigma_T)^2] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_T^2 \quad (10.23)$$

O critério passa a ter a seguinte expressão:

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_T^2 \quad (10.24)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \sigma_T^2 \quad (10.25)$$

Pode-se também particularizar a expressão anterior para o estado plano de tensão que ocorre nas vigas em flexão. Nesse sentido, considerando-se as (10.15), segue da (10.25) que:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_T \quad (10.26)$$

**Exemplo 8:** Aplicando-se o critério de Mises, deduzir uma expressão para a determinação do diâmetro  $D$  de um eixo submetido nas suas extremidades a momentos de flexão  $M$  e de torção  $M_T$ . Em seguida, determinar o valor mínimo do diâmetro, considerando-se os seguintes dados:  $M = 300 \text{ kN.cm}$ ;  $M_T = 240 \text{ kN.cm}$ ;  $\sigma_T = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Analogamente à solução do exemplo 6, as tensões normal e de cisalhamento nos pontos mais solicitados do eixo são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{M}{\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad ; \quad \tau = \frac{16 M_T}{\pi D^3} ;$$

Substituindo-se essas expressões na (10.26), segue que:

$$\frac{32}{\pi D^3} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4} M_T^2} \leq \sigma_T$$

Definindo-se o momento equivalente  $M_i = \sqrt{M^2 + 3/4 M_T^2}$ , resulta a seguinte relação para a determinação do diâmetro:

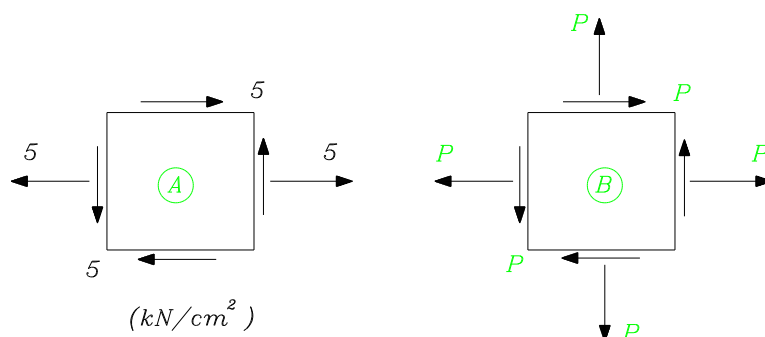
$$D \geq 3 \sqrt{\frac{32}{\pi \sigma_T} M_i}$$

Com os dados numéricos fornecidos, calcula-se o diâmetro mínimo:

$$D \geq 3 \sqrt{\frac{32}{\pi 10} \cdot 365} \quad \therefore \quad D_{min} = 7,2 \text{ cm}$$

.□

**Exemplo 9:** Para um material que segue o critério de von Mises (Energia de Distorção), são conhecidos os estados (A) e (B) ilustrados na figura 10.10, sendo que o estado (A) é admissível no limite. Pede-se calcular o valor admissível de  $p$  no estado (B):



**Figura 10.10 - Estados planos de tensão**

Com o estado (A), que é limite e típico das vigas, calcula-se a tensão de referência  $\sigma_T$  por:

$$\sigma_T = \sqrt{5^2 + 3 \cdot 5^2} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

As tensões principais do estado (B) resultam:

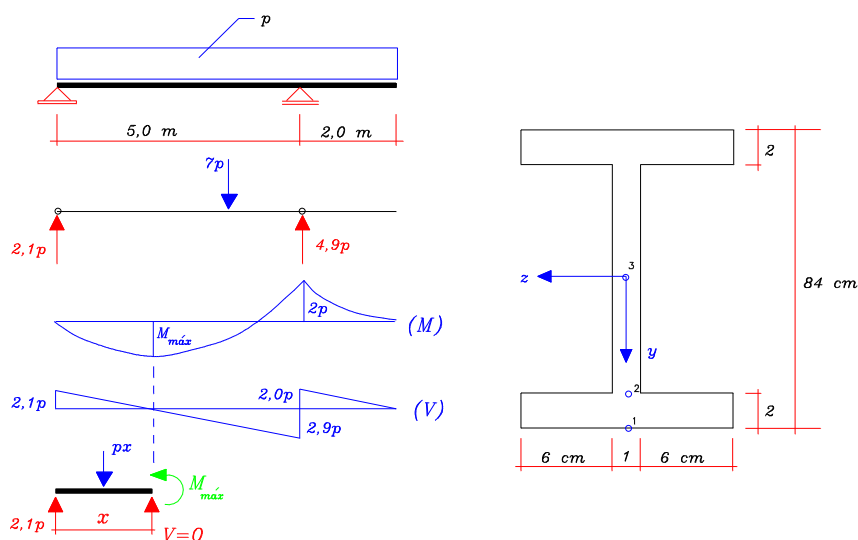
$$\sigma_1 = \frac{p+p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p-p}{2}\right)^2 + p^2} = 2p ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Aplicando-se a expressão (10.25) do critério, conclui-se que:

$$\sqrt{(2p)^2 + 0 + 0} \leq 10 \quad \therefore p \leq 5 \text{ kN/cm}^2$$

.□

**Exemplo 10:** Uma viga de material qualquer, está sujeita a ação de um carregamento  $p$  uniformemente distribuído ao longo de todo o seu comprimento e possui a seção transversal ilustrada na figura 10.11. Sendo  $\sigma_T = 4,0 \text{ kN/cm}^2$  e admitindo-se que o material segue o critério da máxima energia de distorção (von Mises), determinar o valor admissível da carga  $p$ .



**Figura 10.11 - Viga em flexão**

Da geometria da seção transversal e com os diagramas de momento de flexão e de força cortante, calculam-se os seguintes dados complementares:

. Momento de inércia da seção em relação ao eixo  $z$



$$I_z = \frac{13 \cdot 84^3}{12} - 2 \cdot \left[ \frac{6 \cdot 80^3}{12} \right] = 130096 \text{ cm}^4$$

. Posição da seção de momento fletor máximo

$$2,1p = px \quad \therefore \quad x = 2,1m$$

. Momento fletor máximo

$$M_{\text{máx}} = 2,1^2 p - \frac{2,1^2}{2} p = 2,205 p \text{ (kN.m)}$$

Adotando-se as seções de momento máximo e de momento negativo sobre o apoio como sendo as seções críticas existentes na viga, verifica-se, segundo o critério, a admissibilidade dos estados de tensão nos seguintes pontos:

a) Ponto 1 da seção de momento máximo :  $M = 22050p$  e  $V = 0$

Neste ponto, o estado de tensão possui somente uma componente não-nula de tensão principal. A aplicação do critério é imediata:

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_z} \cdot \frac{h}{2} = \frac{22050 p}{130096} \cdot 42 \leq 4 \quad \therefore \quad p \leq 0,562 \text{ kN/cm}$$

b) Ponto 2 da seção de momento negativo :  $M = 20000p$  e  $V = 290 p$

$$\sigma_x = \frac{20000 p}{130096} \cdot 40$$

$$\tau_{xy} = \frac{290 p \cdot (2 \cdot 13 \cdot 41)}{1 \cdot 130096}$$

$$\therefore \frac{p}{130096} \sqrt{(20000 \cdot 40)^2 + 3 \cdot (290 \cdot 26 \cdot 41)^2} \leq 4 \quad \rightarrow \quad p \leq 0,5405 \text{ kN/cm}$$

c) Ponto 3 da seção de momento negativo :  $M = 20000p$  e  $V = 290 p$

$$\sigma_x = \frac{20000p}{130096} \cdot (0) = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{290p \cdot (26 \cdot 41 + 40 \cdot 20)}{1 \cdot 130096} = \frac{541140p}{130096}$$

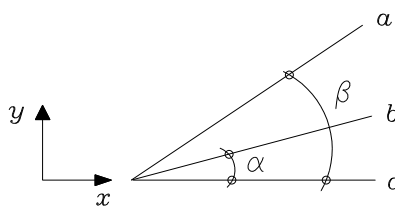
$$\therefore \frac{p}{130096} \sqrt{0^2 + 3 \cdot (541140)^2} \leq 4 \rightarrow p \leq 0,5552 \text{ kN/cm}$$

Portanto, o valor admissível para o carregamento distribuído é de  $p = 54,05 \text{ kN/m}$ .

