Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

Renê Medeiros de Souza

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Geometria Descritiva

SEAD
Superintendência de Educação Aberta e a Distância

EaD UFRB

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

Superintendência de Educação Aberta e a Distância

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
Geometria Descritiva

Renê Medeiros de Souza

Cruz das Almas, Bahia
2014

Sead
Rua Rui Barbosa, 710 - Centro
CEP 44380-000
Cruz das Almas - BA
(75) 3621-6922

FICHA CATALOGRÁFICA

S729g

Souza, Renê Medeiros de.
Geometria descritiva / Renê Medeiros de Souza. -- Cruz das Almas, BA: UFRB, 2014.
47p.; il.

Esta é uma publicação vinculada ao CETEC – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia.
ISBN: 978-85-61346-89-8

1. Geometria descritiva – Avaliação. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.

CDD: 515.15

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

SUMÁRIO

MATERIAIS PARA O DESENVOLVIMENTO DA DISCIPLINA

1. Esquadros

Os esquadros são instrumentos de desenho que são utilizados para fazer linhas retas verticais com o apoio de uma régua T ou régua paralela e para formar ângulos principais como 30º, 45º, 60º, 90º e combinações de ângulos utilizando dois esquadros como indica a Figura 01.

Existem 2 tipos de esquadros básicos: O primeiro com o formato de um triângulo retângulo isósceles denominado esquadro de 45°; O segundo com o formato de um triângulo retângulo escaleno denominado esquadro 30-60°.

Num verdadeiro par de esquadros a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles correspondente ao esquadro que tem os dois ângulos de 45° é congruente ao maior cateto do esquadro correspondente ao triângulo retângulo com ângulos de 30° e 60º.

2. Compasso

O compasso é um instrumento de desenho para traçar arcos e circunferências. Também é muito utilizado para transferir medidas de um ponto para outro.

O compasso deve ser utilizado da seguinte forma: após aberto com a devida medida de raio desejado, fixa-se a ponta seca no centro da circunferência a traçar e, segurando-se o compasso pela parte superior com os dedos indicador e polegar, imprime-se um movimento de rotação até completar a circunferência, deve-se imprimir a força no eixo da ponta seca.

3. Régua graduada 30 cm

Instrumento destinado à marcação de medidas, geralmente encontra-se graduada em centímetros (cm) ou milímetros (mm) podendo ter diversos tamanhos, vale salientar que as réguas não devem ser utilizadas para traçar e sim para medir. Algumas podem ser encontradas com escalas pré-definidas, como é o caso dos escalímetros.

4. Bloco de Papel A3 sem margem

São folhas de papeis normatizadas pela ABNT, pertencentes a série A de folhas de desenho, com dimensões de 297 x 420mm, serão utilizadas no desenvolvimento de trabalhos de GD.

5. Fita adesiva

Tem a função de fixar as folhas nas mesas, para que a movimentação não venha causar deformação nas linhas dos desenhos.

6. Borracha macia

Sempre use borracha macia, compatível com o trabalho para evitar danificar a superfície do desenho. Evite o uso de borrachas para tinta, que geralmente são mais abrasivas para a superfície de desenho.

7. Transferidor

Goniômetro ou transferidor é o instrumento utilizado para medir ou verificar ângulo, estes podem ter o formato de uma circunferência completa (360°) ou de uma semi circunferência (180°). A unidade de medida para os ângulos obtém-se dividindo uma circunferência em 360 partes iguais e cada parte é denominado grau, que é representado com o numero correspondente e um pequeno zero colocado acima à direita desse número. Exemplo: 20° (vinte graus), 90° (noventa graus).

8. Lapiseiras

É utilizada para o traçado de linhas grossas e finas enquanto se desenha. Para linhas relativamente espessas e fortes, deve-se utilizar uma lapiseira com minas de grafite mais espessas. As principais lapiseiras disponíveis no mercado utilizam minas de 0.3, 0.5, 0.7 e 0.9 mm. Lapiseiras com ponta de aço permitem um traçado melhor, pois esta tem a função de proteger o grafite da quebra quando pressionado ao esquadro no momento da sua utilização.

9. Flanela para limpeza do material

A frequente utilização dos materiais faz com que eles venham a ficar sujos, causando problemas nas apresentações dos desenhos, desta forma antes da utilização destes materiais devem-se limpar os materiais com uma flanela macia.

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO A GEOMETRIA DESCRITIVA

Introdução

A **Geometria Descritiva** (também chamada de geometria mongeana ou método de monge) é a parte da matemática aplicada que tem como objetivo representar sobre o plano as figuras do espaço, ou seja, resolver problemas de três dimensões em duas dimensões. Esse método foi desenvolvido por Gaspard Monge e teve grande impacto no desenvolvimento tecnológico desde sua sistematização. Percebida sua importância, a Geometria Descritiva foi tratada com atenção e considerada, no início, como segredo de Estado.

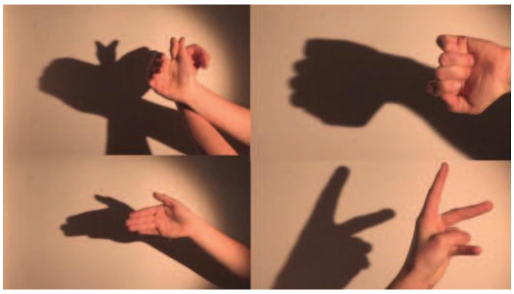
Gaspard Monge foi um matemático francês, que nasceu por volta de 1746, na cidade de Beaune, e faleceu em Paris no ano de 1818. Filho de humilde trabalhador, Monge foi enviado ao Collège dês Oratoriens, em sua cidade natal. Destacou-se aí, desde cedo, revelando a diversidade de suas aptidões – técnicas e intelectuais – e mostrando sua habilidade como desenhista e inventor. Afirmando que era dotado de "invencível tenacidade" e que possuía "dedos capazes de traduzir com fidelidade geométrica seus pensamentos", Monge obtinha invariavelmente, o primeiro posto na escola. Seus mestres o consideravam "puer aureus" (menino de ouro). Participou na comissão que estabeleceu o sistema métrico e fez parte da expedição de Napoleão ao Egito. Foi professor da École Normal de Paris, diretor da École Polytechnique e membro da Academia Francesa.

Monge desenvolveu um método geral de aplicação da geometria a problemas de construção. Introduziu a projeção ortonormal como método para descrição gráfica de objetos sólidos, generalizando estas técnicas na Geometria Descritiva, utilizada no desenho moderno, sendo considerado o pai da geometria diferencial com a sua obra Application de l'analyse à la géométrie

A Geometria Descritiva (GD) hoje constitui uma das bases teóricas dos cursos de Engenharia, Arquitetura, Design, além dos cursos de Matemática, Geologia e Artes Plásticas.

Sistema de Projeção

O estudo da Geometria Descritiva está baseado na projeção de objetos em planos. Muitas das situações vividas no nosso cotidiano, servem para exemplificar o conceito de projeção. Por exemplo, o ato de fazermos sombras com formatos de animais nas paredes, é um exemplo clássico de uma projeção em um plano, que neste caso seria a parede. Um sistema de projeção é constituído por cinco elementos principais: o observador, o objeto



http://www.reab.me/wp-content/uploads/2014/04/sha.jpg ou ponto, retas projetantes, projeção do objeto ou ponto e o plano de projeção. Do observador partem as projetantes, que passam pelos pontos objetivo e interceptam o plano de projeção. Os pontos onde as projetantes interceptam o plano de projeção correspondem às projeções dos pontos objetivo.

Tipos de projeção

Existe basicamente dois tipos de projeções, as cônicas, quando o observador encontra-se a uma distância finita do objeto a ser projetado (Figura 01) e as projeções cilíndricas, quando o observador está a uma distância infinita do ponto ou objeto a ser projetado (Figura 02).

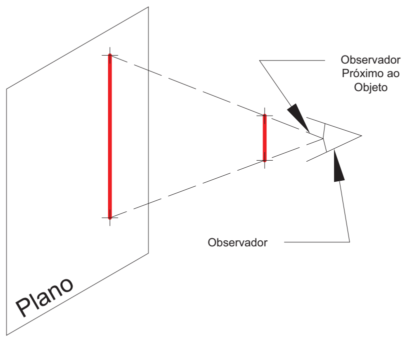


Figura 01. Projeções Cônicas

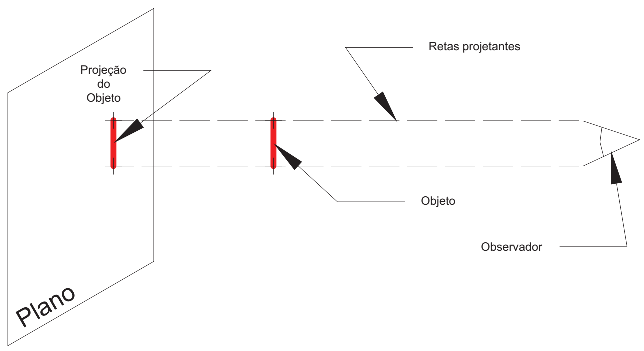


Figura 02. Projeções Cilindricas

Observe que no sistema de projeções cônicas, as dimensões da projeção não correspondem às dimensões reais do objeto, pois devido à proximidade do observador em relação ao objeto, as projetantes são projetadas de forma cônica, já no sistema de projeções cilíndricas ortogonais, devido a grande distância entre o observador e o objeto, a projeção no plano surge de forma mais clara e mais parecida com a realidade do objeto, todavia, vale salientar que nem sempre isto ocorre, porém é válido para um primeiro contato com a Geometria Descritiva, além disso, há somente uma posição em que a projeção pode se localizar, uma vez que as projetantes só podem assumir uma direção, por esse motivo, o sistema mais utilizado em Geometria Descritiva é o Sistema de Projeções Cilíndricas Ortogonais.

Método da dupla projeção de monge

Espaço

Uma vez que uma só projeção não permite, a partir das projeções, definir o objeto que as originou, Monge desenvolveu um método que recorre não a uma, mas a duas projeções.

Escolheram para o efeito dois planos perpendiculares entre si, um na horizontal e outro na vertical, e sobre eles projetou ortogonalmente os objetos a representar. O conjunto destes dois planos é o que denominamos de Espaço (Figura 03).

Posteriormente rebateu um dos planos sobre o outro, conseguindo desta forma, representar com rigor no plano do papel os objetos no espaço.

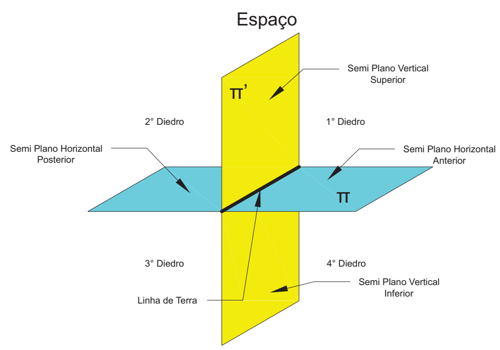


Figura 03. O Espaço e seus constituintes

Após delimitar o espaço, Monge deu nome a cada parte que o compõe, começando pelos planos Horizontais e Verticais como mostra a Figura 03.

Onde:

Semi Plano Horizontal Anterior – SPHA
Semi Plano Horizontal Posterior – SPHP
Semi Plano Vertical Superior – SPVS
Semi Plano Vertical Inferior – SPVI
π – Plano Horizontal – PH
π' – Plano Vertical – PV

Ao plano que divide os diedros em duas partes iguais damos o nome de plano bissetor. O plano βi ou β13 corresponde ao plano bissetor impar, enquanto que o βp ou β24 dar-se o nome de plano bissetor par, como ilustrado ao lado.

Além dos dois planos de projeção considerados π e π', vamos considerar um terceiro plano, perpendicular a ambos os planos, a que vamos chamar de plano de perfil (π”), como ilustrado na Figura 05.

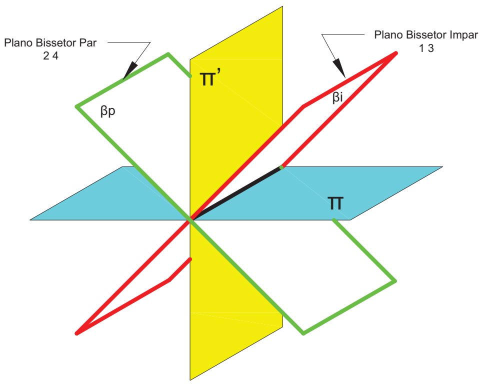


Figura 04. Planos Bissetores

Épura

Monge em seus estudos chegou a conclusão que o espaço em si não era a melhor forma de se representar um objeto, até por que, o que temos para representar os objetos é uma folha de papel, ou seja, um plano. Desta forma, Monge fez o seguinte procedimento, rebateu (rotacionou em torno da LT) o plano horizontal (π) na direção horária fazendo-o coincidir com o plano vertical (π'), em seguida fez o rebatimento acima do plano de perfil (π”) como ilustrado na figura abaixo. A este plano criado

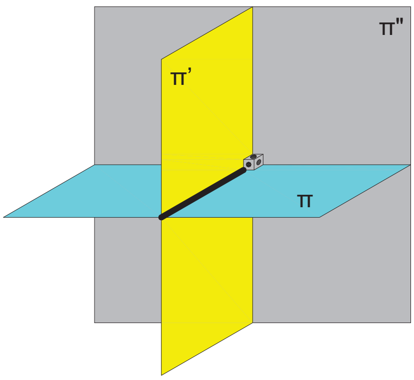


Figura 05. Inclusão do Plano de Perfil

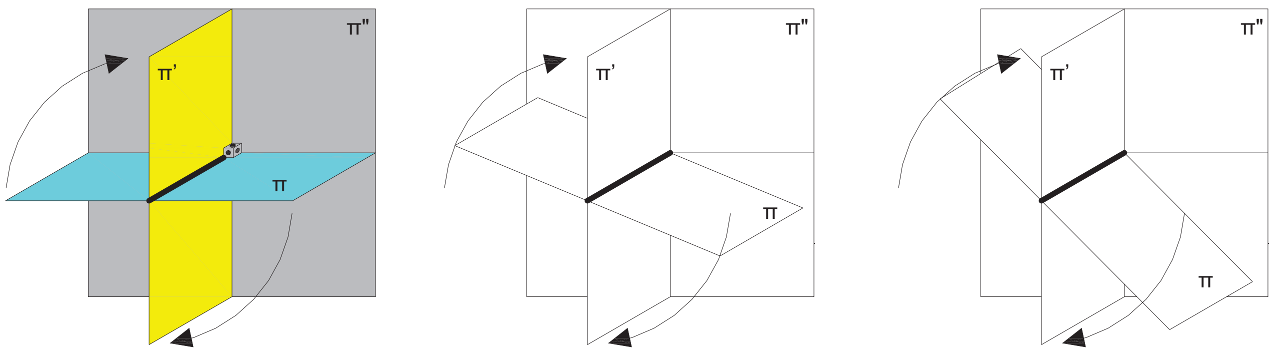


Figura 06 A. Rebatimento dos planos para a composição da Épura

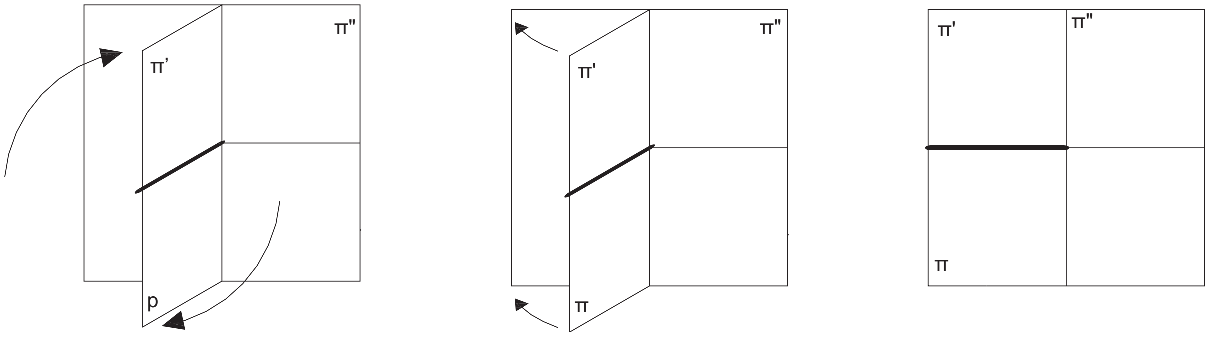


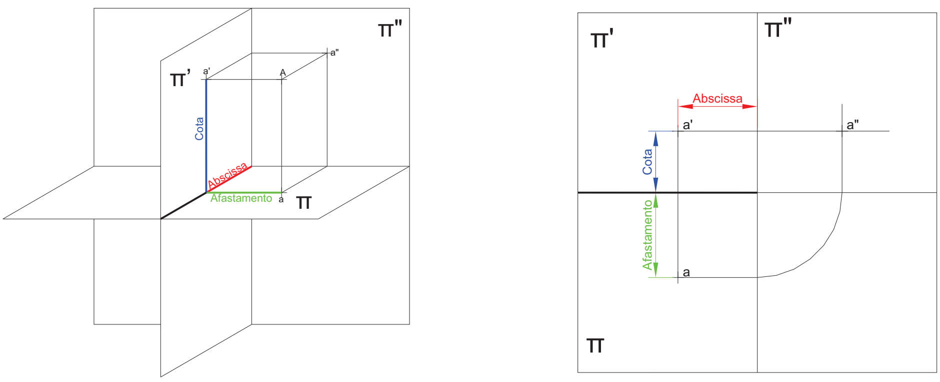
Figura 06 B. Rebatimento dos planos para a composição da Épura

dar-se o nome de Épura, esta por sua vez é capaz de representar formas geométricas tridimensionais complexas através de formas bidimensionais.

A forma mais comum de encontrarmos a Épura é apenas com o Plano Horizontal (π) e com o Plano Vertical (π'), devido ao grande número de problemas que podem ser resolvidos com a utilização apenas destes dois planos, porém esporadicamente, a depender dos problemas faz-se necessário a utilização do Plano de Perfil (π”).

Coordenadas

Tanto no Espaço quanto em Épura utilizaremos três coordenadas para identificação de um ponto, denominadas e ordenadas da seguinte forma: Abscissas, Afastamentos e Cotas como indicado na figura abaixo. A Abscissa é a distância relativa entre o ponto e o Plano de Perfil, o Afastamento é compreendido pela distância relativa entre o ponto e o Plano Vertical e por fim a Cota é a distância relativa do ponto ao Plano Horizontal. Abaixo segue a representação de um Ponto A qualquer no Espaço (Figura 07 A) e em Épura (Figura 07 B).



A B

Figura 07. Representação do ponto A no Espaço (A) e em Épura (B)

Tomaremos como padrão sempre a Abscissa como sendo positiva, e em assim sendo, nota-se que a medida deve ser feita sempre em relação as linhas que dividem o π' do π” para a esquerda, ou seja, o sentido positivo da abscissa.

Os afastamentos, quando com valores positivos, devem ser medidos da Linha de Terra (LT) para baixo e quando os valores forem negativos esta medida deve ser feita da LT para cima.

As cotas quando com valores positivos devem ser medidos da Linha de Terra (LT) para cima e quando os valores forem negativos esta medida deve ser feita da LT para baixo.

A Figura 08 exemplifica a inserção dos pontos A, B, C e D no Espaço, enquanto que a Figura 09 indica os mesmos pontos projetados em Épura.

Exemplo

Projetar o ponto A, B, C e D no Espaço e em Épura identificando qual quadrante encontra-se cada ponto.

A (2, 4, 6); B (4, -3, 3); C (9, -4,-5) e D (1, 5, -3)

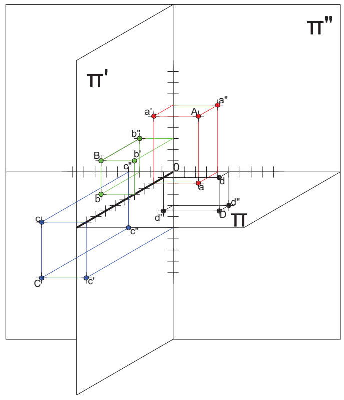


Figura 08. Representação dos pontos A, B, C e D no Espaço

Para o Espaço:

1° Desenhar o Espaço;

2° Inserir as coordenadas dos pontos;

3° Fazer as retas projetantes;

4° Encontrar os pontos.

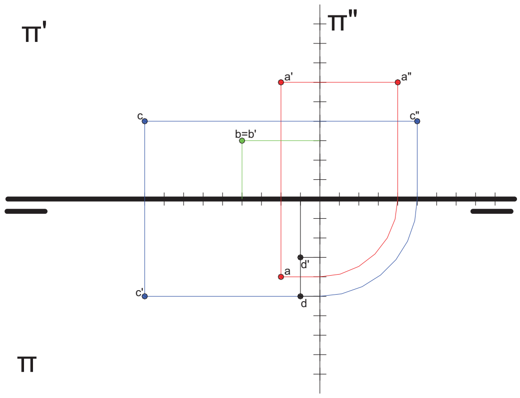


Figura 09. Representação dos pontos A, B, C e D em Épura

Para Épura

1° Desenhar o Espaço;

2° Inserir as coordenadas dos pontos;

3° Fazer as retas projetantes;

4° Encontrar os pontos.

Note que a representação em Épura é de mais fácil compreensão que a representação

Coordenada	Quadrante			
	1º	2º	3º	4º
Afastamento	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Cota	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo

Tabela 01. Posições dos pontos no espaço devido ao sinal das coordenadas

CAPÍTULO 2
ESTUDO DO PONTO

Posições Relativas dos Pontos

O ponto é o menor elemento fundamental da geometria, dando origem a todos os demais elementos geométricos. Apesar da sua importância, não há problemas geométricos apenas com o ponto e sim quando este estiver em conjunto com outros elementos.

O ponto só pode ser posicionado em 9 pontos do Espaço, como ilustrado na figura abaixo. Vale ressaltar que os pontos são representados por letras maiúsculas do alfabeto arábico quando estão no Espaço, já suas projeções nos planos devem ser indicadas por letras minúsculas da seguinte forma: só a letra para as projeções no Plano Horizontal – (b), a letra acompanhada de uma aspa para projeções no Plano Vertical – (b') e a letra acompanhada de duas aspas para projeções no Plano de Perfil – (b").

Nota-se pela Figura 10 que os pontos podem ocupar lugar no 1° (A), 2° (C), 3° (E) e 4° Diedro (G), como também acima dos semi-planos que compõe o Espaço, o SPVS (B), SPHP (D), SPVI (F), SPHA (H), e por fim o ponto pode encontrar-se acima da Linha de Terra (I). Em Épura estes mesmos pontos são representados como ilustrados na Figura 11. O posicionamento dos pontos também pode ser observado na Tabela 02, através de suas coordenadas de afastamento e cota.

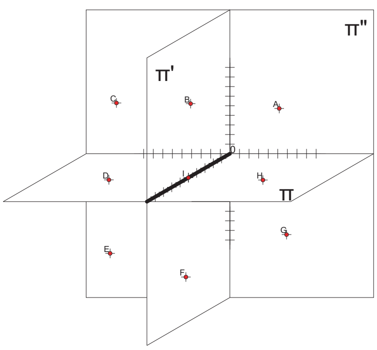


Figura 10. Pontos assumindo posições no Espaço

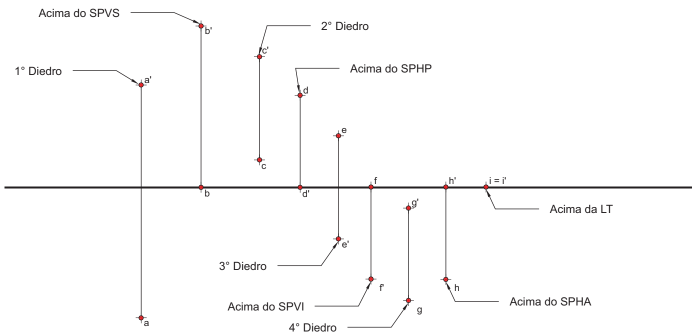


Figura 11. Pontos assumindo posições em Épura

	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D	Ponto E	Ponto F	Ponto G	Ponto H	Ponto I
Posição no Espaço	1º Diedro	SPVS	2º Diedro	SPHP	3º Diedro	SPVI	4º Diedro	SPHA	LT
Afastamento	Positivo	0	Negativo	Negativo	Negativo	0	Positivo	Positivo	0
Cota	Positivo	Positivo	Positivo	0	Negativo	Negativo	Negativo	0	0

Tabela 02. Posicionamento dos pontos através de coordenadas

Pontos colineares

Três pontos são ditos colineares se por estes pontos passar uma única linha reta. Em Épura, a representação dos pontos em cada plano de projeção também ficará numa mesma linha reta como exemplificado na Figura 12.

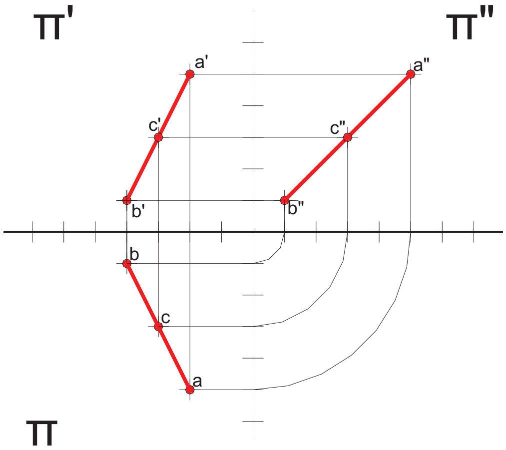


Figura 12. Pontos colineares

Pontos coplanares

Pontos coplanares são aqueles que quando unidos dão origem a um plano imaginário. Se por dois pontos pode-se passar infinitos planos, por um determinado conjunto de pontos não colineares (composto de pelo menos três pontos) pode-se passar um e somente um único plano (Figura 13).

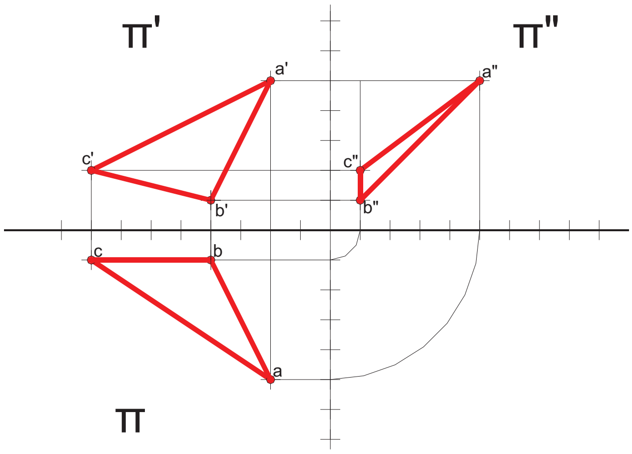


Figura 13. Pontos coplanares

CAPÍTULO 3
ESTUDO DA RETA

Projeção de retas

A projeção de uma reta sobre um plano de projeção qualquer é, em geral, uma reta. Sendo suficientes dois pontos para determiná-la, suas projeções serão obtidas, fazendo-se as projeções de dois de seus pontos tomados sobre essa reta. Tomemos como exemplo para o melhor aprendizado, os pontos A e B de coordenadas A (2; 1; 3) e B (4; 5; 2), que constituem um seguimento de reta AB, a Figura 14 ilustra este seguimento sendo projetado no Espaço (A) e em Épura (B).

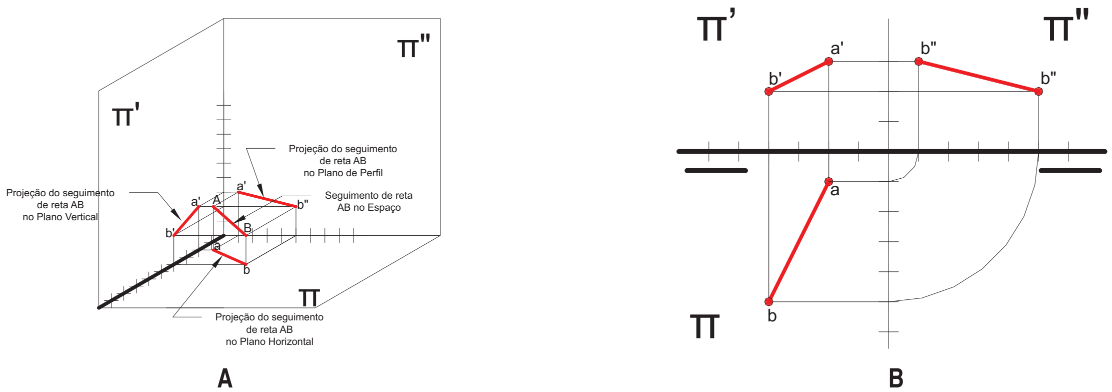


Figura 14. Projeção do seguimento AB no Espaço (A) e em Épura (B)

Posição de retas em relação aos planos principais

A reta em relação aos planos de projeção podem se comportar de três formas:

- PARALELA – Projeção da reta igual ao próprio segmento, ou seja, tanto o seguimento de reta quanto a projeção tem a mesma medida;
- OBLIQUA – Quando a reta projetada é menor que o tamanho real do seguimento;
- PERPENDICULAR – Quando a projeção em um dos planos é reduzida a um ponto.

Estas três posições da reta em relação ao plano devem ser observadas nos três planos principais, ou seja, Plano Horizontal (π), Plano Vertical (π') e Plano de Perfil (π''). Portanto, uma reta fica bem determinada se conhecermos o comportamento delas em relação ao PH, PV e PP.

Vimos, portanto, que uma reta em relação a um plano, pode encontrar-se de três formas: Paralela, Obliqua ou ainda Perpendicular. Como são três planos (PH, PV e PP), resultará, portanto, em sete posições diferentes, que determinarão os nomes (identidades) e as propriedades particulares de cada uma delas, para tal separaremos as retas em três grupos com a finalidade de facilitar o estudo e o aprendizado.

Quando o tamanho da reta projetada em um dos planos coincide com o tamanho da reta real dizemos que esta reta está em Verdadeira Grandeza ou simplesmente VG, este conceito tem que ficar internalizado, pois a VG será muito utilizada nos problemas subsequentes.

Retas do primeiro grupo

Neste primeiro momento, as retas serão estudadas quanto ao perpendicularismo existente entre a reta e os planos principais. Isto é, estudaremos aquelas retas que se projetam de forma perpendicular ao PH, PV e PP. A principal característica destas retas está no fato de que a sua projeção em um dos planos principais é apenas um ponto e as demais como são projetadas de forma paralela indicam sua Verdadeira Grandeza (VG) (Tabela 03). A Figura 15 ilustra como é o comportamento das retas do primeiro grupo em relação aos planos principais de projeção.