.□

**Exemplo 11:** Num ponto de um meio submetido a um estado plano de tensão, foram medidas as deformações na direção "a", ilustrada na figura 10.12,  $\varepsilon_a = 5,1 \cdot 10^{-4}$  e na direção "b":  $\varepsilon_b = 3,0 \cdot 10^{-4}$ . Também é conhecida a tensão normal na direção "c":  $\sigma_c = -4,0 \text{ kN/cm}^2$ . Admitindo-se que o material segue o critério de von Mises, verificar se o estado de tensão no ponto é admissível.

Dados:  $\cos\alpha = 0,80$ ;  $\cos\beta = 0,60$ ;  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\nu = 0,25$ ;  $\sigma_T = 12,0 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 10.12 - Direções com valores de deformação e tensão conhecidos**

Para a aplicação do critério, devem ser calculadas as tensões principais no ponto. Para isto é necessário que se conheçam as componentes:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Essas componentes, por sua vez, determinam-se utilizando os valores conhecidos de

deformação linear e de tensão normal.

Inicialmente,  $\sigma_x = \sigma_c$ ;  $\tau_{xy}$  e  $\sigma_y$  resultam da aplicação da lei de Hooke sobre as relações entre  $\varepsilon_a$  e  $\varepsilon_b$  com  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ . As relações entre as componentes de deformação são:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \varepsilon_x \cos^2 \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \quad ; \\ \varepsilon_b &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

e a lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E}.$$

Combinando-se as relações acima e resolvendo-se o sistema nas incógnitas  $\tau_{xy}$  e  $\sigma_y$ , obtêm-se:

$$\sigma_y = 8,0 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 5,5 \text{ kN/cm}^2 \quad ;$$

As componentes de tensão principal, já ordenadas, então resultam:

$$\sigma_1 = \frac{-4+8}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4-8}{2}\right)^2 + 5,5^2} \cong 10,14 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{-4+8}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4-8}{2}\right)^2 + 5,5^2} \cong -6,14 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 0$$

Finalmente, aplicando-se a expressão do critério, conclui-se que:

$$\frac{1}{2} \left[ (10,14 - 0)^2 + (10,14 + 6,14)^2 + (0 + 6,14)^2 \right] = 202,78 > 144$$

$\therefore$  O estado não é admissível.

## 11 EQUAÇÕES GERAIS DA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

A teoria da elasticidade tem como objetivo central a determinação dos campos de deslocamento, tensão e deformação de um sólido de volume  $V$  e superfície de contorno  $S$ , submetido a forças distribuídas por unidade de volume em  $V$  e por unidade de superfície na parte  $S_\sigma$  de  $S$ . O sólido apresenta-se, ainda, com vinculação prescrita na parte  $S_u$  de  $S$ .

Um primeiro detalhe a observar é que as partes  $S_u$  e  $S_\sigma$  são complementares (não possuem intersecção e a união delas compõe  $S$ ). Outro aspecto importante é que o material que constitui o sólido apresenta resposta elástica; neste texto será considerada somente a elasticidade linear.

No espaço tridimensional, em cada ponto do sólido e segundo os eixos coordenados de referência, campos genéricos de deslocamento possuem três componentes, enquanto que campos genéricos de tensão e deformação possuem nove componentes cada um. No caso dos campos de tensão, por exemplo, as componentes são três tensões normais e seis de cisalhamento, atuando segundo três planos ortogonais entre si. No caso dos campos de deformação, as componentes são três deformações lineares, segundo três direções ortogonais entre si, e seis distorções angulares, relativas a três planos ortogonais definidos pelos pares de direções associadas às deformações lineares. Um aspecto importante a observar é que nos meios elásticos normalmente idealizados vale a reciprocidade entre as tensões de cisalhamento e a simetria de reflexão entre as distorções angulares. Desse modo, os campos de tensão e de deformação acabam por apresentar seis componentes independentes cada um.

Todos os ingredientes arrolados acima tem sido tratados ao longo dos capítulos anteriores nos estudos das barras sob força normal, flexão e torção, naturalmente no âmbito mais restrito das análises planas. Portanto, o estudo até aqui da chamada Resistência dos Materiais insere-se, na verdade, no campo mais amplo da teoria da elasticidade.

Neste capítulo apresentam-se algumas equações da teoria da elasticidade, as quais são ainda relativas à análise de estados planos. Como se verá, pretende-se abranger situações mais gerais do que aquelas anteriormente estudadas com os elementos de barras, particularmente a análise de chapas e de tubos sob pressão interna e externa.

Fixando-se ainda, por um momento, ao tratamento tridimensional, todas as componentes de deslocamento, tensão e deformação reunidas compõem um conjunto de 15 incógnitas a determinar, e a teoria da elasticidade propõe um sistema de 15 equações diferenciais parciais a ser integrado para a sua determinação. As equações propostas são três de equilíbrio, envolvendo as componentes de tensão e as componentes de força por unidade de volume, seis de compatibilidade, envolvendo as componentes de deformação e de deslocamento e seis equações constitutivas, envolvendo as componentes de tensão e deformação.

As condições de contorno referem-se a forças sobre  $S_\sigma$  e a deslocamentos prescritos sobre  $S_u$ .

A formulação proposta é dita em forma forte, isto é: o conjunto de equações deve ser satisfeito ponto a ponto do sólido.

Pode-se adiantar que o sistema de equações pode ser combinado de modo a reduzir o número de incógnitas. Nesse sentido dois tipos de combinações são preferenciais: uma conduz a um sistema de três equações diferenciais parciais envolvendo as três componentes de deslocamento incógnitas; a outra conduz a um conjunto de seis equações diferenciais parciais envolvendo as seis componentes de tensão.

Neste texto a formulação para o caso tridimensional não será apresentada dado o caráter introdutório que se pretende emprestar à abordagem. A idéia é limitar a formulação ao campo da chamada elasticidade bidimensional, onde o número de incógnitas a determinar é menor. Apesar da redução dimensional, pode-se abranger com esse tipo de formulação uma série de problemas de interesse prático.

No que segue apresenta-se a formulação da elasticidade bidimensional com destaque para os chamados estados planos de tensão e de deformação.

### *11.1 Estado plano de tensão*

No capítulo relativo ao estudo das tensões, apresentou-se o conceito de estado de tensão num ponto. É oportuno que esse e outros conceitos essenciais daquele estudo sejam recordados neste ponto.

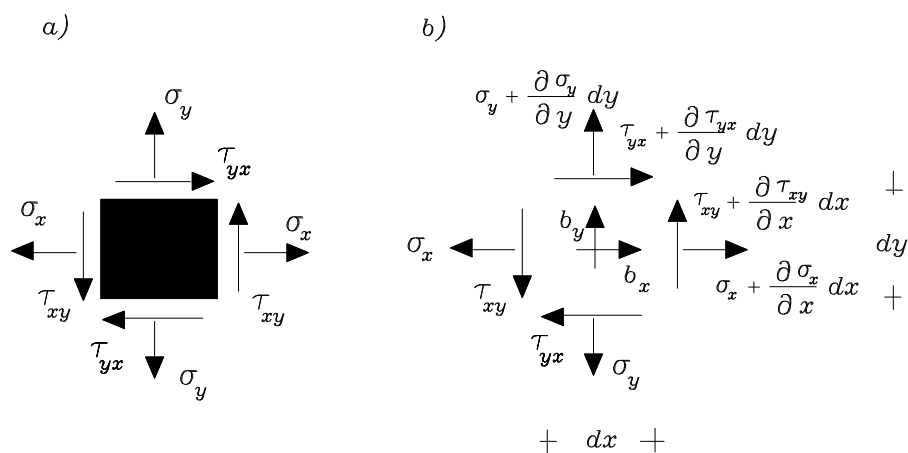
O estado de tensão pode ser caracterizado pelo conjunto de componentes, normais e de cisalhamento, de vetores de tensão que atuam segundo três planos ortogonais que passam pelo ponto em questão. Mais especificamente, em cada plano as chamadas componentes de tensão são três: uma normal e duas de cisalhamento. Ao todo, considerando-se os três planos, são nove componentes envolvidas, sendo seis delas independentes devido à relação de reciprocidade que deve ser obedecida pelas componentes de cisalhamento que convergem ou se afastam das arestas comuns aos pares de planos ortogonais. Todas as componentes podem ser reunidas numa matriz simétrica.

Outro aspecto importante a recordar é que a partir do conhecimento das componentes de tensão segundo três planos ortogonais, podem-se encontrar as componentes segundo qualquer outro plano que passe pelo ponto. Admite-se, portanto, uma variação contínua das tensões com plano tomado no ponto.

Um fato de grande importância, e que será explorado mais adiante neste capítulo, é que a possível variação do estado de tensão de ponto para ponto deve verificar a condição de equilíbrio de forças.

Pois bem, o estado duplo ou plano de tensão também foi apresentado no capítulo das tensões. Vale recordar que tal estado pode se verificar em chapas delgadas carregadas por forças contidas no seu plano médio. Nesse caso, inexistem componentes de tensão com direção ortogonal ao plano da chapa e

o estado de tensão fica caracterizado somente por três componentes, todas elas podendo ser representadas no plano médio da chapa, conforme ilustra a figura 11.1a.



**Figura 11.1 - Componentes de tensão e variações no plano X-Y**

Na figura 11.1b ilustram-se as variações das tensões de ponto para ponto do corpo e ainda as componentes genéricas,  $b_x$  e  $b_y$ , de forças externas distribuídas por unidade de volume.

A condição de equilíbrio se traduz pela nulidade da somatória de forças segundo as direções coordenadas, sendo que a reciprocidade das tensões de cisalhamento ( $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ) garante o equilíbrio à rotação.

Tomando-se, por conveniência, uma espessura unitária, a condição de equilíbrio fornece:

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx + b_x dx dy = 0$$

$$\left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \sigma_y dx + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{xy} dy + b_x dx dy = 0$$

$\therefore$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \quad (11.1 \text{ a,b})$$

Por outro lado, as componentes do deslocamento do ponto, contidas no plano e segundo as direções X-Y, são representadas por  $u$  e  $v$ , respectivamente. Entre elas e as componentes de deformação no plano valem as seguintes relações de compatibilidade, já deduzidas no capítulo das deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11.2 \text{ a,b,c})$$

Além dessas, vale também uma relação de compatibilidade envolvendo uma componente  $w$  do deslocamento na direção ortogonal ao plano:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11.2 \text{ d})$$

Entre as componentes de tensão e de deformação no plano valem relações constitutivas derivadas da aplicação da lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) ; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (11.3 \text{ a,b,c})$$

Porque  $\sigma_z = 0$  a componente de deformação linear na direção ortogonal ao plano se relaciona com as tensões no plano por:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (11.3 \text{ d})$$

Como se pode observar, a componente  $\varepsilon_z$  resulta das tensões normais no plano por efeito de Poisson e, em função dela, pela (11.2d), pode-se encontrar a componente  $w$  do deslocamento. Assim sendo, no estado plano de tensão são oito as incógnitas independentes a determinar:  $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ ; as equações



de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva compõem o sistema de oito equações necessário para determiná-las.

A forma de combinação do sistema de equações mais interessante para as aplicações a serem descritas no próximo capítulo é aquela que elimina as componentes de deformação e de deslocamento.

Para isso, numa primeira etapa, as relações de compatibilidade (11.2a,b,c) são combinadas resultando na seguinte relação, também de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (11.4)$$

Essa relação pode então ser expressa em termos das componentes de tensão introduzindo-se as (11.3a,b,c):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (11.5)$$

As relações de equilíbrio (11.1) e a (11.5) formam, assim, um novo sistema nas incógnitas componentes de tensão.

Há, entretanto, outra forma mais conveniente de exprimir o mesmo sistema em análise. De fato, tomando-se as equações de equilíbrio (11.1a,b), derivando-se cada uma delas respectivamente em relação a  $x$  e a  $y$  e somando-se as equações resultantes, obtém-se:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} \quad (11.6)$$

Segue daí, uma forma alternativa de escrever o segundo membro da (11.5):

$$2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -(1 + \nu) \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} \right] \quad (11.7)$$

Da igualdade entre as (11.5) e (11.7) resulta, após as simplificações:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left[ \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right] \quad (11.8)$$

Um caso particular de interesse é aquele em que as forças de natureza volumétrica podem ser desconsideradas. Nesse caso, o sistema de equações assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \end{aligned} \quad (11.9 \text{ a,b,c})$$

Nota-se que as características elásticas do material não aparecem nas últimas relações, indicando que no caso particular considerado o campo de tensões não depende do material, mas somente das condições de contorno que se devem acrescentar ao problema específico.

Uma ulterior observação é que as relações (11.9a,b) podem ser satisfeitas se as componentes de tensão derivam de uma função dita *função de tensão*, ou *função de Airy*, com as seguintes propriedades:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (11.10 \text{ a,b,c})$$

Em tal situação  $\Phi$  representa a solução do sistema em questão se a (11.9c) for satisfeita, isto é:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (11.11)$$

Denotando-se, finalmente, por  $\nabla$  o operador  $\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ , a expressão anterior pode ser escrita na forma:

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (11.12)$$

também denominada equação biarmônica.

### 11.2 Estado plano de deformação

Um estado de deformação plana pode ocorrer, por exemplo, em sólidos prismáticos muito longos, com extremidades fixas e nos quais o carregamento é aplicado ortogonalmente às geratrizes, apresentando distribuição uniforme ao longo do comprimento.

Nesse tipo de situação é razoável admitir-se a inexistência de alongamentos e distorções angulares que envolvam a dimensão do eixo, isto é:  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , onde  $z$  é a coordenada coincidente com o eixo do sólido. Segue que as componentes não nulas de deformação são:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , estando contidas no plano da seção transversal do sólido.

Levando-se em conta a lei de Hooke e a condição  $\varepsilon_z = 0$  segue que:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad \therefore$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (11.13)$$

Conseqüentemente, as outras relações da lei de Hooke

resultam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{(1+\nu^2)}{E} \left[ \sigma_x - \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_y \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{(1+\nu^2)}{E} \left[ \sigma_y - \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_x \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{11.14 a,b,c}$$

É usual utilizar-se da seguinte notação:  $E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  e

$\nu' = \frac{\nu}{(1-\nu)}$ , de modo que as expressões anteriores podem passar a ser escritas numa forma idêntica às (11.3a,b,c).