Retas do Grupo 1	Comportamento das retas em relação aos planos principais				
	Identidade	**PH (π)**	**PV (π')**	**PP (π'')**	**VG**
	Vertical	Perpendicular	Paralela	Paralela	PV e PP
	Topo	Paralela	Perpendicular	Paralela	PH e PP
	Fronto Horizontal	Paralela	Paralela	Perpendicular	PH e PV

Tabela 03. Retas do 1° grupo

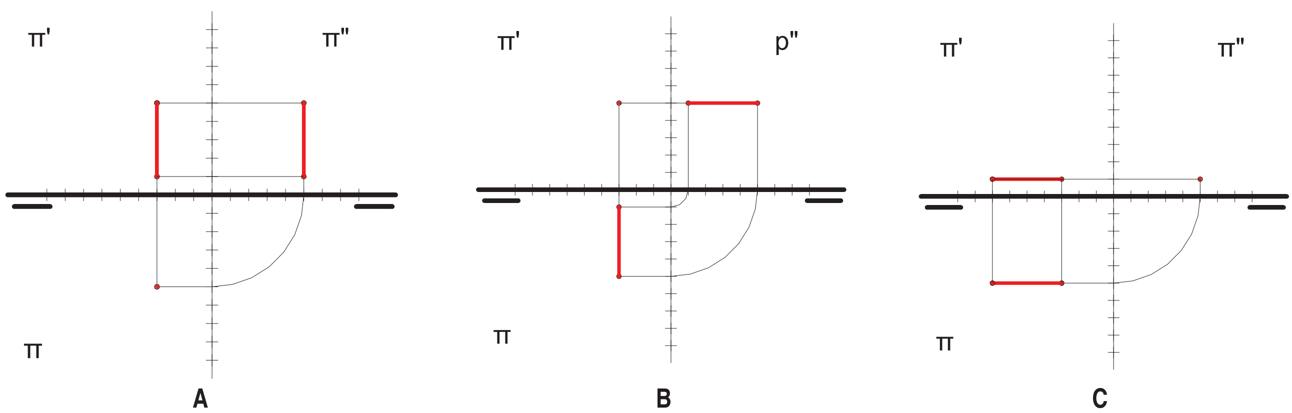


Figura 15. Comportamento da reta Vertical (A), de Topo (B) e Fronto Horizontal (C) em Épura

Retas do segundo grupo

As retas do segundo grupo serão estudadas quanto ao paralelismo existente entre as retas e os planos principais de projeção, tendo portanto uma projeção em VG e as demais apresentando medidas reduzidas em relação aos tamanhos originais do seguimento de reta.

Para que um ponto pertença a uma reta se faz necessário que suas projeções estejam sobre as projeções correspondentes desta reta, unidas por uma mesma projetante, ou seja, por uma linha de chamada. Para qualquer reta isto poderá ser observado apenas com as projeções no PH e PV, com exceção apenas das retas de Perfil, que terá que ser observado fazendo a projeção nos três planos principais PH, PV e PP. A Tabela 04 mostra a relação das retas do segundo grupo com os planos principais de projeção, enquanto que a Figura 16 ilustra como é o comportamento das retas do segundo grupo em Épura.

Retas do Grupo 2	Comportamento das retas em relação aos planos principais				
	Identidade	PH (π)	PV (π')	PP (π'')	VG
	Horizontal	Paralela	Oblíqua	Oblíqua	PH
	Frontal	Oblíqua	Paralela	Oblíqua	PV
	Perfil	Oblíqua	Oblíqua	Paralela	PP

Tabela 04. Retas do 2° grupo

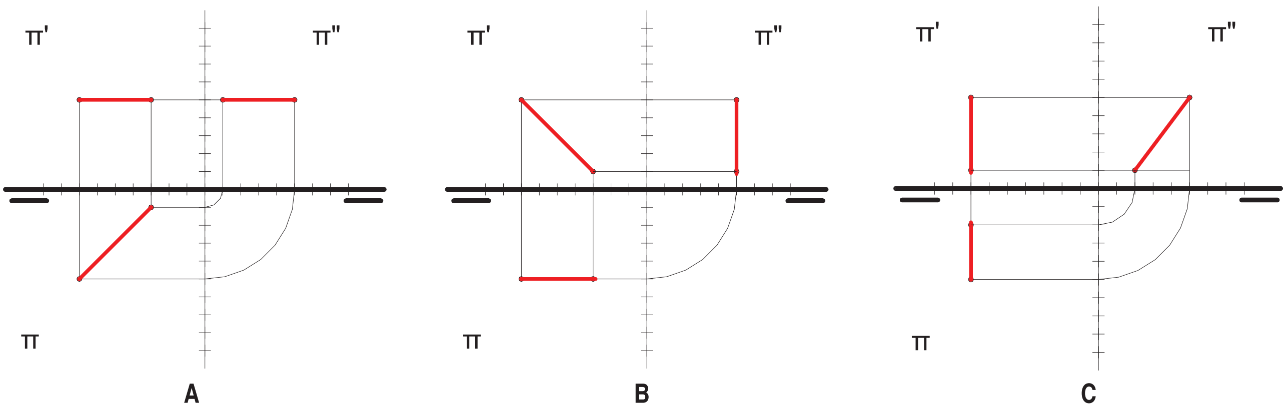


Figura 16. Comportamento da reta Horizontal (A), Frontal (B) e Perfil (C) em Épura

Retas do terceiro grupo

As retas do terceiro grupo são caracterizadas por não apresentarem VG em nenhum dos planos principais, como também terem suas projeções todas obliquas aos planos PH, PV e PP. Para achar a VG destas retas temos que utilizar métodos descritivos, os quais veremos mais adiante. A Tabela 05 mostra a relação da reta do terceiro grupo com os planos principais de projeção, enquanto que a Figura 17 ilustra como é o comportamento das retas do segundo grupo em Épura.

Retas do Grupo 3	Comportamento das retas em relação aos planos principais				
	Identidade	PH (π)	PV (π')	PP (π'')	VG
	Qualquer	Oblíqua	Oblíqua	Oblíqua	Não apresenta VG

Tabela 05. Reta do 3° grupo

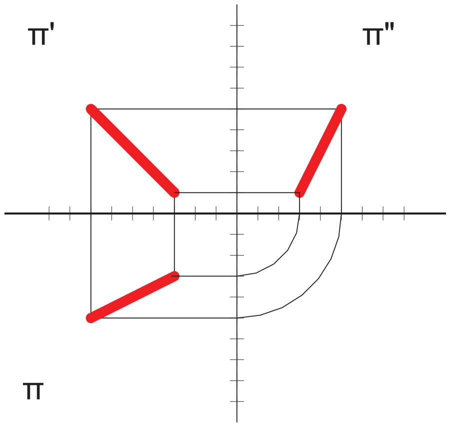


Figura 17. Comportamento da reta Qualquer em Épura

Traços das retas

Os traços das retas são locais onde a reta perfura os planos no espaço, deve-se lembrar de que a reta é um elemento infinito nas duas posições, já um segmento de reta é delimitado por dois pontos, quando imaginamos esta reta como elemento infinito, esta tende a perfurar os planos em algum local, que geralmente não conseguirmos observar, mas que pode ser prontamente encontrado na Épura observando os traços das retas.

Se observarmos a Épura do seguimento de reta AB indicado na Figura 18 A podemos concluir que este segmento de reta esta completamente inserido no 1° diedro, pois [a e b] estão projetados no plano horizontal (π), enquanto que [a' e b'] estão projetados no plano vertical (π'), ou seja, "A" pertence ao primeiro diedro e "B" pertence ao primeiro diedro, logo o seguimento AB está contido no primeiro diedro.

Para encontrarmos o traço desta reta ou os pontos onde esta reta perfura o plano temos que fazer o prolongamento do segmento de reta "ab" até que esta toque a LT, encontrando assim o ponto H que corta o plano horizontal (π). O mesmo se faz com o segmento a'b', encontrando assim, o ponto v' que corta o plano vertical (π') (Figura 18 B).

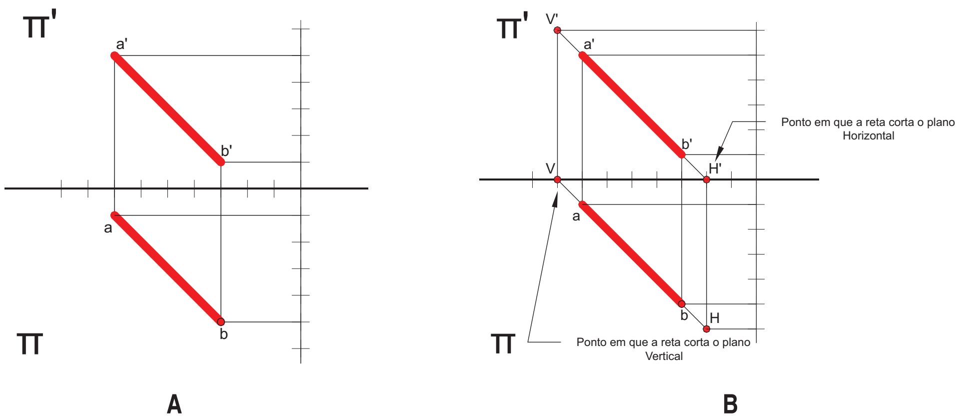


Figura 18. Épura do seguimento AB (A) e Traço do seguimento de reta AB (B)

Conclui-se então que a reta corta o SPVS e tem sua continuação no 2° diedro, pois v' encontra-se sobre a LT e o v está sobre o PH com as coordenadas podendo ser encontradas bastando utilizar a régua para a medição da Abscissa, Afastamento e Cota.

Na parte horizontal a reta corta o SPHA e tem a sua continuação no 4° diedro, pois H encontra-se sobre a

LT e o H' está no sobre o PV com as coordenadas podendo ser encontradas bastando utilizar a régua para a medição dos Abscissa, Afastamento e Cota. A Figura 19 comprova o comportamento da reta em questão no Espaço.

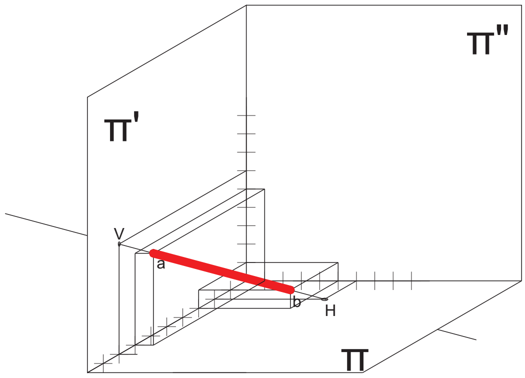


Figura 19. Traço da reta representada no Espaço

Direção das retas

É o ângulo formado entre o norte (de frente para o plano vertical - PV) e a projeção horizontal da reta, sua determinação é feita a partir do ponto que inicia a reta. A direção é representada pelo símbolo “θ” (theta) e deve ser expressa em graus. Para determinação do ângulo de direção utiliza-se o transferidor para medir o ângulo entre o norte imaginário e a projeção horizontal da reta, a partir de sua origem, sempre no sentido horário. Desta forma a direção sempre deve ser medida no Plano Horizontal(π) como mostrado na Figura 20.

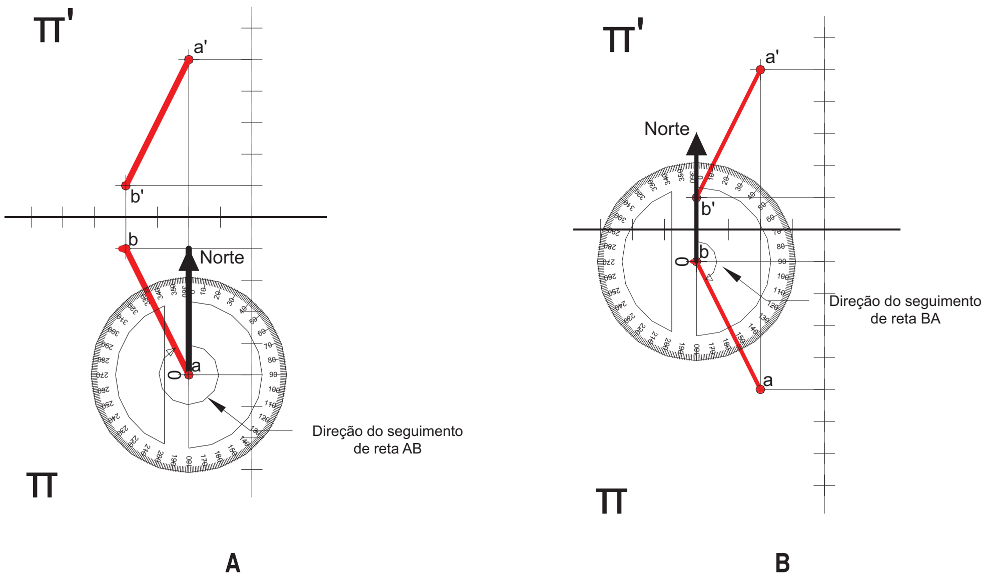


Figura 20. Direção do seguimento de reta AB (A) e Direção do seguimento de reta BA (B)

Nota-se que ambos os desenhos acima estão relacionados com o mesmo seguimento de reta AB, ou seja, os seguimentos são iguais, porém a direção do seguimento AB é diferente da direção do seguimento BA. Conclui-se então que a direção da reta AB θ=333° enquanto que a direção do seguimento de reta BA é θ=153°. Vale salientar que este conceito é válido para as retas dos três grupos. A reta vertical é a única que não possui direção, pois ela é perpendicular ao PH, ou seja, projeta-se de forma pontual no PH (π), fazendo com que seja impossível medir sua direção.

Inclinação das retas

A inclinação da reta é por definição o ângulo formado entre a reta e o plano horizontal de projeção. É representada pelo símbolo "Ø"(phi) e tem sua determinação em um plano de projeção perpendicular ao plano horizontal e que mostra a reta em verdadeira grandeza (tamanho real). As retas do 1° grupo tem inclinação máxima ou mínima, já as retas do grupo 2 apresentam inclinação mostrada no PV ou PP, por serem planos perpendiculares ao PH e devem ser medidas com o transferidor. As retas do grupo três não apresentam VG em nenhum dos planos principais, desta forma para achar a sua inclinação necessita-se fazer algumas operações descritivas para encontrar este valor, essas operações serão fruto de estudo mais adiante. A Figura 21 abaixo mostra a inclinação da reta vertical pertencente ao 1° grupo e da reta frontal pertencente ao segundo grupo.

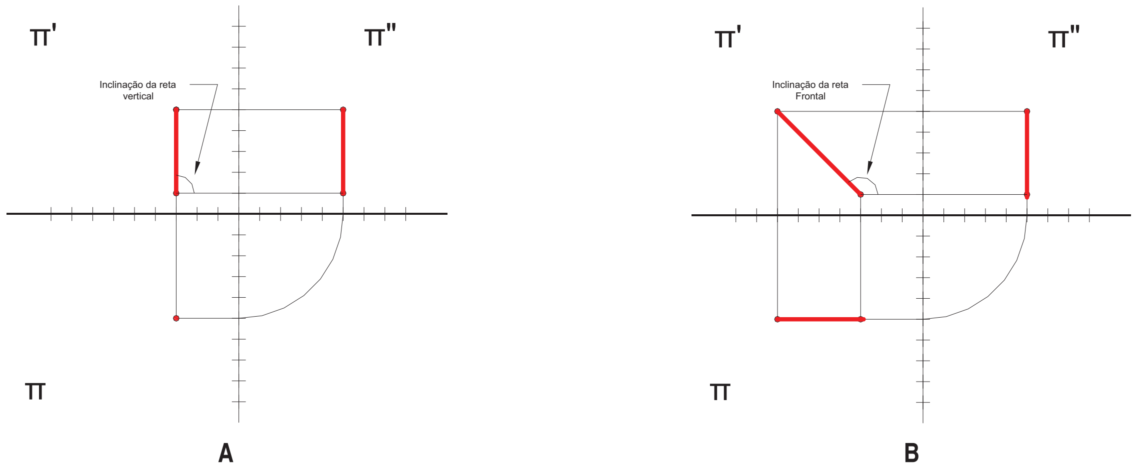


Figura 21. Inclinação da reta vertical (A) e frontal (B)

Posição relativa entre duas retas

Duas retas podem ser concorrentes, paralelas ou reversas entre si. Se concorrentes, têm um ponto comum e são coplanares, se paralelas, mantêm entre si a mesma distância e também determinam um plano. Mas, se forem reversas, não há plano que as contenha.