Por outro lado, o conjunto de relações de equilíbrio compõe-se de três igualdades: duas delas, exprimindo o equilíbrio de forças segundo direções  $X$  e  $Y$  contidas no plano da seção, são coincidentes com as (12.1a,b); a terceira relação exprime o equilíbrio na direção longitudinal,  $Z$ , e escreve-se na forma:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0\tag{11.15}$$

Essa última condição implica que a tensão normal longitudinal é constante ao longo do comprimento do sólido.

Por sua vez, as relações de compatibilidade são idênticas às (11.2a,b,c) que relacionam  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  com as componentes  $u$  e  $v$  do deslocamento.

As relações de equilíbrio e compatibilidade podem ser combinadas e representadas de forma absolutamente análoga à feita para o estado plano de tensão, mudando-se apenas as propriedades do material para  $E'$  e  $\nu'$ . Destaca-se, por exemplo, a expressão (11.8) que assume a forma:

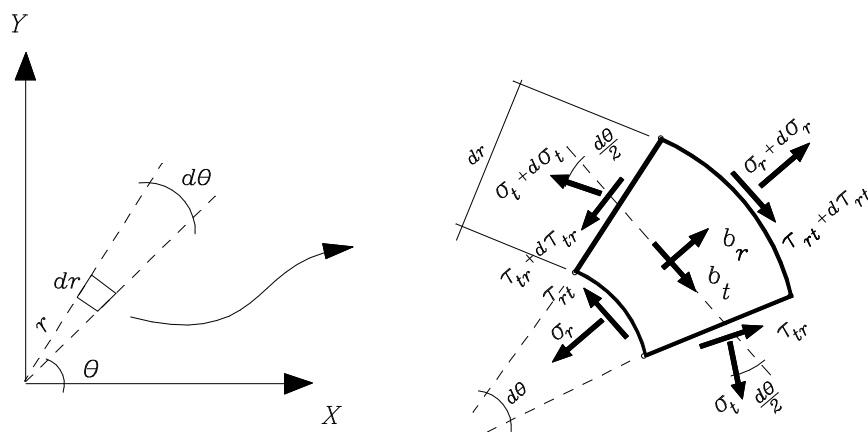
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu') \left[ \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right] \quad (11.16)$$

Finalmente, no caso de forças volumétricas nulas o conjunto de relações (11.9) se mantém acrescido da (11.15), valendo também a equação biarmônica.

### 11.3 Estado plano de tensão em coordenadas cilíndricas

Em algumas aplicações, como por exemplo, no estudo dos tubos sob pressão interna e externa, a geometria favorece o emprego de coordenadas cilíndricas.

Prevendo-se esses casos é interessante reescrever as relações (11.9) nesse sistema de coordenadas. Com esse objetivo, e tendo-se em vista a figura 11.2, do equilíbrio do elemento indicado nas direções  $r$  e  $t$  resultam:



**Figura 11.2 - Componentes de tensão em coordenadas cilíndricas**

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rt}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + b_r = 0 \quad (11.17 \text{ a,b})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rt}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{rt} + b_t = 0$$

As relações de equilíbrio são satisfeitas se entre as

componentes de tensão e a função de Airy valerem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{rt} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}\end{aligned}\tag{11.18 a,b,c}$$

As expressões anteriores podem ser obtidas, de modo alternativo, mediante transformação de coordenadas sobre as (11.1) e (11.10). O algebrismo correspondente não será aqui totalmente desenvolvido, pois foge dos objetivos do texto. Entretanto, sobretudo para que se justifique a transformação sobre a equação biarmônica, é interessante registrar certas relações entre coordenadas cartesianas e cilíndricas, as quais se podem obter a partir de um exame da figura 11.2:

$$x = r \cos \theta ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta ; \quad \theta = \arctan g \left( \frac{y}{x} \right)\tag{11.19 a,b,c}$$

Além dessas relações são ainda de interesse as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen} \theta ; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r} ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}\tag{12.20 a,b,c,d}$$

Das expressões anteriores decorrem as derivadas parciais de certa função  $f = f(r, \theta)$  em relação às coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \operatorname{sen} \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \operatorname{sen}^2 \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \\
&\quad - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos \theta \operatorname{sen} \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \\
&\quad - (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{11.21 a,b,c,d}$$

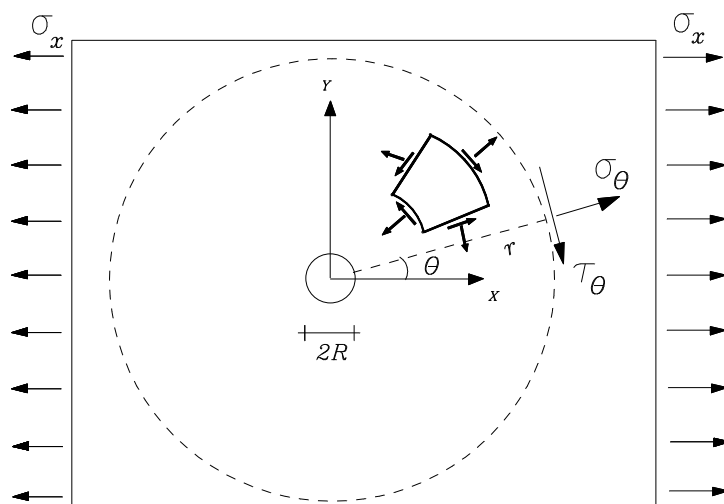
O caminho alternativo para encontrar as (11.18) consiste então em combinar as (11.10) com as (11.21) onde em lugar de  $f$ , e para  $\theta = 90^\circ$ , tomam-se:  $\sigma_x = \sigma_t$ ,  $\sigma_y = \sigma_r$  e  $\tau_{rt} = \tau_{xy}$ .

Finalmente, a equação biarmônica assume a forma:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\sigma_r + \sigma_t) \\
&= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \Phi = 0
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Assim sendo, as (11.17) e a (11.22) formam o sistema de equações para a solução de problemas planos expressos em coordenadas cilíndricas.

**Exemplo 1:** Deduzir as expressões para o cálculo das tensões numa chapa de comprimento infinito submetida a tração  $\sigma_x$  numa direção e com um furo circular de raio  $R$  no seu centro, conforme ilustrado na figura 11.3.



**Figura 11.3- Chapa com furo circular**

A distribuição uniforme de tensões que certamente ocorre numa região bastante afastada do centro da chapa é perturbada aproximando-se do furo. Num sentido inverso, admite-se que a uma distância  $r$  suficientemente grande do centro, o efeito do furo não se faça mais presente e as tensões  $\sigma_\theta$  e  $\tau_\theta$ , segundo uma direção definida por um ângulo  $\theta$  qualquer, como mostra a figura 11.3, determinam-se em função de  $\sigma_x$  pelas relações usuais de equilíbrio:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_\theta = (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta - \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

As formas anteriores indicam que a função de Airy pode apresentar a seguinte forma geral:

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta$$

No sentido de se determinar  $\Phi$ , nota-se que a expressão (11.22), que representa a equação harmônica em coordenadas cilíndricas, passa a ser dada por:



$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right)^2 f = 0$$

A solução geral da equação anterior é dada pela seguinte expressão:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D$$

Com a solução geral, e pelas (11.18), resultam as expressões gerais para o cálculo das componentes de tensão nas vizinhanças do furo:

$$\sigma_r = - \left( 2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_t = \left( 2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{rt} = \left( 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

As quatro constantes de integração que aparecem nas relações anteriores podem ser determinadas por condições de contorno em  $R$  e um raio  $R'$  suficientemente distante do centro:

$$\sigma_r(R) = 0 \quad ; \quad \tau_{rt}(R) = 0 \quad ;$$

$$\sigma_r(R') = \sigma_\theta = \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta \quad ; \quad \tau_{rt}(R') = \tau_\theta = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

Uma maneira de simplificar a solução é admitir-se  $R' \rightarrow \infty$ . Nesse caso, as expressões gerais para as tensões assumem as formas:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x}{2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_x}{2} \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x}{2} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_x}{2} \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{rt} = -\frac{\sigma_x}{2} \left( 1 - 3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

Um valor de particular interesse é o da tensão tangencial  $\sigma_t$ , no bordo do furo, em correspondência à posição  $r = R$ :

$$\sigma_t = \sigma_x (1 - 2 \cos 2\theta)$$

Nota-se que essa tensão é independente do raio do furo.

Esse valor assume um máximo em  $\theta = \pi/2$  e em  $\theta = 3\pi/2$  isto é: nas extremidades do diâmetro que coincidem com o eixo  $y$  na figura 11.3. O valor máximo resulta:  $\sigma_{t\text{máx}} = 3\sigma_x$  e o fator 3 que multiplica o valor da tensão aplicada é denominado *fator de intensidade de tensão*.

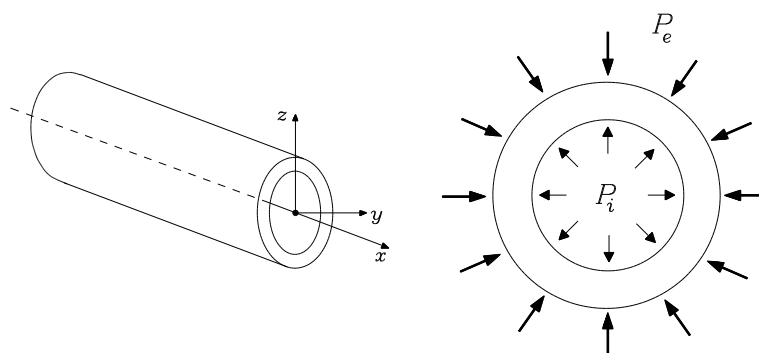
Outra análise interessante resulta da determinação da distribuição de tensões tangenciais para  $\theta = \pi/2$ , ou seja, numa seção coincidente com o eixo  $y$  na figura 11.3. Nesse caso resulta:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x}{2} \left( 2 + 3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

mostrando, claramente, que ao se afastar do centro o nível de tensão tende ao valor  $\sigma_x$ . Em particular, a uma distância do bordo do furo igual a quatro vezes o raio (ou duas vezes o diâmetro do furo) a intensidade de tensão é somente 4% superior à tensão aplicada. Isto mostra que a solução obtida pode valer também para chapas com largura finita, desde que respeitados os limites acima.

## 12 APLICAÇÃO DA TEORIA DA ELASTICIDADE AO CÁLCULO DE TUBOS

Os tubos aqui estudados possuem seção circular oca e eixo reto, sendo o seu comprimento muito maior do que as dimensões da seção transversal. Não há restrição quanto à espessura, que pode ser grossa ou fina. As solicitações consideradas são pressões externas e/ou internas, como ilustrado na figura 12.1.

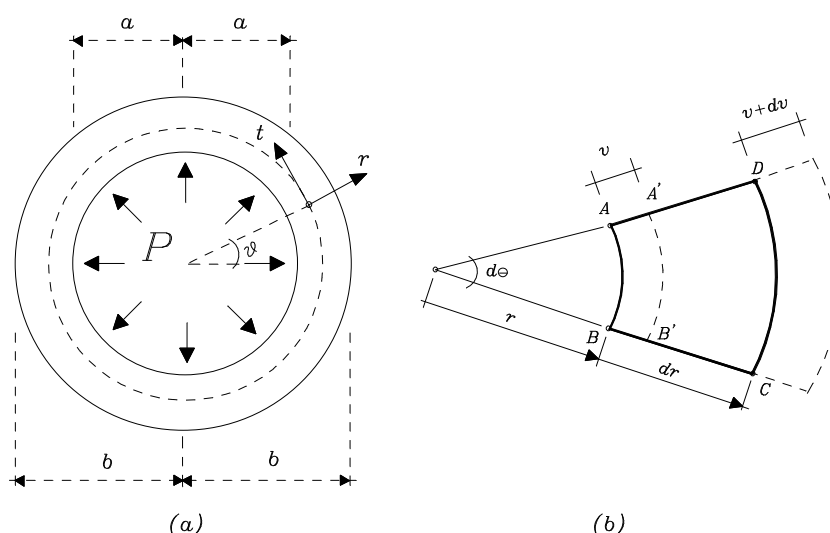


**Figura 12.1 - Tubo submetido a pressões interna e externa**

Na modelagem que segue valem as hipóteses de comportamento elástico linear do material e de pequenas deformações. Admite-se que não haja restrição à deformação dos tubos na direção axial, de modo que inexitem tensões normais naquela direção. Independente disso, dado que seu comprimento é sempre muito grande em relação às dimensões da seção transversal, considera-se nulo o alongamento na direção axial. Nessas condições, toda a análise pode se desenvolver no plano da seção transversal.

O problema a ser resolvido consiste em determinar as distribuições de tensões, deformações e o campo de deslocamentos, conhecidas as pressões atuantes e a geometria do tubo. A aplicação da teoria da elasticidade se traduz pela imposição de condições de equilíbrio, de compatibilidade e relação constitutiva do material, em cada ponto do tubo. Para tanto, considera-se um seu elemento infinitesimal. A combinação daquelas condições juntamente com as condições de contorno do problema específico permite obter a solução do problema.

Nota-se que dada a geometria do tubo e o carregamento considerados, o problema resulta do tipo axissimétrico, o que viabiliza a utilização de coordenadas polares  $(x, r, \theta)$  com vantagens sobre as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Assim sendo, conforme ilustrado na figura 12.2a, num ponto genérico do tubo define-se uma circunferência de raio  $r$  com centro no eixo do tubo. O campo de deslocamentos do ponto fica definido genericamente por uma componente radial, segundo a direção do raio, e uma componente tangencial, de direção perpendicular ao raio no ponto. Obviamente, pela axissimetria considerada, a componente tangencial do deslocamento é nula.



**Figura 12.2 - Coordenadas polares e elemento de tubo**

Na formulação aqui desenvolvida, a abordagem é em tensões, no sentido de que a combinação das relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva é tal a eliminar as incógnitas que compõem os campos de deslocamento e de deformação, resultando uma equação diferencial em tensões. Não será explorada, contudo, a função de Airy, ao contrário do que foi feito no exemplo do capítulo anterior.

Seja, então, um elemento diferencial definido a partir da seção transversal do tubo, conforme ilustra a figura 12.2b.

O deslocamento radial de seus pontos é caracterizado pela função  $v=v(r)$ . As expressões das medidas de deformação tangencial e radial são dadas respectivamente por:

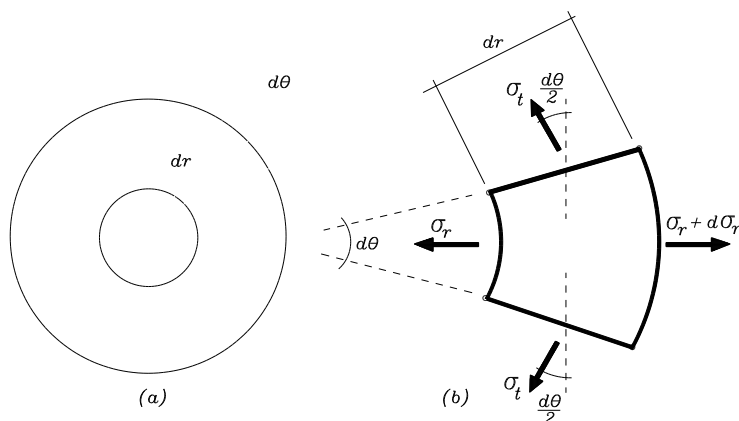
$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(r+v)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{v}{r} \\ \varepsilon_r &= \frac{dv}{dr} = v'\end{aligned}\quad (12.1 \text{ a,b})$$

Dada a axissimetria do problema, a deformação do elemento se dá de modo que sua forma se preserva ou, em outras palavras, sem distorção angular associada às direções radial e tangencial. De fato, como o campo de deslocamentos apresenta uma única componente não nula, a radial, função somente da coordenada  $r$ , segue da definição de distorção angular segundo as direções  $r$  e  $t$ :

$$\gamma_{rt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (12.2)$$

onde  $u$  é a componente do deslocamento na direção axial (nula dadas as características do problema).