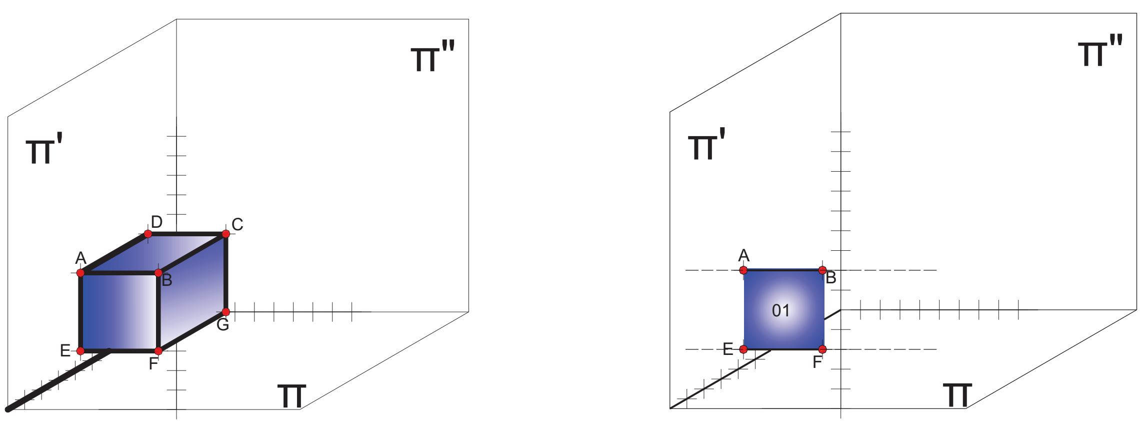


Figura 22. Retas Paralelas, Concorrentes e Reversas

Para o melhor entendimento destes posicionamentos de retas, tomemos como base o exemplo de um cubo inserido no espaço, este cubo é composto de vários seguimentos de reta, se observarmos o seguimento de reta AB e EF, nota-se que elas nunca se encontraram mesmo com os seus prolongamentos, estes seguimentos entre si, sempre terão a mesma distância e ainda delimita o Plano 01 o que denota o paralelismo entre elas, o mesmo pode ser observado entre o seguimentos de reta BC e FG e outras retas contidas neste cubo.

Agora observemos os seguimentos de reta AB e BC, note que estes dois seguimentos concorrem para um ponto em comum, que neste caso seria o ponto B (ponto de concorrência), significando que estas duas retas são concorrentes e que ainda delimitam o plano 03.

Para o conceito de retas reversas, observe que o seguimento de reta AB e FG nunca poderão delimitar nenhum plano, logo conclui-se que estes dois seguimentos não são coplanares, o que indica retas reversas.

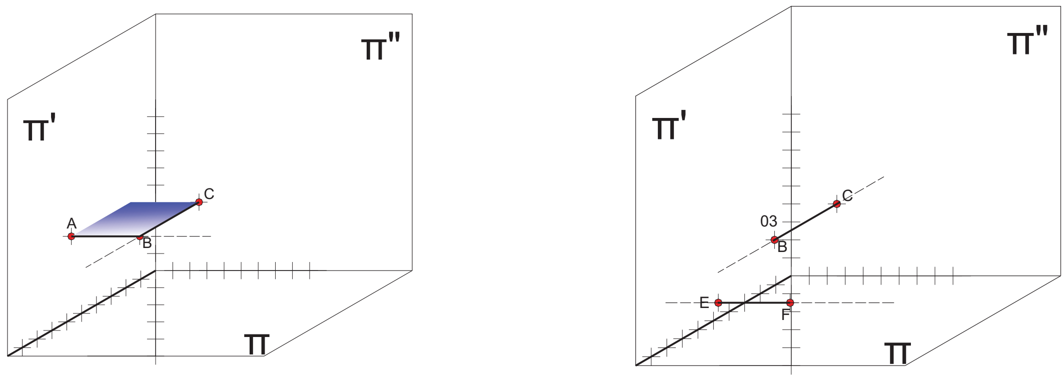


Figura 22. Retas Paralelas, Concorrentes e Reversas

CAPÍTULO 4
ESTUDO DO PLANO

O plano, também chamado de superfície, é a extensão expressa em duas dimensões: comprimento e largura. A superfície plana (Plano) é uma superfície tal que toda reta que une dois quaisquer de seus pontos, está inteiramente compreendida nesta superfície. Um plano é determinado por:

- Três pontos não colineares;
- Um ponto e uma reta;
- Duas retas concorrentes;
- Duas retas paralelas.

Planos do primeiro grupo

Os planos podem ser Limitados ou Ilimitados, sendo o primeiro é limitados por linhas que o delimitam e, o segundo é imensurável, sendo necessário o estudo do traço do plano para compreende-lo.

Similar ao estudo do ponto, o plano também é dividido em três grupos principais (Tabela 06), o primeiro com relação ao paralelismo existente entre o Plano Estudado e o Plano Horizontal (π), o Plano Vertical (π') e o Plano de Perfil (π''), podemos ver o comportamento dos planos do primeiro grupo nas Figuras 23, 24 e 25.

Planos do Grupo 1	Comportamento dos planos em relação aos planos principais				
	Identidade	**PH**	**PV**	**PP**	**VG**
	Horizontal	Paralelo	Perpendicular	Perpendicular	PH (π)
	Frontal	Perpendicular	Paralelo	Perpendicular	PV (π')
	Perfil	Perpendicular	Perpendicular	Paralelo	PP (π'')

Tabela 06. Planos do 1° grupo

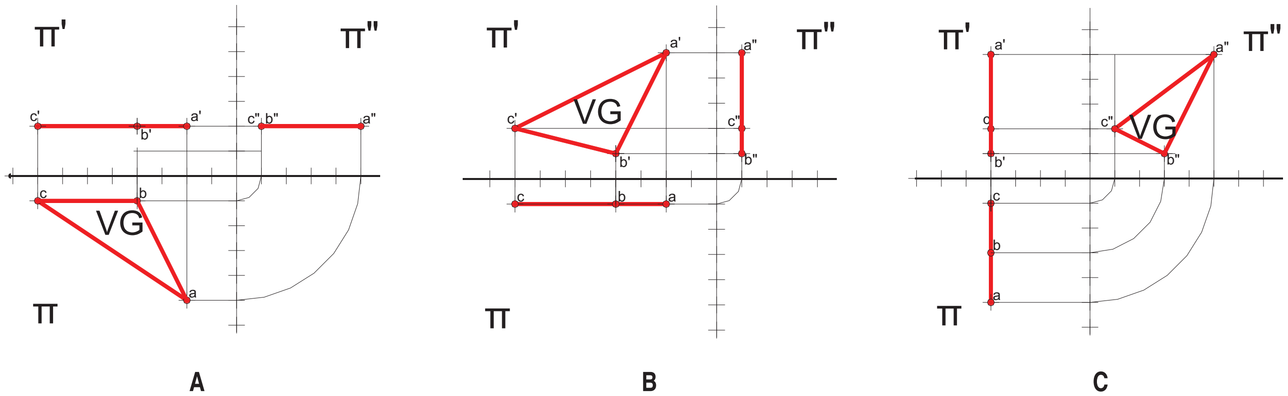


Figura 23. Comportamento do Plano Horizontal (A), Frontal (B) e de Perfil (C)

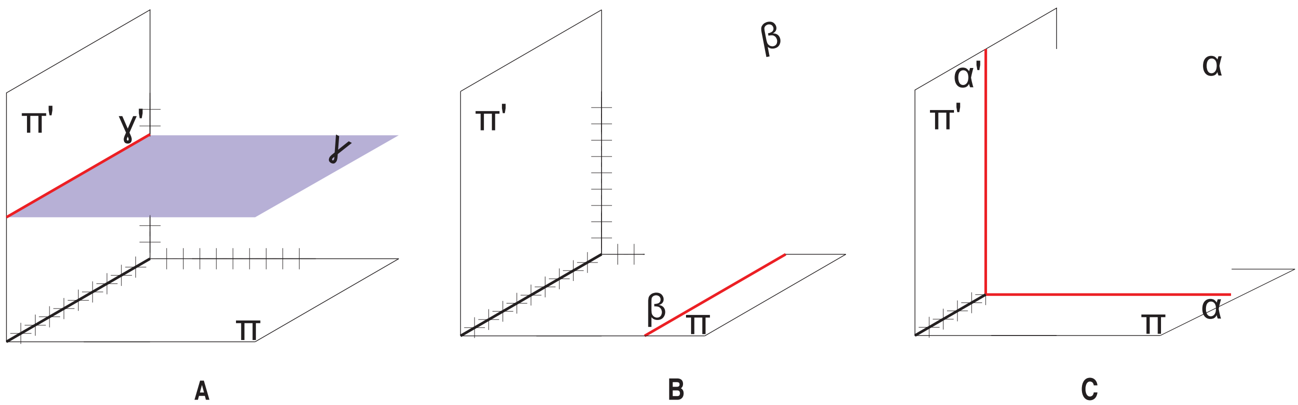


Figura 24. Comportamento do Plano Horizontal (A), Frontal (B) e de Perfil (C) quando não limitados por pontos no Espaço

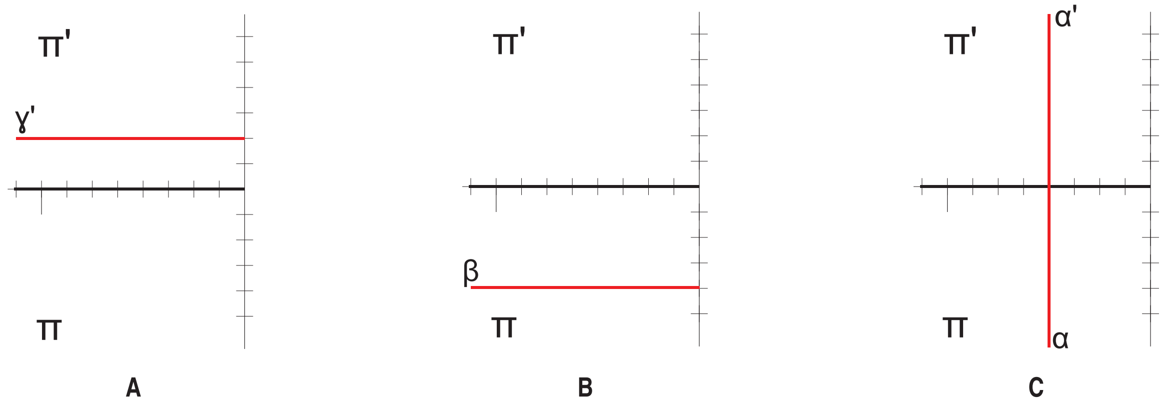


Figura 25. Comprtamento do Plano Horizontal (A), Frontal (B) e de Perfil (C) quando não limitados por pontos em Épura

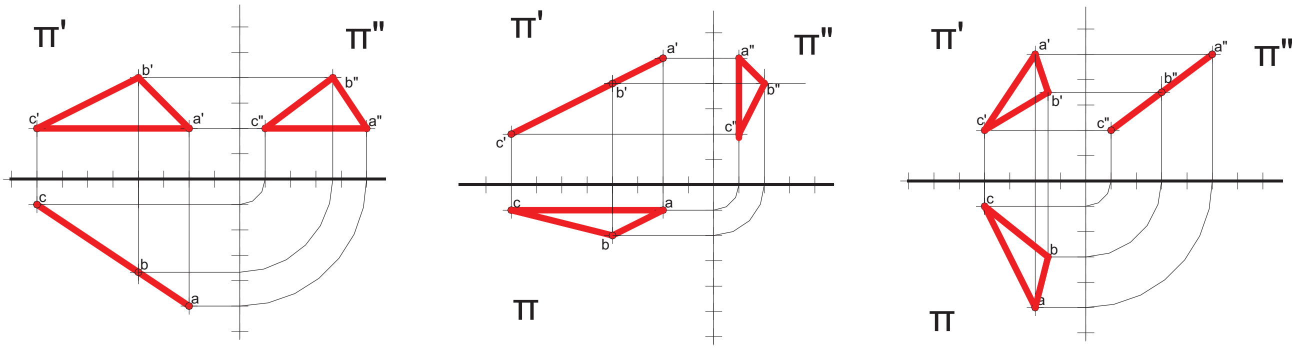
Planos do segundo grupo

Pertencem a este grupo todos os planos que forem perpendiculares a um dos Planos Principais de Projeção (π, π', π″) como mostra a Tabela 07. Estes planos tem por característica de não apresentar VG em nenhum dos planos principais, sendo necessário inserir um plano auxiliar primário que deve ser perpendicular ao plano em que é apresentada a projeção linear do plano estudado.

Podemos ver o comportamento dos planos do segundo grupo nas Figuras 26, 27 e 28, ilustramos ainda o comportamento do plano que intercepta a linha de terra (Figura 29).