A condição de equilíbrio envolve o conjunto de componentes de tensão ilustrado na figura 12.3.



**Figura 12.3 - Equilíbrio do elemento infinitesimal**

Nota-se a ausência de tensões de cisalhamento, justificada também pela axissimetria do problema; portanto, segundo as direções indicadas as tensões normais são principais.

A imposição do equilíbrio de forças na direção tangencial leva a uma identidade. Já, do equilíbrio de forças na direção radial, obtém-se:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - 2\sigma_t dr dz \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (12.3)$$

Como  $\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$ , e desconsiderando-se os infinitésimos de ordem superior, resulta que:

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (12.4)$$

Por outro lado, a lei de Hooke generalizada estabelece relações entre as componentes tangencial e radial dos campos de deformação e de tensão, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) \\ \gamma_{tr} &= \frac{\tau_{tr}}{G} \end{aligned} \quad (12.5 \text{ a,b,c})$$

ou ainda, de forma inversa:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) \\ \tau_{tr} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{tr} = 0 \end{aligned} \quad (12.6 \text{ a,b,c})$$

Tendo-se em vista as relações de compatibilidade, equilíbrio e constitutiva, nota-se que tais relações envolvem cinco incógnitas a determinar:  $v, \varepsilon_r, \varepsilon_t, \sigma_r$  e  $\sigma_t$ . Como já comentado anteriormente, a forma de resolução mais conveniente, neste caso, consiste em combinar as relações de modo a eliminar as incógnitas deslocamento e deformação, reduzindo-se o conjunto de incógnitas às componentes de tensão.

Nesse sentido, numa primeira etapa combinam-se as relações de compatibilidade. Da (12.1a) segue que:

$$v = r \varepsilon_t \quad (12.7)$$

e daí, com a (12.1b), resulta :

$$\frac{dv}{dr} = \varepsilon_t + r \frac{d\varepsilon_t}{dr} = \varepsilon_r \quad (12.8)$$

Podem-se introduzir na expressão anterior as relações constitutivas dadas pelas (12.5):

$$\frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_r) + r \frac{1}{E} \left( \frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) - \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_t) = 0$$

ou

$$r \left( \frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = (\sigma_r - \sigma_t)(1 + \nu) \quad (12.9 \text{ a,b})$$

As relações (12.9b) e (12.4) constituem, portanto, um sistema nas incógnitas  $\sigma_r$  e  $\sigma_t$ .

Pela substituição de  $\sigma_t$ , retirado da (12.9b), na (12.4), obtém-se a seguinte condição:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad \therefore \quad \sigma_r + \sigma_t = C \quad (12.10)$$

onde  $C$  é uma constante a determinar.

Da relação anterior segue que:  $\sigma_t = C - \sigma_r$ , a qual substituída na equação de equilíbrio (12.4) conduz à seguinte equação diferencial na tensão normal radial:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r}{r} = \frac{C}{r} \quad (12.11)$$

Essa equação diferencial possui uma solução particular dada por:

$$[\sigma_r]_p = \frac{C}{2} \quad (12.12)$$

A forma homogênea da mesma equação diferencial apresenta uma solução obtida a partir da seguinte sequência:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r}{r} = 0 \rightarrow \frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = -\frac{2dr}{r} \rightarrow \ln\sigma_r = -2\ln r + C_1$$

$$\therefore \ln(\sigma_r r^2) = C_1 \rightarrow [\sigma_r]_h = \frac{C^*}{r^2}$$

Finalmente, a solução geral apresenta-se na forma:

$$\sigma_r = \frac{C}{2} + \frac{C^*}{r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{C}{2} - \frac{C^*}{r^2} \quad (12.13 \text{ a,b})$$

As constantes de integração devem ser obtidas mediante imposição de condições de contorno no plano da seção transversal. No caso mais geral de tubo com pressões interna e externa, e com geometria definida por um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$ , as condições de contorno são sobre as tensões e escritas nas formas:

$$\begin{aligned} r=a &\rightarrow \sigma_r = -p_i \\ r=b &\rightarrow \sigma_r = -p_e \end{aligned} \quad (12.14)$$

As constantes de integração, obtidas pela imposição das



condições de contorno, permitem escrever, pelas (12.13), as expressões para o cálculo das tensões:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{(b/r)^2 - 1}{(b/a)^2 - 1} p_i - \frac{(b/a)^2 - (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1} p_e \\ \sigma_t &= -\frac{(b/r)^2 + 1}{(b/a)^2 - 1} p_i - \frac{(b/a)^2 + (b/r)^2}{(b/a)^2 - 1} p_e\end{aligned}\quad (12.15 \text{ a,b})$$

Determinadas as tensões, outra relação de interesse é aquela que permite determinar o valor do deslocamento radial. Tal relação pode ser obtida combinando-se as (12.1a) e (12.5b):

$$v = \frac{r}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) \quad (12.16)$$

Como foi mostrado, a formulação desenvolvida levou a uma equação diferencial em termos da componente radial das tensões. Há, todavia, a possibilidade de desenvolver uma formulação equivalente em deslocamentos, isto é, combinando-se as equações de equilíbrio, compatibilidade e de deslocamentos de modo a eliminar as tensões e deformações, sobrando como incógnita somente o deslocamento radial.

Nessa forma, parte-se da equação de equilíbrio, dada pela (12.4) e aqui repetida por conveniência:

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (12.17)$$

Em seguida, procura-se substituir as tensões pelas deformações utilizando-se da lei de Hooke na forma proposta pelas (12.6), mas já levando em conta as relações de compatibilidade.

Nesse sentido as relações constitutivas passam a ser escritas nas formas:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(v' + \nu \frac{v}{r}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\frac{v}{r} + \nu v'\right)$$
(12.18 a,b)

Combinando-se, então, as (12.17) e (12.18) resulta a seguinte equação diferencial no deslocamento radial:

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} = 0$$
(12.19)

A equação em questão é uma equação de Euler de segunda ordem e apresenta a seguinte solução geral:

$$v(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$
(12.20)

As constantes de integração devem ser determinadas impondo-se as condições de contorno. Neste caso, ocorre que as condições de contorno são em esforços, exatamente as mesmas descritas pelas (13.14). Como a formulação é em deslocamentos, deve-se, então, exprimir as condições de contorno em tensões como função do deslocamento radial e de suas derivadas, empregando-se a (13.18a). Segue daí que:

$$\frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_r = C_1(1+\nu) - \frac{C_2}{r^2}(1-\nu)$$
(12.21)

Particularizando-se a relação anterior para os raios interno e externo do tubo, determinam-se as constantes de integração:

$$C_1 = -\frac{(p_e - p_i)(1-\nu)b^2}{E(b^2 - a^2)} - \frac{(1-\nu)}{E} p_i$$

$$C_2 = -\frac{(1+\nu)(p_e - p_i)a^2 b^2}{E(b^2 - a^2)}$$
(12.22 a,b)

Finalmente, a solução geral para o deslocamento radial

pode ser escrita na forma:

$$v(r) = -\frac{(1-\nu)}{E} r \left\{ \frac{(p_e - p_i) b^2}{a^2 \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right]} \left[ \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 + 1 \right] + p_i \right\} \quad (12.23)$$

Um valor particular de maior interesse é o deslocamento radial em  $r=a$ :

$$v(a) = \frac{a}{E(b^2 - a^2)} \{ p_i [(1+\nu)b^2 + (1-\nu)a^2] - 2 p_e b^2 \} \quad (12.24)$$

**Exemplo 1:** Representar os diagramas de distribuição das tensões tangencial e radial ao longo da espessura do tubo, numa seção genérica, provocados pela ação de uma pressão interna  $p_i$ .

Das expressões (12.15) segue que:

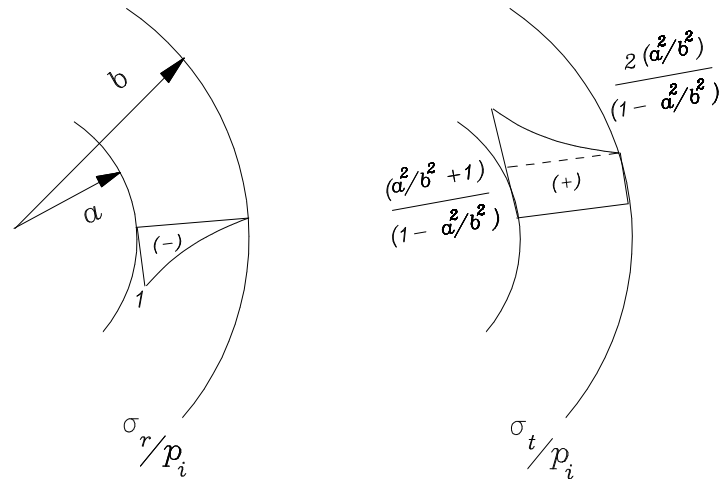
$$\frac{\sigma_r}{p_i} = -\frac{\left( \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{b^2} \right)}{\left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (<0) ; \quad \frac{\sigma_t}{p_i} = \frac{\left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2} \right)}{\left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (>0)$$

Considerando-se, particularmente, os raios interno e externo, as expressões anteriores assumem os valores:

$$\frac{\sigma_r}{p_i} \Big|_{r=a} = -1 ; \quad \frac{\sigma_r}{p_i} \Big|_{r=b} = 0$$

$$\frac{\sigma_t}{p_i} \Big|_{r=a} = \frac{\left( \frac{a^2}{b^2} + 1 \right)}{\left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)} ; \quad \frac{\sigma_t}{p_i} \Big|_{r=b} = \frac{2 \left( \frac{a^2}{b^2} \right)}{\left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)}$$

As correspondentes distribuições ao longo da espessura estão indicadas na figura 12.4.



**Figura 12.4 - Distribuições de tensões ao longo da espessura**

**Exemplo 2:** Representar os diagramas de distribuição das tensões tangencial e radial ao longo da espessura do tubo, numa seção genérica, provocados pela ação de uma pressão externa  $p_e$ .

Novamente, das expressões (12.15) segue que:

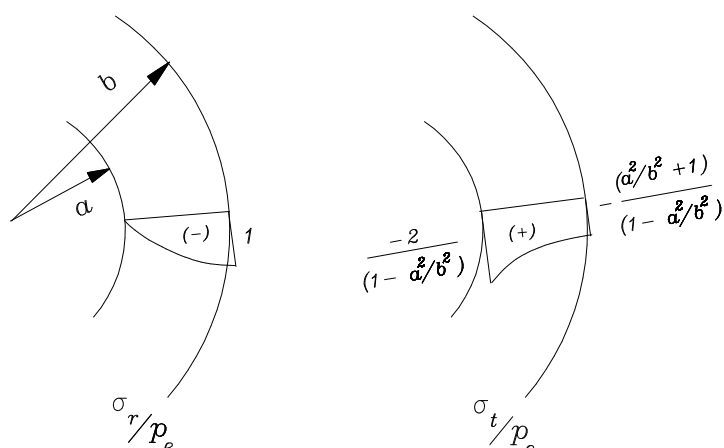
$$\frac{\sigma_r}{p_e} = -\frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (<0) ; \quad \frac{\sigma_t}{p_e} = -\frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} \quad (<0)$$

Considerando-se, particularmente, os raios interno e externo, as expressões anteriores assumem os valores:

$$\left. \frac{\sigma_r}{p_e} \right|_{r=a} = 0 ; \quad \left. \frac{\sigma_r}{p_e} \right|_{r=b} = -1$$

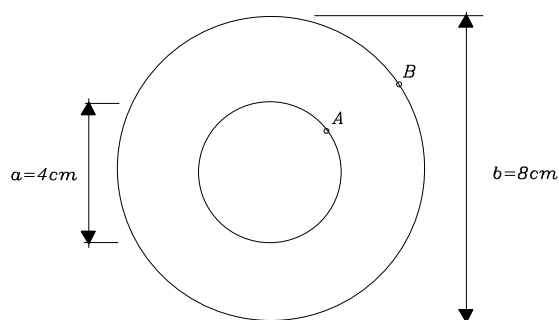
$$\left. \frac{\sigma_t}{p_e} \right|_{r=b} = -\frac{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} ; \quad \left. \frac{\sigma_t}{p_e} \right|_{r=a} = -\frac{2}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

As correspondentes distribuições ao longo da espessura estão indicadas na figura 12.5.



**Figura 12.5 - Distribuições de tensões ao longo da espessura**

**Exemplo 3:** O tubo indicado na figura 12.6, está submetido a uma pressão externa  $p_e = p$ . Determinar o valor máximo de  $p$ , admitindo-se que o material segue o critério da máxima energia de distorção (von Mises). Dado:  $\sigma_i = 10 \text{ kN/cm}^2$ .



**Figura 12.6 - Tubo submetido à pressão externa**

O critério de von Mises particularizado para o estado plano de tensão dos tubos assume a forma:

$$\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t} \leq \sigma_i$$

Tendo-se em vista as distribuições de tensões ilustradas no exemplo anterior, os pontos a serem verificados são os pontos A e B, respectivamente pertencentes às paredes interna e externa

do tubo.

No ponto *B*, os valores de tensão radial e tangencial são os seguintes:

$$\sigma_r = -p \quad ; \quad \sigma_t = -p \left( \frac{\frac{2^2}{4^2} + 1}{1 - \frac{2^2}{4^2}} \right) = -\frac{5}{3}p$$

Aplicando-se o critério, obtém-se:

$$p \sqrt{1 + \frac{25}{9} - \frac{5}{3}} \leq 10 \quad \rightarrow \quad p \leq 6,88 \text{ kN/cm}^2$$

No ponto *A* resultam as seguintes tensões:

$$\sigma_r = 0 \quad ; \quad \sigma_t = -p \left( \frac{2}{1 - \frac{2^2}{4^2}} \right) = -\frac{8}{3}p$$

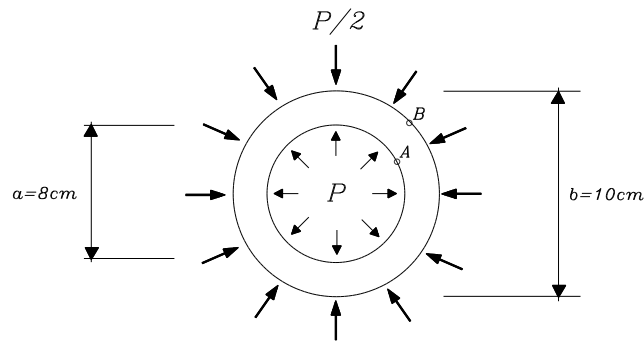
Aplicando-se o critério, segue que:

$$\frac{8}{3}p \leq 10 \quad \rightarrow \quad p \leq 3,75 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto, a pressão máxima que o tubo pode resistir vale:

$$p = 3,75 \text{ kN/cm}^2$$

**Exemplo 4:** O tubo cuja geometria está indicada na figura 12.7, está submetido a uma pressão interna de valor  $p$  e uma pressão externa de valor  $p/2$ . Aplicando-se o critério de von Mises, com  $\sigma_i = 10 \text{ kN/cm}^2$ , determinar a intensidade máxima para a pressão de referência.