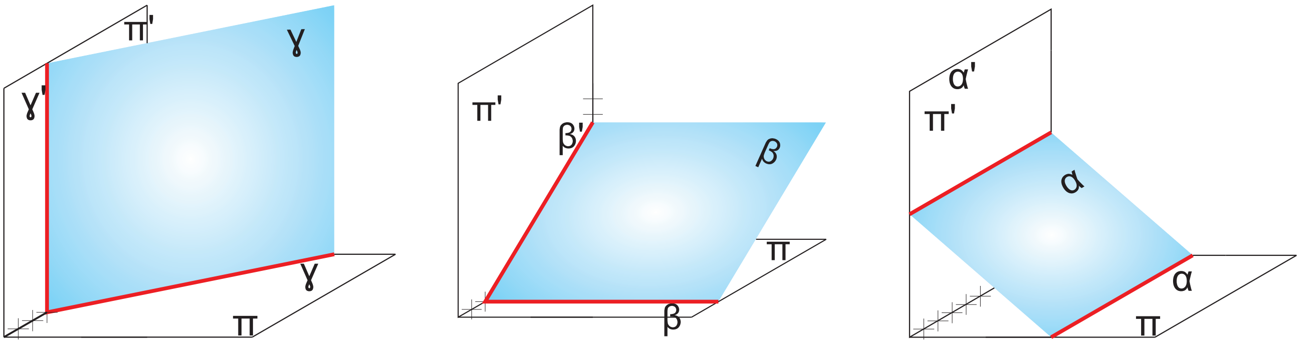
Planos do Grupo 2	Comportamento dos planos em relação aos planos principais				
	Identidade	PH	PV	PP	VG
	Vertical	Perpendicular	Oblíquo	Oblíquo	Plano Auxiliar Perpendicular ao PH
	Topo	Oblíquo	Perpendicular	Oblíquo	Plano Auxiliar Perpendicular ao PV
	Rampa	Oblíquo	Oblíquo	Perpendicular	Plano Auxiliar Perpendicular ao PP

Tabela 07. Planos do 2° grupo



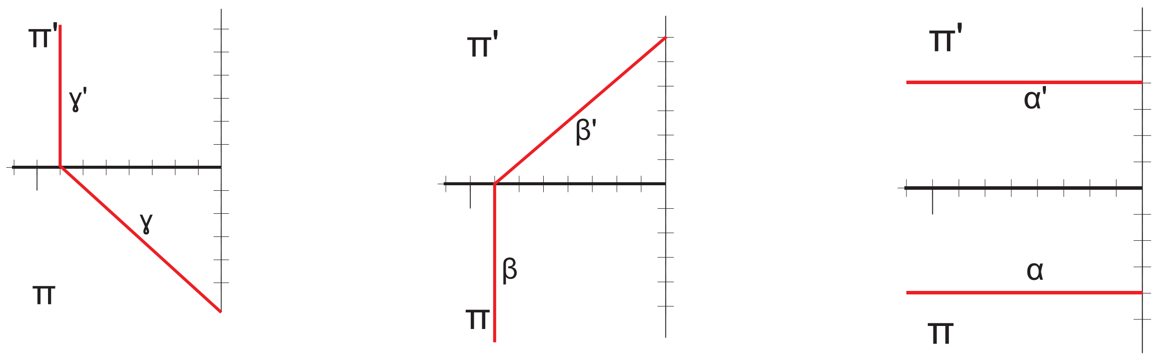
A B C

Figura 26. Comportamento do Plano Vertical (A), Topo (B) e de Rampa (C) quando limitados por pontos



A B C

Figura 27. Comportamento do Plano Vertical (A), Topo (B) e de Rampa (C) quando não limitados por pontos no Espaço



A B C

Figura 28. Comportamento do Plano Vertical (A), Topo (B) e de Rampa (C) quando não limitados por pontos em Épura

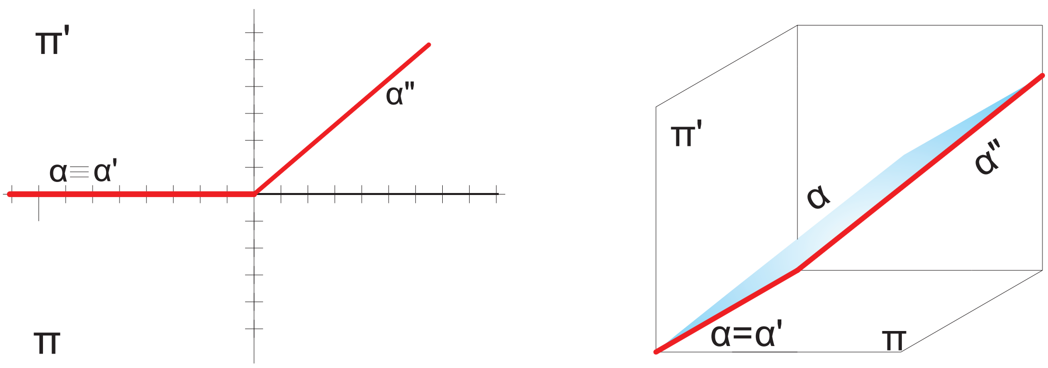


Figura 29. Comportamento do Plano que intercepta a Linha de Terra (LT) quando não limitados por pontos em Épura

Planos do terceiro grupo

Os planos do terceiro grupo indicados na Tabela 08 são caracterizados por apresentarem as projeções obliquas aos planos principais de projeção, a sua VG só poderá ser encontrada em um Plano Secundário, como indica a tabela abaixo.

Podemos ver o comportamento do plano do terceiro grupo nas Figuras 30, 31 e 32.

Planos do Grupo 3	Comportamento dos planos em relação aos planos principais			
Identidade	PH	PV	PP	VG
Qualquer	Oblíquo	Oblíquo	Oblíquo	Plano Auxiliar Secundário

Tabela 08. Plano do 3° grupo

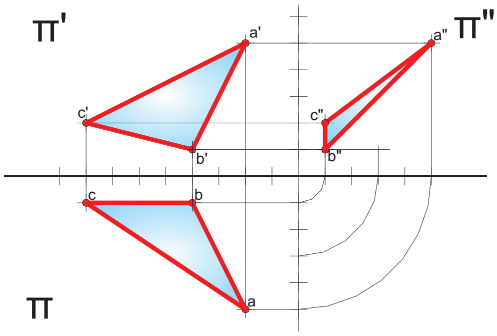


Figura 30. Comportamento do Plano Qualquer limitados por pontos em Épura

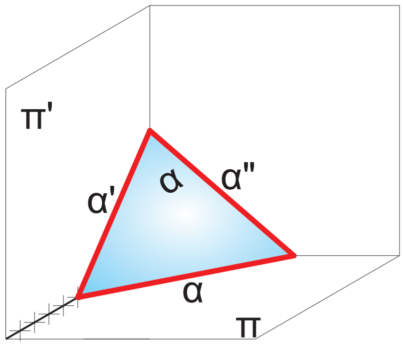


Figura 31. Comportamento do Plano Qualquer não limitados por pontos no Espaço

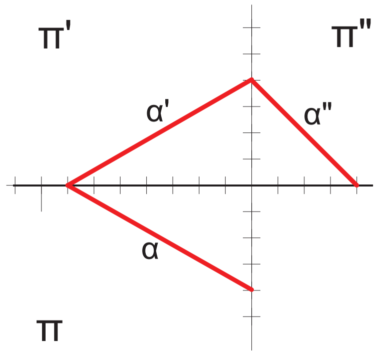


Figura 32. Comportamento do Plano Qualquer não limitados por pontos em Épura

CAPÍTULO 5
RELAÇÃO ENTRE PLANOS E RETAS

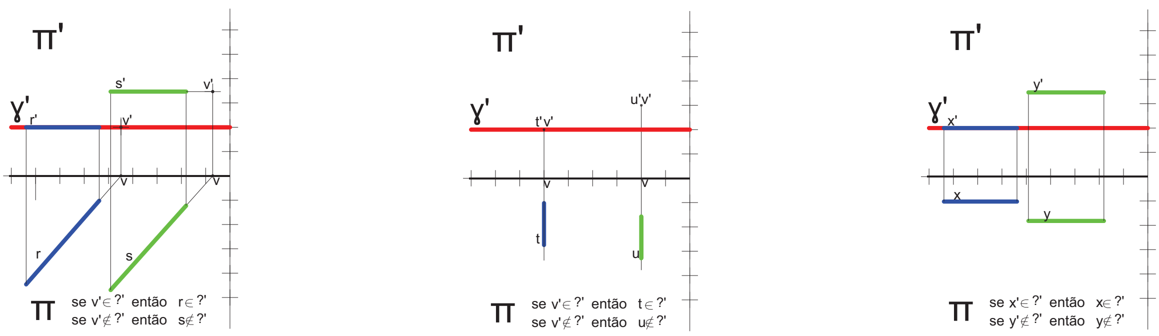
Relação entre retas e planos do primeiro grupo

Relação com o plano horizontal

Uma reta Horizontal ou uma reta de Topo pertence a um plano Horizontal, se o traço vertical da reta estiver sobre o traço vertical do plano e a projeção vertical da reta coincidir com o traço vertical do plano.

Nota-se através da Figura 33 (A) que a reta “r” (reta horizontal) pertence ao plano horizontal, pois o traço desta reta esta sobre o traço do plano horizontal, o mesmo não ocorre com a reta “s”. Já na Figura 33 (B), é possível identificar que a projeção pontual da reta “t” está sobre o traço do plano horizontal, denotando que “t” pertence ao a este plano, o que não ocorre com a reta “u”.

Para que a reta Fronto-horizontal pertença ao plano Horizontal, a projeção vertical da reta deve coincidir com o traço vertical do plano, como ilustrado na Figura 33 (C), onde conclui-se que “x” pertence ao plano horizontal e “y” não pertence, pois o traço vertical do plano não coincide com a projeção vertical da reta “y”.



A B C

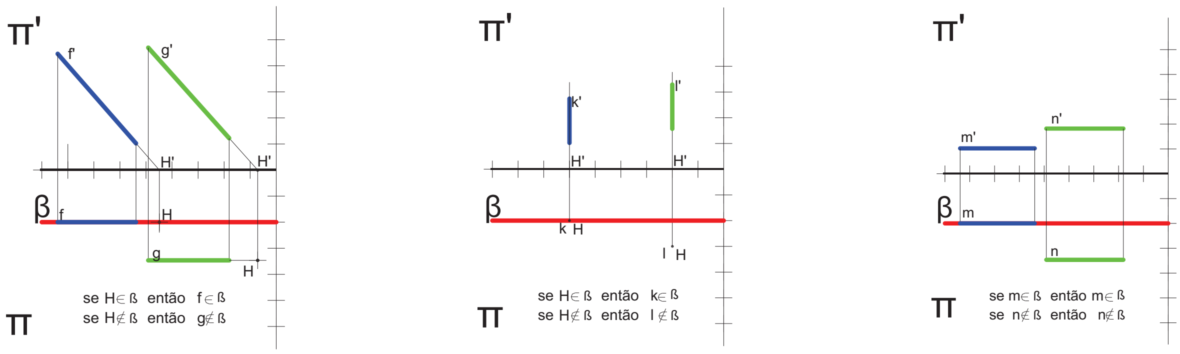
Figura 33. Relação de pertinência entre o Plano Horizontal e a reta Horizontal (A), a reta de Topo (B) e a reta Fronto-horizontal (C)

Relação com o plano frontal

A reta Frontal ou a Vertical pertencem a um plano Frontal, se o traço horizontal da reta estiver sobre o traço horizontal do plano e a projeção horizontal da reta coincidir com o traço horizontal do plano.

A Figura 34 (A) indica que “f” pertence ao plano frontal, pois o traço da reta frontal está sobre o traço do plano frontal, esta mesma situação não é observada na reta “g”, podemos ainda concluir que a reta vertical “k” pertence ao plano frontal, já que a projeção pontual da reta está sobre o traço do plano, já a reta “l” não pertence ao plano (Figura 34 B).

A reta Fronto-horizontal só pertence a um plano Frontal, se a projeção horizontal da reta coincidir com o traço horizontal do plano, como indicado na Figura 34 (C), em que a reta “m” pertence ao plano frontal, diferentemente da reta “n”.

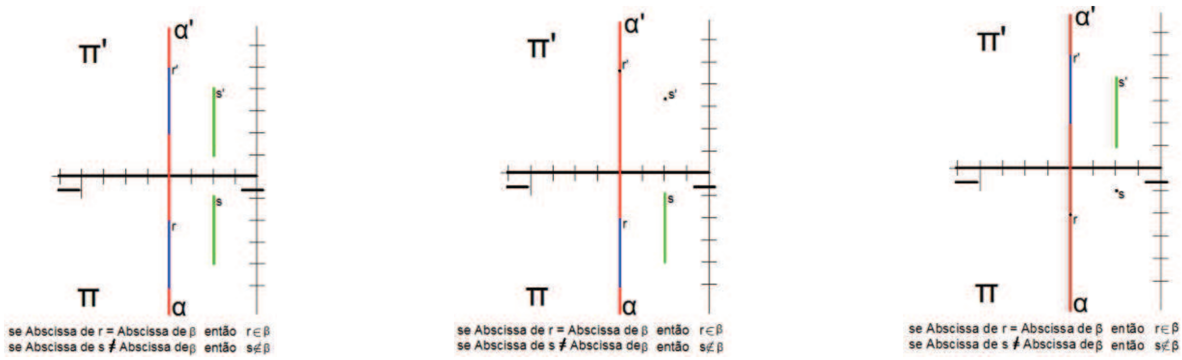


A B C

Figura 34. Relação de pertinência entre o Plano Frontal e a reta de Frontal (A), a reta Vertical (B) e a reta de Fronto-horizontal (C)

Relação com o plano de perfil

As retas de Perfil, Vertical e Topo pertencem ao plano de Perfil, se a abscissa da reta for à mesma do Plano de Perfil como ilustrados nas Figuras 35 (A, B e C), respectivamente. Observa-se que as abscissas das retas “o”, “p” e “z” coincidem com a abscissa do plano de Perfil, denotando que estas retas pertencem a este plano.



A B C

Figura 35. Relação de pertinência entre o Plano Perfil e a reta de Perfil (A), a reta Vertical (B) e a reta de Topo (C)

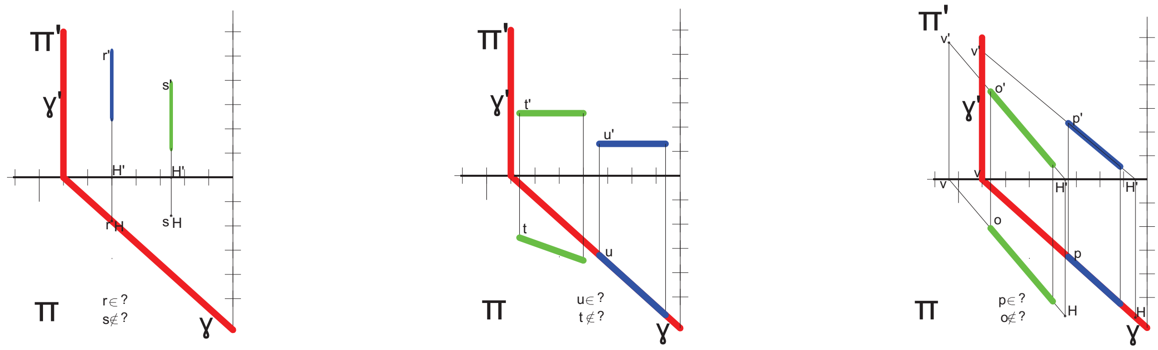
Relação entre retas e planos do segundo grupo

Relação com o plano de vertical

A reta Vertical pertence a um plano Vertical, se sua projeção horizontal e o seu traço horizontal estiver sobre o traço horizontal do plano, como é o caso da reta “r” ilustrado na Figura 36 (A).

A reta “u” da Figura 36 (B) denota que uma reta Horizontal só pertencerá a um plano Vertical, se sua projeção horizontal coincidir com o traço horizontal do plano e o seu traço vertical estiver sobre o traço vertical do plano.

Para saber se a reta Qualquer pertence ao plano Vertical, deve-se encontrar primeiramente o traço da reta, desta forma, devemos observar se sua projeção horizontal coincide com o traço horizontal do plano e se o traço vertical está sobre o traço vertical do plano, como indica a reta "p" da Figura 36 (C).



A B C

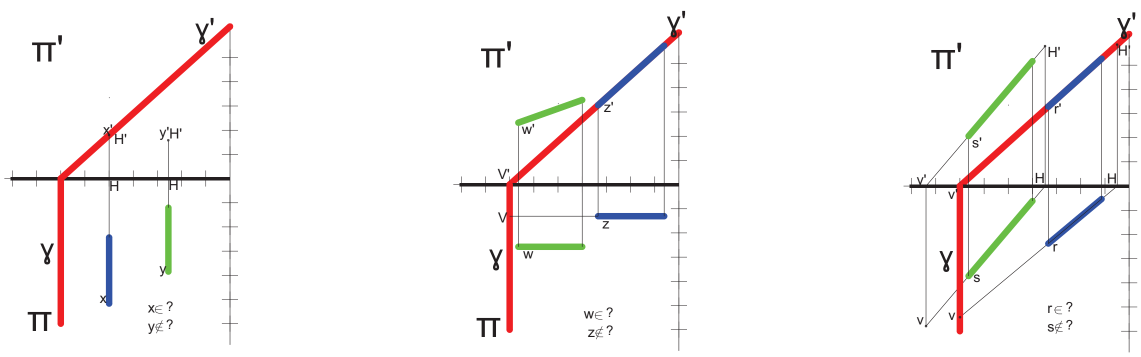
Figura 36. Relação de pertinência entre o Plano Vertical e a reta de Vertical (A), a reta Horizontal (B) e a reta de Qualquer (C)

Relação com o plano de topo

A reta de Topo pertence a um plano de Topo, se sua projeção vertical e o seu traço vertical estiver sobre o traço vertical do plano, como indicado na reta "x" da Figura 37 (A) .

A reta Frontal pertence a um plano de Topo, se sua projeção vertical coincidir com o traço vertical do plano e o seu traço horizontal estiver sobre o traço horizontal do plano, é possível perceber esta pertinência através da reta "z" contida na Figura 37 (B).

A reta Qualquer pertence a um plano de Topo, se sua projeção vertical coincidir com o traço vertical do plano, seu traço vertical estiver sobre o traço vertical do plano e o seu traço horizontal estiver sobre o traço horizontal do plano como mostra a reta "r" da Figura 37 (C).



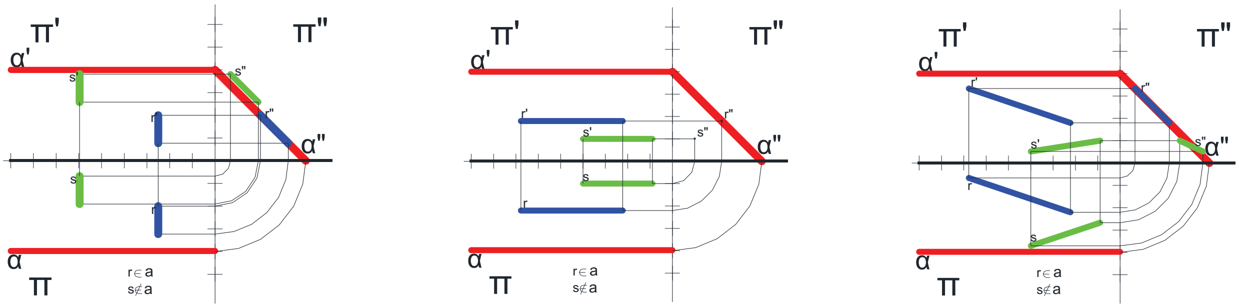
A B C

Figura 37. Relação de pertinência entre o Plano de Topo e a reta de Topo (A), a reta Frontal (B) e a reta de Qualquer (C)

Relação com o plano de rampa

Para determinar se a reta de Fronto-horizontal pertence ao plano de rampa, deve-se fazer a projeção pontual da reta no plano de perfil, se esta coincidir com o plano rampa, conclui-se que a reta pertence ao plano (Figura 38 A).

Para determinar se a reta de Perfil ou Qualquer pertence ao plano de rampa, deve-se fazer a projeção da reta no plano de perfil, se esta coincidir com o plano rampa, conclui-se que a reta pertence ao plano, como indicado nas Figuras 38 (A) e (B).



A B C

Figura 38. Relação de pertinência entre o Plano de Rampa e a reta de Fronto-horizontal (A), a reta Perfil (B) e a reta de Qualquer (C)

Relação entre retas e planos do terceiro grupo

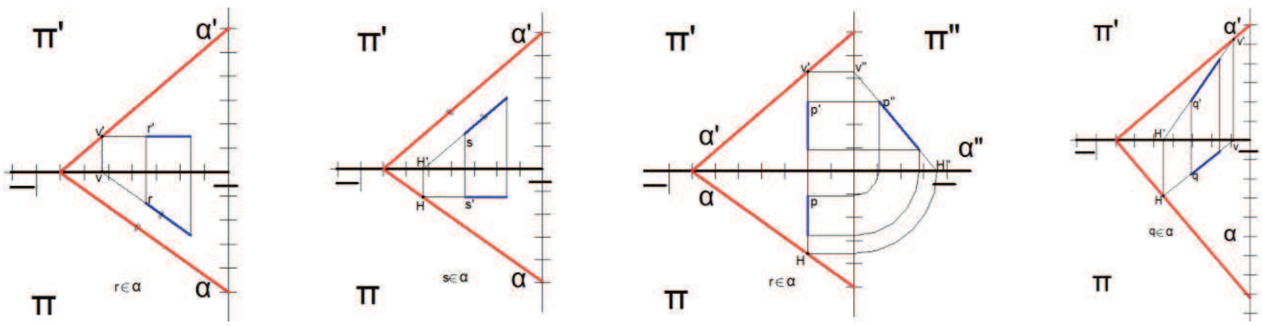
Relação com o plano de Qualquer

A reta Horizontal irá pertencer a um plano Qualquer, se seu traço vertical estiver sobre o traço vertical do plano e sua projeção horizontal for paralela ao traço horizontal do plano (Figura 39 A).

A reta Frontal estará contida no plano Qualquer, se seu traço horizontal estiver sobre o traço horizontal do plano e sua projeção vertical for paralela ao traço vertical do plano (Figura 39 B).

A reta de Perfil pertencerá a um plano Qualquer, se seus traços estiverem sobre os traços correspondentes do plano. Para determinar se a reta de Perfil pertence ao plano, rebate-se a reta de Perfil sobre o plano de Perfil para obter os traços da reta em questão (Figura 39 C).

A reta Qualquer pertence a um plano Qualquer, se seus traços estiverem sobre os traços de mesmo nome do plano (Figura 39 D).



A B C D

Figura 39. Relação de pertinência entre o Plano de Qualquer e a reta de Horizontal (A), a reta Frontal (B), reta de Perfil (C) e a reta Qualquer (D)

CAPÍTULO 6
MÉTODOS DESCRITIVOS

Ao estudarmos a Reta, vimos que a reta Qualquer, por ser oblíqua aos planos principais de projeção, tem suas projeções reduzidas. Para estudar devidamente uma reta em tais condições, para determinar a sua verdadeira grandeza (VG) ou para facilitar a solução de outros problemas, procuram-se novas projeções em outros planos paralelos ou perpendiculares a estas retas.

Para a solução destes problemas, recorremos conforme a conveniência, a alguns métodos, conhecidos por Métodos Descritivos. Os principais métodos descritivos são Mudança de Plano, Rotação, Rebatimento e Alçamento.

VG das retas através de mudança de plano

Consiste em considerar a figura fixa e determinar sua nova projeção sobre um plano auxiliar perpendicular a um plano de projeção. Este deve ser paralelo ao objeto no espaço, como indica a Figura 40.

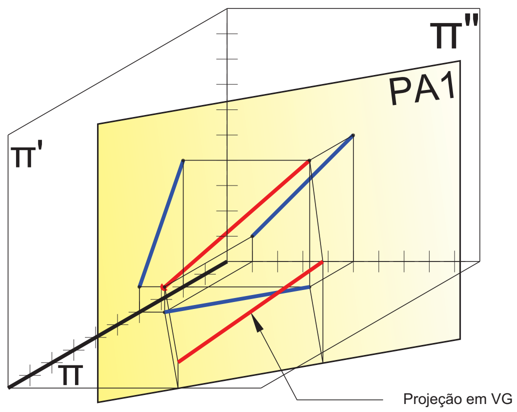


Figura 40. Plano sendo colocado paralelo ao abjeto para determinação da VG

Utilizaremos para o exemplo uma reta qualquer (Figura 41), já que as demais retas do primeiro e segundo grupo encontram-se a VG projetada em um dos planos principais de projeção (π,π' ou π”), não sendo necessário para estas retas a utilização de métodos descritivos para encontrar a sua VG.

Utilizando o plano perpendicular ao PV, a distância do PA1 até a1' e e b1' corresponde aos AFASTAMENTOS dos pontos A e B, respectivamente, se utilizarmos o plano perpendicular ao PH, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde as COTAS do ponto A e B, respectivamente.

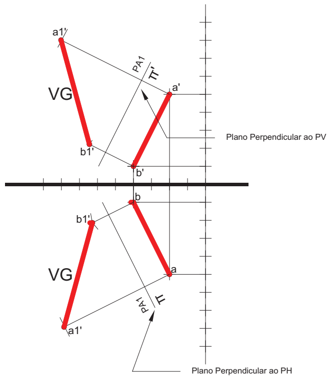


Figura 41. Mudança de plano para determinação da VG de uma reta qualquer

Projeções pontuais das retas através de mudança de plano

As retas do primeiro grupo apresentam projeção pontual em um dos planos principais de projeção, o mesmo não ocorre com as retas do segundo e terceiro grupo, desta forma iremos detalhar como encontrar estas projeções pontuais utilizando o método descritivo de mudança de plano.

A regra geral é colocar um plano auxiliar perpendicular a verdadeira grandeza (VG) da reta. Para as retas do segundo grupo, estas projeções são observadas no PA1 (plano auxiliar primário), para as retas do terceiro grupo faz-se necessário além do PA1 a utilização do PA2 (plano auxiliar secundário) perpendicular a VG da reta.

Para encontrar a projeção pontual da reta Horizontal, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde as COTAS dos pontos A e B (Figura 42 A);

Para encontrar a projeção pontual da reta Frontal, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde aos AFASTAMENTOS dos pontos A e B (Figura 42 B);

Para encontrar a projeção pontual da reta Perfil, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde as ABSCISSAS dos pontos A e B (Figura 42 C).

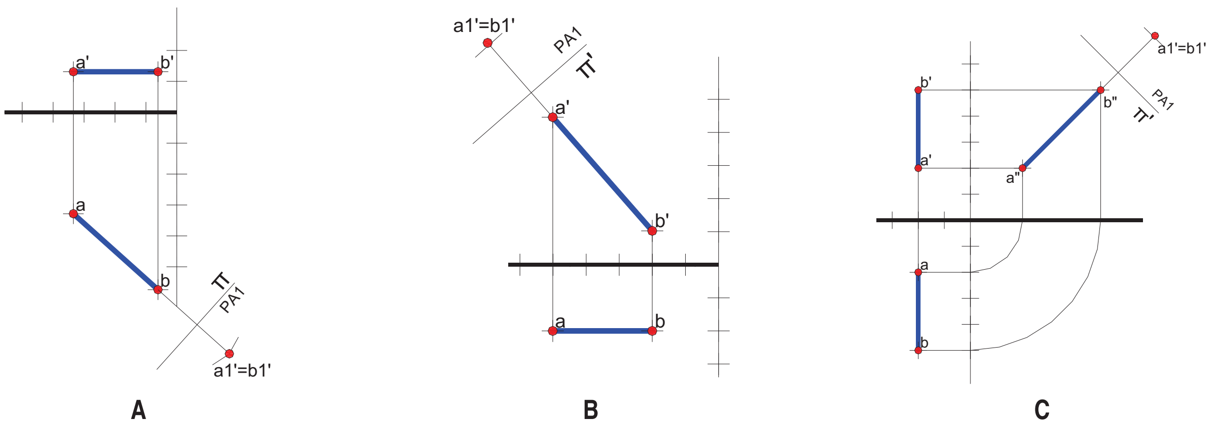


Figura 42. Projeção pontual das retas Horizontal (A), Frontal (B) e de Perfil (C)

Para encontrar a projeção pontual da reta Qualquer, primeiro deve-se achar a VG da reta, onde a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde as ABSCISSAS dos pontos A e B e a distância do PA2 até os pontos a2' e b2' corresponde a distância do PA1 aos pontos a' e b', respectivamente como ilustra a Figura 43.

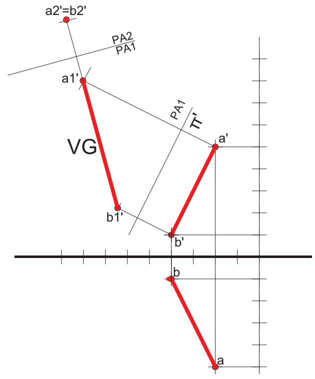


Figura 43. Projeção pontual de uma reta qualquer

VG e projeção linear do plano através de mudança de plano

Os planos do primeiro grupo apresentam projeção linear e as verdadeiras grandezas em um dos planos principais de projeção, portanto, não se faz necessário a utilização de métodos descritivos para estes tipos de planos.

Os planos do segundo grupo não apresentam VG em nenhum dos seus planos principais de projeção, porém, estes tipos planos indicam sua projeção linear em um dos planos principais (π, π' e π''), o que auxilia de maneira mais fácil na determinação de suas VGs. Para determinar a VG dos planos a regra geral é colocar um plano auxiliar paralelo à projeção linear do plano em questão.

Para os planos do segundo grupo, as VGs são observadas no PA1 (plano auxiliar primário), como ilustrado na Figura 44.

Para encontrar a VG da reta Vertical, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde as COTAS dos pontos A e B (Figura 44 A);

Para encontrar a VG da reta de Topo, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde aos AFASTAMENTOS dos pontos A e B (Figura 44 B);

Para encontrar a VG da reta de Rampa, a distância do PA1 até a1' e b1' corresponde as ABSCISSAS dos pontos A e B (Figura 44 C).

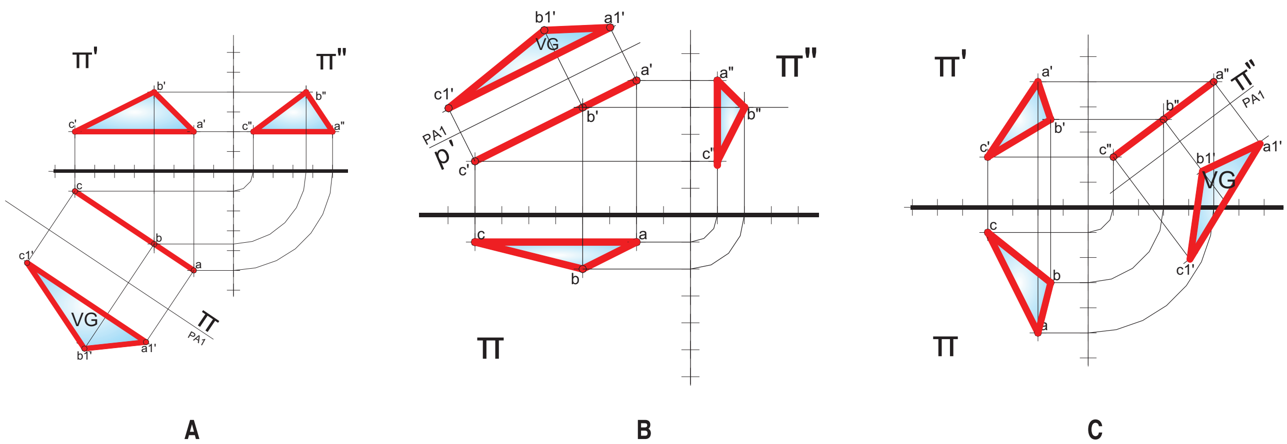


Figura 44. Determinação da VG dos planos Vertical (A), de Topo (B) e de Rampa (C)

Para os planos do terceiro grupo, primeiramente encontraremos a projeção linear do plano, escolhendo uma das arestas que o compõe, em seguida traça-se um plano auxiliar primário (PA1) perpendicular ao plano em questão. detalhar como encontrar estas projeções lineares e VG utilizando o método descritivo de mudança de plano.

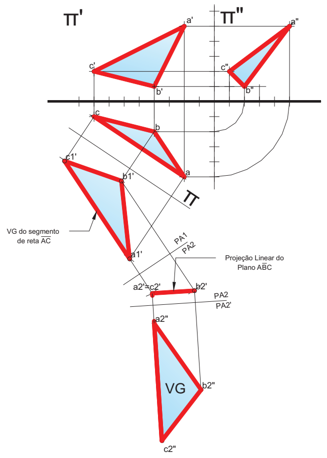


Figura 45. Determinação da projeção linear e VG do plano Qualquer

Rotação

É o método descritivo que permite obter a verdadeira grandeza (VG) de uma reta mesmo quando suas projeções fundamentais se apresentam deformadas. A rotação consiste no giro da reta no espaço, em torno de um de seus elementos, até que fique paralela a um dos Planos Fundamentais de Projeção.