**Figura 12.7 - Tubo sob pressões interna e externa**

Novamente os pontos a serem verificados pertencem às superfícies interna e externa do tubo.

No ponto B as tensões radial e tangencial valem respectivamente:

$$\sigma_r = -p \left( \frac{\frac{4^2}{5^2} - \frac{4^2}{5^2}}{1 - \frac{4^2}{5^2}} \right) + \frac{p}{2} \left( \frac{\frac{4^2}{5^2} - 1}{1 - \frac{4^2}{5^2}} \right) = -0,5 p$$

$$\sigma_t = p \left( \frac{\frac{4^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2}}{1 - \frac{4^2}{5^2}} \right) - \frac{p}{2} \left( \frac{\frac{4^2}{5^2} + 1}{1 - \frac{4^2}{5^2}} \right) = 1,28 p$$

Aplicando-se o critério resulta:

$$p \sqrt{0,25 + 1,64 - 0,64} \leq 10 \rightarrow p \leq 8,95 \text{ kN/cm}^2$$

No ponto A atuam as seguintes tensões:

$$\sigma_r = -p$$

$$\sigma_t = p \left( \frac{\frac{4^2}{4^2} + \frac{4^2}{5^2}}{1 - \frac{4^2}{5^2}} \right) - \frac{p}{2} \left( \frac{\frac{4^2}{4^2} + 1}{1 - \frac{4^2}{5^2}} \right) = 1,78 p$$

Aplicando-se o critério, obtém-se:

$$p\sqrt{1+1,78+1,78} \leq 10 \quad \rightarrow \quad p \leq 4,10 \text{ kN/cm}^2$$

Conclui-se, neste caso, que o valor máximo para a pressão de referência é:  $p=4,10 \text{ kN/cm}^2$ .

**Exemplo 5:** A partir da solução geral para os tubos submetido à pressão interna, determinar expressões particularizadas das tensões e do deslocamento radial para tubos de parede fina.

No caso dos tubos de parede fina, a medida da espessura é muito menor do que as medidas dos raios. Nesses casos é usual se fazer referência ao raio médio  $r_m$  e à espessura  $t$  como parâmetros geométricos de interesse. Entre os raios interno e externo e os novos elementos geométricos valem as relações:

$$b = r_m + \frac{t}{2}; \quad a = r_m - \frac{t}{2}; \quad b + a = 2r_m; \quad b - a = t;$$

Seguem daí outras relações de interesse para a resolução do exercício:

$$b^2 + a^2 = 2r_m^2 + t^2/2 \approx 2r_m^2$$

$$b^2 - a^2 = 2r_m t$$

$$\frac{b^2}{a^2} - 1 = \frac{2r_m t}{a^2} \approx \frac{2t}{r_m}$$

Nas expressões (12.15) a razão  $b/r$  pode ser aproximada pela unidade, de modo que sua particularização para o caso de pressão interna e espessura delgada fornece:

$$\sigma_r \approx 0 \quad ; \quad \sigma_t \approx -\frac{P_i r_m}{t};$$

Portanto, a tensão tangencial resulta constante na espessura.



Por outro lado, para o deslocamento radial, pode-se empregar diretamente a relação (12.24), sendo que, nesse caso, outra relação de interesse é:

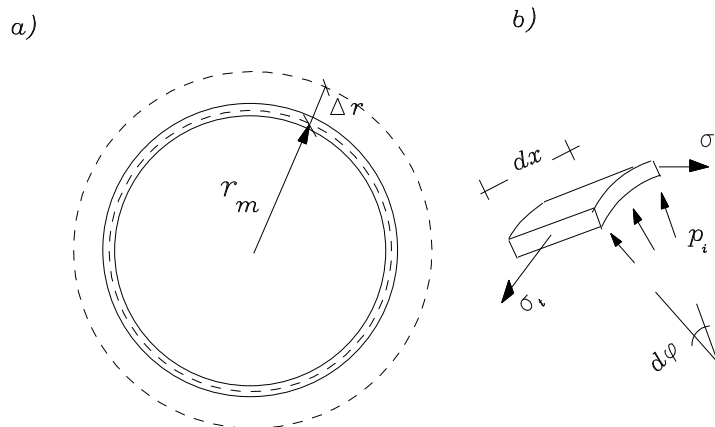
$$b^2 + a^2 - \nu(b^2 - a^2) \approx 2r_m^2$$

A (12.24) finalmente fornece:

$$v(r_m) = \frac{p_i r_m^2}{Et}$$

É interessante observar que a particularização obtida é idêntica à solução do problema do tubo de parede fina sob pressão interna, no qual se supõe 'a priori', que devido à pequena espessura, as tensões radiais são nulas e a tensão tangencial é constante na espessura.

De fato, considere-se um tubo de parede fina submetido a pressão interna cuja seção transversal está ilustrada na figura 12.8a.



**Figura 12.8 - Tubo de parede fina**

Do equilíbrio de um elemento de tubo (v.fig.12.8b), obtém-se a expressão para o cálculo da tensão tangencial:

$$p_i r_m d\phi dx = \sigma_t dx t d\phi \quad \therefore \quad \sigma_t = \frac{p_i r_m}{t}$$

Analisando-se a compatibilidade entre deformações e

deslocamentos resulta:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} \quad \rightarrow \quad \Delta r = \varepsilon_t r = \frac{\sigma_t}{E} r \quad \therefore \quad v = \Delta r = \frac{p_i r^2}{Et}$$

Nota-se que no desenvolvimento anterior, como a única tensão não nula é a tangencial, a lei de Hooke aplicou-se diretamente na forma:  $\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$ .

Finalmente chama-se a atenção para a coincidência entre as respostas obtidas da particularização das expressões gerais e do estudo direto do tubo de parede fina.

**REFERÊNCIAS**

- BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. *Resistência dos materiais*. Tradução: Paulo Prestes Castilho. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.
- LACERDA, F. S. *Resistência dos Materiais*. 4. ed. Porto Alegre: Globo, 1966. 2 v.
- LANGENDONK, T. V. *Resistência dos Materiais*. São Paulo: Edgard Blücher, 1971. 2 v.
- NASH, W. A. *Resistência dos Materiais*. 2. ed. Tradução: Giorgio E. O. Giacaglia. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.
- POPOV, E.P. *Resistência dos Materiais*, 2<sup>a</sup> ed. Tradução: Moacyr de Freitas. Rio de Janeiro: Prentice/Hall do Brasil, 1984.
- SCHIEL, F. *Introdução à Resistência dos Materiais*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984.
- SILVA JR., J. F. *Resistência dos Materiais*. 5. ed. Belo Horizonte: Edições Engenharia e Arquitetura, 1982.
- TIMOSHENKO, S. P. *Resistência dos Materiais*. 3. ed. Tradução: José R. de Carvalho. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1967. 2 v.
- WILLEMS, N.; EASLEY, J. T.; ROLFE, S. T. *Resistência dos Materiais*. Tradução: Enio Ribeiro da Silva. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.