A VG das retas do primeiro e segundo grupos pode ser encontrada facilmente através das projeções indicadas nos planos principais de projeção (π, π' e π''), porém as retas do terceiro grupo não apresentam projeções em VG em nenhum dos planos principais de projeção, sendo necessária a utilização do método descritivo de Mudança de Plano como visto anteriormente, ou simplesmente Rotacionar a reta até que esta se transforme em uma reta do 2° Grupo. Abaixo (Figura 46) segue o exemplo de uma reta qualquer delimitada por dois pontos (Azul) A e B, após o procedimento de rotação em torno do ponto (b) no plano horizontal (deixar a reta paralela à linha de terra), podemos visualizar a VG da reta no plano vertical (π'), pois neste caso transformamos esta reta qualquer em uma reta frontal (vermelho), vale ressaltar que este procedimento pode ser feito em qualquer dos planos principais de projeção.

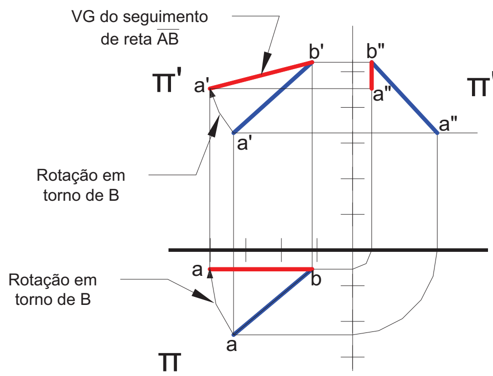


Figura 46. Determinação da VG de reta Qualquer pelo método descritivo de rotação

Rebatimento

O rebatimento consiste em rotacionar um objeto em torno de um eixo para colocar o objeto numa nova e mais favorável posição em relação aos planos de projeção, mantendo os planos no mesmo lugar.

O rebatimento é semelhante à rotação, e só é válido para objetos uni ou bidimensionais, enquanto a rotação permite também para casos com objetos tridimensionais. Abaixo segue o exemplo de uma reta qualquer delimitada por dois pontos A e B (azul), após o procedimento de rebatimento da reta acima do plano horizontal (mover a reta para acima da linha de terra), podemos visualizar a VG da reta (vermelho) no plano horizontal (π).

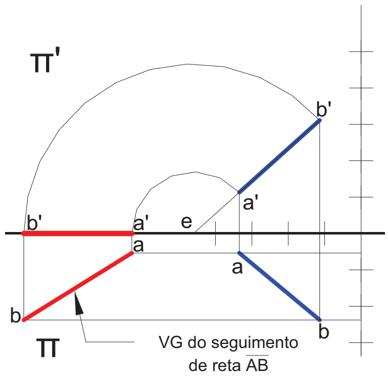


Figura 47. Determinação da VG de reta Qualquer pelo método descritivo de rebatimento

CAPÍTULO 7
CÁLCULOS DE DISTÂNCIAS E ÂNGULOS

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos qualquer no espaço é obtida pela VG do segmento de reta que passa nos dois pontos em estudo. A Figura 48 ilustra o exemplo da distância entre o ponto C e o ponto D.

Nos desenhos subsequentes utilizaremos como método descritivo padrão, sempre a Mudança de Plano, porém em alguns casos quando necessários utilizaremos também a Rotação e o Rebatimento.

Exemplo: Qual a distância do ponto C ao ponto D, onde: C (4,1,1) e D (1,3,3).

1° Passo – Inserir os pontos em épura;

2° Passo – Traçar uma reta que passe pelos dois pontos;

3° Passo – Identificar a qual grupo esta reta pertence;

4° Passo – Se for retas do 1° ou 2° grupos, as VG's estão nos planos principais;

5° Passo – Caso a reta pertença ao terceiro Grupo, deve-se utilizar um método descritivo para encontrar a VG do seguimento de reta (desenho abaixo);

6° Passo – Com o auxilio da régua, medir a distância do ponto C ao ponto D do seguimento de reta CD.

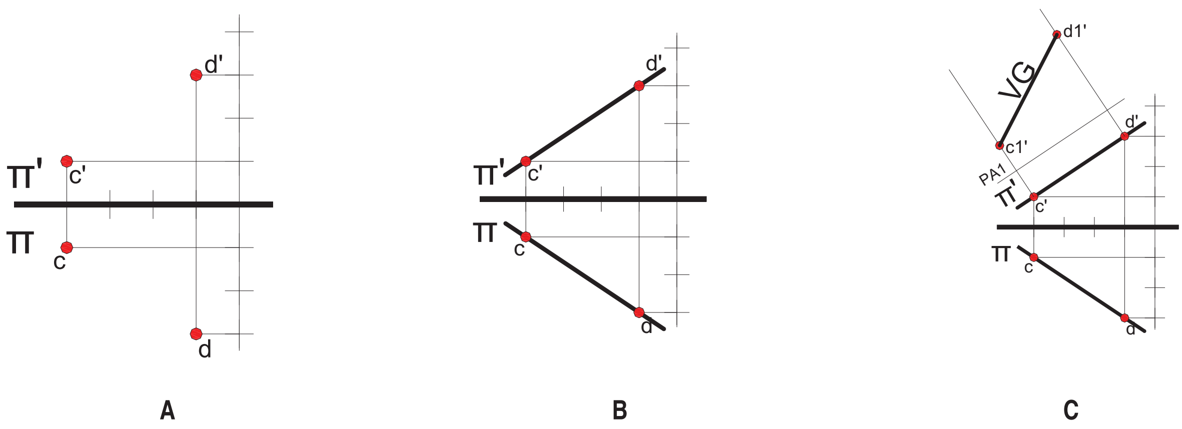


Figura 48. Determinando a distância entre o ponto C e D

Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto qualquer e qualquer que seja a reta no espaço é obtida na projeção em que a reta projeta-se de forma pontual.

Caso as retas sejam do primeiro Grupo, estas distâncias vão estar indicadas nos planos principais de projeção, já que nestes casos a projeção pontual da reta está contida no π para as retas verticais, no π' para retas de topo e no π" para retas fronto-horizontais. Para as retas do segundo Grupo é necessário traçar um plano auxiliar primário (PA1) para encontrar a projeção pontual, e será neste PA1 que encontraremos a distância do ponto a reta em estudo. Já as retas do terceiro Grupo, a distância serão medidas em um plano auxiliar secundário (PA2).

Abaixo segue o exemplo da distância entre o ponto D e o segmento de reta AB.

1° Passo – Inserir os pontos em épura;

2° Passo – Identificar a qual grupo a reta pertence;

3° Passo – Se for do 1° grupo, as distâncias estarão nos planos principais onde a reta se projeta pontualmente;

4° Passo – Se forem retas do 2° grupos, as VG's estão nos planos principais, e a partir destes planos traçar um PA1perpendicular a reta e achar a sua projeção pontual;

5° Passo – Caso a reta pertença ao terceiro Grupo, deve-se utilizar um método descritivo para encontrar a VG do seguimento de reta (desenho abaixo), depois traçar um PA2 para encontrar a projeção pontual da reta;

6° Passo – Com o auxilio da régua, medir a distância do ponto A ao ponto D ou do ponto B ao ponto D.

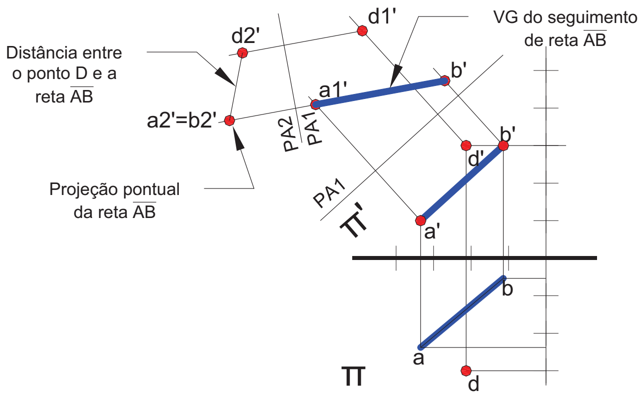


Figura 49. Determinando a distância entre o ponto D e o seguimento de reta AB

Distância entre duas retas

Paralelas

A distância entre duas retas paralelas é determinada no plano de projeção em que se encontram as projeções pontuais.

As retas do Grupo1 tem solução imediata, já que as mesmas têm projeções pontuais em um dos planos principais. Já as retas do Grupo 2, tem suas distâncias indicadas no PA1, e este deve ser perpendicular a VG das retas. Para as retas do 3° Grupo deve-se achar a VG das retas em um PA1, e em seguida achar a projeção pontual destas em um PA2 perpendicular a VG das retas.

A Figura 50 mostra o exemplo da distância entre duas retas paralelas Frontais.

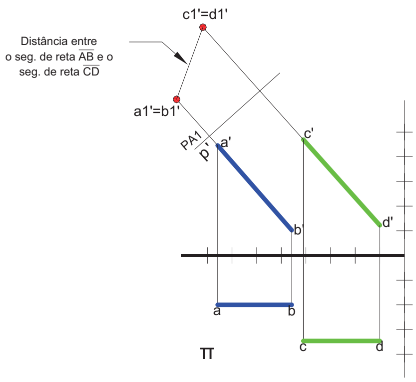


Figura 50. Determinando a distância entre duas retas paralelas Frontais

Reversas

A distância perpendicular entre duas retas reversas é determinada em um plano de projeção que mostra uma das retas em projeção pontual. A Figura 51 exibe um exemplo de procedimento para encontrar a distância em questão.

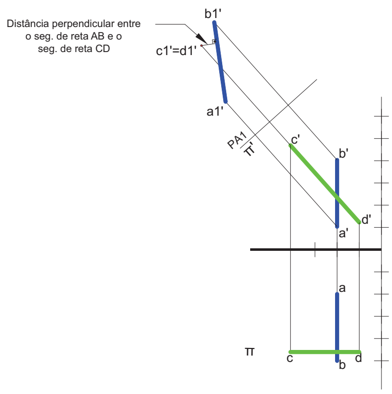


Figura 51. Determinando a distância entre duas retas reversas

Distância perpendicular entre um ponto e um plano

É determinada em um plano de projeção que mostra o plano em projeção linear e a distância será a perpendicular baixada entre o plano e o ponto, como indica a Figura 52 ao lado.

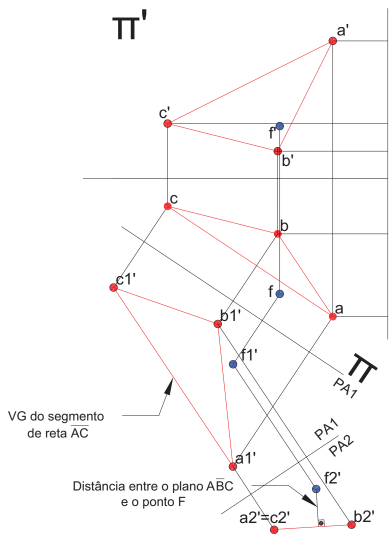


Figura 52.

Distância perpendicular entre uma reta e um plano

Só haverá distância entre uma reta e um plano, se estes forem paralelos entre si. Esta distância é determinada em um plano de projeção que mostra a reta em projeção pontual e o plano em projeção linear. A distância será a perpendicular baixada entre o plano e a projeção pontual da reta, como indicado na Figura 53.

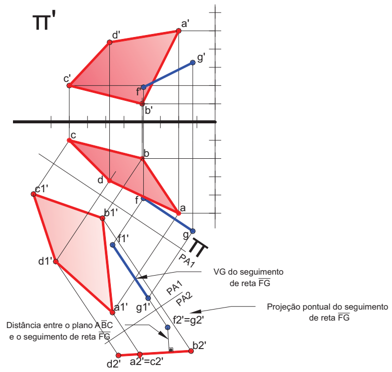


Figura 53. Determinando a distância entre duas retas reversas

Distância perpendicular entre dois planos paralelos

Só haverá distância entre dois planos, se estes forem paralelos entre si. Esta distância é determinada em um plano de projeção que mostra a projeção linear de ambos os planos. A distância será a perpendicular baixada entre os planos em projeção linear, como indica a Figura 54 abaixo.

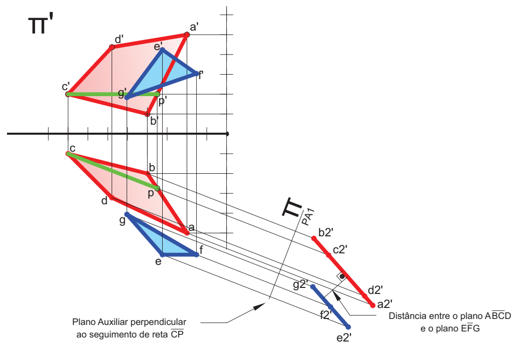


Figura 54. Determinando a distância entre dois planos paralelos

Ângulo entre duas retas

O ângulo entre duas retas é observado no plano de projeção em que são mostradas as duas retas em verdadeira grandeza. O ângulo lido é sempre o menor por estas formado. Segue abaixo um exemplo para melhor entendimento (Figura 55).

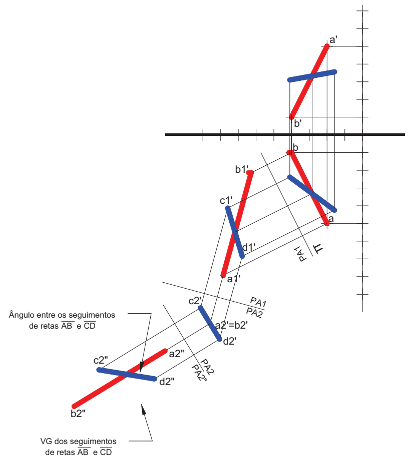


Figura 55. Determinando o ângulo formado entre duas retas

Ângulo entre plano e reta

O ângulo entre uma reta e um plano é obtido no plano de projeção que mostra a reta em verdadeira grandeza e o plano em projeção linear. Portanto primeiramente encontra-se a projeção linear do plano e em seguida a VG da reta, com o auxilio do transferidor, mede-se o ângulo desejado, como indica a Figura 56 abaixo.

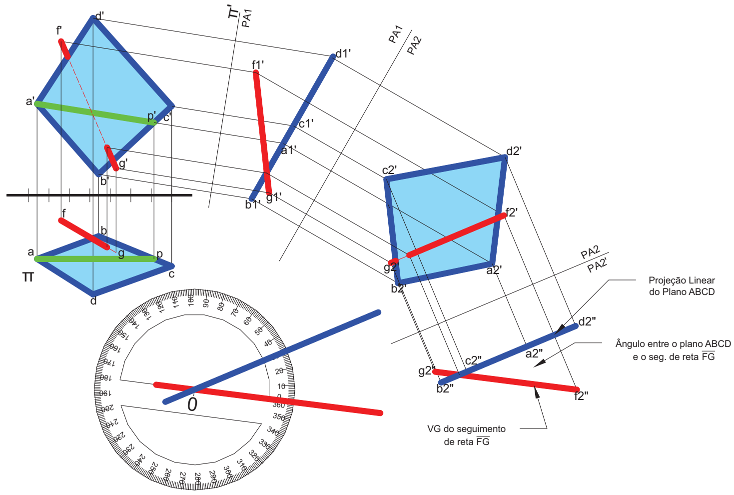


Figura 56. Determinando o ângulo formado entre um plano e uma reta

Ângulo diedro

É o ângulo formado por dois planos que se interceptam. O ângulo diedro é determinado no plano de projeção que mostra a projeção pontual da reta interseção entre os dois planos em questão. Quando isto se observar, os dois planos se projetarão linearmente. A Figura 57 mostra um exemplo deste procedimento.

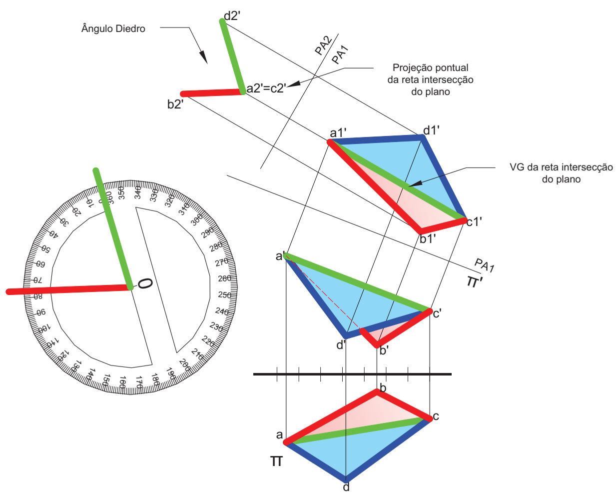


Figura 57. Determinação do ângulo diedro

CAPÍTULO 8
SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Os corpos apresentam diversas formas, ocupam determinados volumes e posições no espaço em tridimensional. Um lápis, uma borracha, um carro, uma bola ou mesmo um ser humano, têm forma e volume e é por isso que podemos distingui-los e compará-los. Além de forma e volume (comprimento, altura e largura), os corpos têm também, uma situação no espaço. A estes corpos maciços damos o nome de SÓLIDOS.

Os corpos têm um número ilimitado de formas. Para que possamos estudá-los com facilidade, adotaram-se alguns modelos, denominados sólidos geométricos. Sabendo-se resolver problemas relativos a estes sólidos, sabe portanto resolver os problemas sobre quaisquer outros corpos, por mais complicada que seja sua forma.

Os sólidos podem ser formados por superfícies planas (cubo, pirâmide ...), por superfícies curvas (esfera) ou por superfícies planas e curvas (cilindro, cone ....).

Poliedros

Do grego - poly (muitas) + edro (face). Os poliedros fazem parte do pensamento grego, foram estudados pelos grandes filósofos da antiguidade e tomaram parte nas suas teorias sobre o universo. Diz-se poliedro todo sólido limitado por polígonos planos.

Os poliedros são ainda, corpos formados por superfícies planas, denominadas FACES do poliedro. Os seguimentos de retas resultados da intersecção de duas faces contíguas são chamadas de ARESTAS do poliedro, e por fim, os pontos de convergência de diversas arestas, são chamados de VÉRTICES do poliedro.

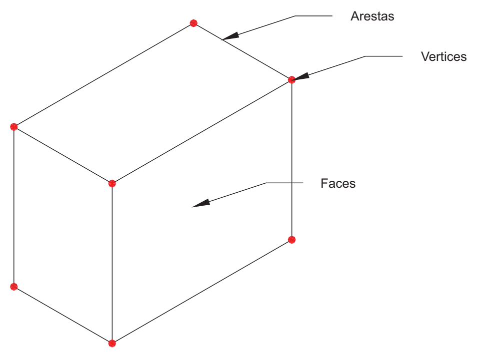


Figura 58. Detalhamento das arestas, vértices e faces

Poliedros Regulares

São os poliedros cujas faces são polígonos regulares iguais entre si, e cujos ângulos diedros são todos iguais.

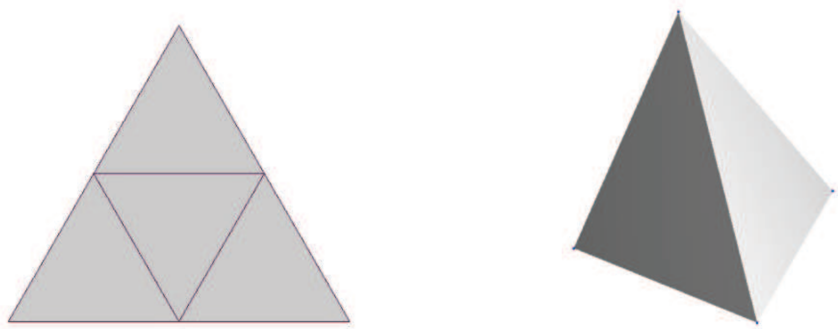
Os poliedros regulares dividem-se em dois grupos básicos:

- **CONVEXO -** tetraedro (quatro faces), hexaedro (seis faces), octaedro (oito faces), dodecaedro (doze faces) e icosaedro (vinte faces);
- **ESTRELADOS –** dodecaedro estrelado e icosaedro estrelado.

Convexos

Tetraedro

Tetra = quatro e Edro = face, logo este sólido é o poliedro formado por quatro triângulos equiláteros, que possui 4 faces, 4 vértices e 6 arestas (Figura 59).

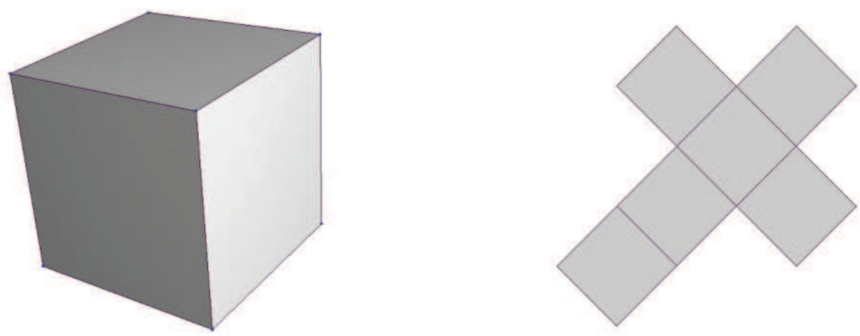


A B

Figura 59. Detalhamento (A) e desenvolvimento (B) do tetraedro

Hexaedro

O hexaedro (Hexa = Seis e Edro = face) é o poliedro formado por seis quadrados, possui constituição de 6 faces, 8 vértices e 12 arestas (Figura 60)

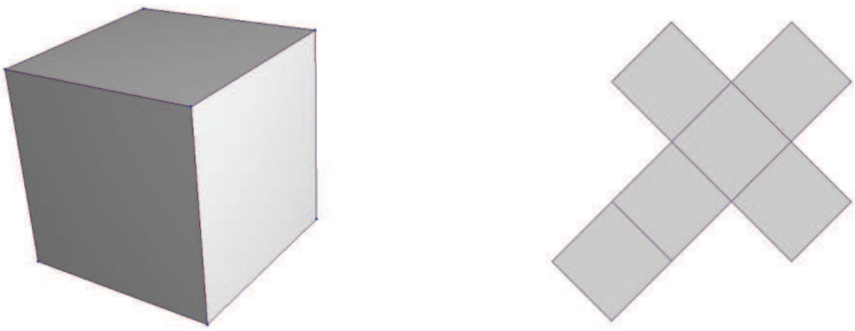


A B

Figura 60. Detalhamento (A) e desenvolvimento (B) do hexaedro

Octaedro

O poliedro formado por oito triângulos eqüiláteros iguais é chamado de octaedro e tem na sua constituição 8 faces, 6 vértices e 12 arestas como indica a Figura 61.

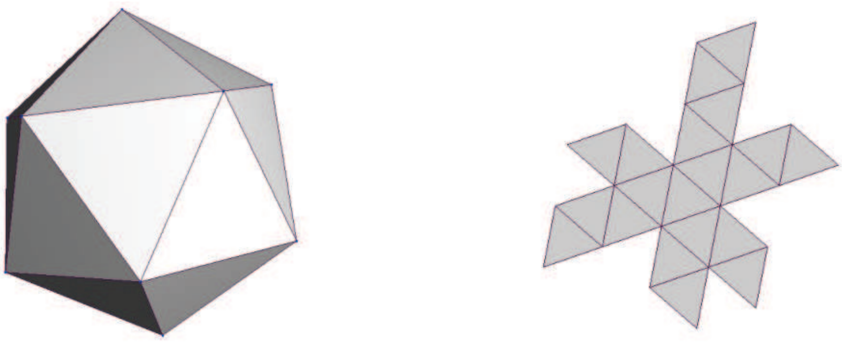


A B

Figura 61. Detalhamento (A) e desenvolvimento (B) do octaedro

Icosaedro

O poliedro formado por vinte triângulos eqüiláteros iguais contendo 20 faces, 12 vértices e 30 arestas é chamado de icosaedro (Figura62).

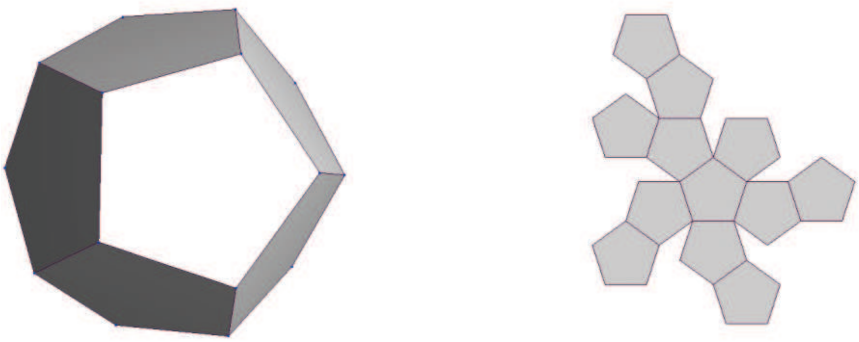


A B

Figura 62. Detalhamento (A) e desenvolvimento (B) do icosaedro

Dodecaedro

É o poliedro formado por 12 pentágonos regulares iguais, o qual é formado por 12 faces, 20 vétices e 30 arestas (Figura 63).



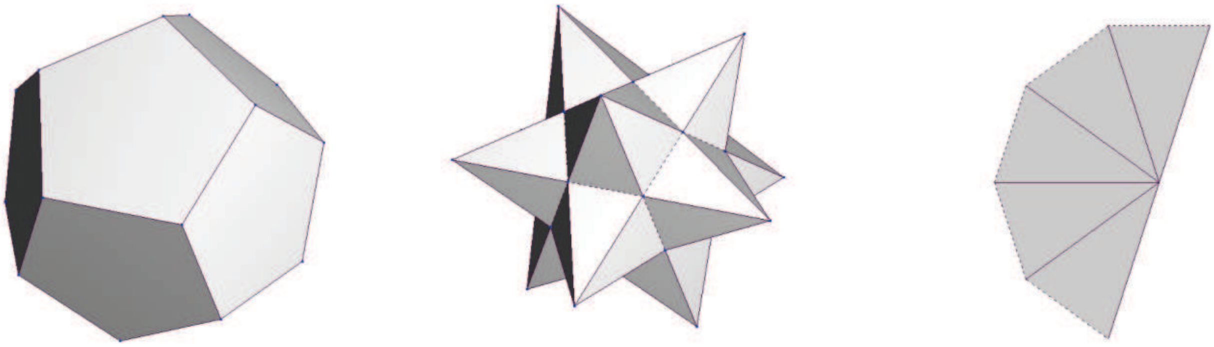
A B

Figura 63. Detalhamento (A) e desenvolvimento (B) do dodecaedro

Sólidos estrelados

Dodecaedro estrelado

O dodecaedro estrelado é a primeira estrelação do dodecaedro como ilustrado na Figura 64.

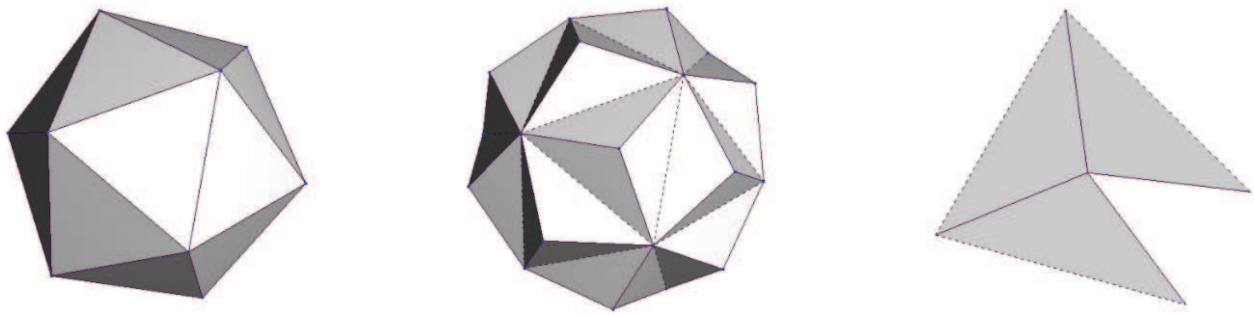


A B C

Figura 64. Forma primitiva (A) , estrelação (B) e desenvolvimento (C) do dodecaedro estrelado

Icosaedro estrelado

A Figura 65 detalha o sólido icosaedro estrelado o qual representa a primeira estrelação do icosaedro.



A B C

Figura 65. Forma primitiva (A), estrelação (B) e desenvolvimento (C) do icosaedro estrelado

Poliedro irregulares

Os poliedros irregulares são aqueles que apresentam as faces e os ângulos diedros diferentes. Portanto, basta que apenas uma das faces seja diferente para caracterizar um poliedro irregular.

Os principais poliedros irregulares estão divididos em dois grandes grupos:

- **PRISMAS**
- **PIRÂMIDES**

Prismas

São poliedros irregulares formados por duas faces ou bases poligonais iguais e paralelas e por faces laterais que são paralelogramos (quadriláteros que tem os lados paralelos dois a dois: Retângulo, Losango e Paralelogramo propriamente dito).

Um prisma é regular (Figura 66 A) quando suas bases são polígonos regulares e, irregular (Figura 66 B) quando suas bases são polígonos irregulares.

O número de faces depende da base e é através dela que damos o nome: prisma de base pentagonal, prisma de base triangular, prisma de base hexagonal.

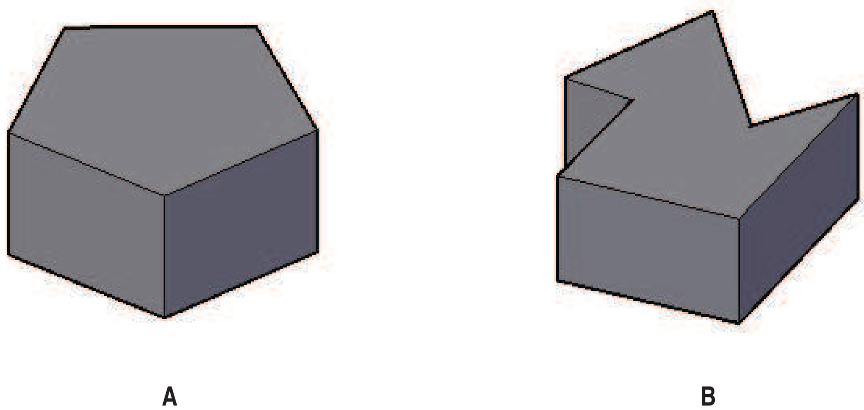


Figura 66. Exemplo de prisma regular (A) e irregular (B)

Pirâmides

São denominadas Pirâmides todos os sólidos geométricos cuja base é um polígono qualquer e cujas faces laterais são triângulos que concorrem para um ponto, que é o vértice da pirâmide.

Uma pirâmide é regular quando a base é um polígono regular e irregular quando sua base for um polígono irregular. O polígono da base também indica o nome da pirâmide: pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrangular, pirâmide de base hexagonal e assim por diante.

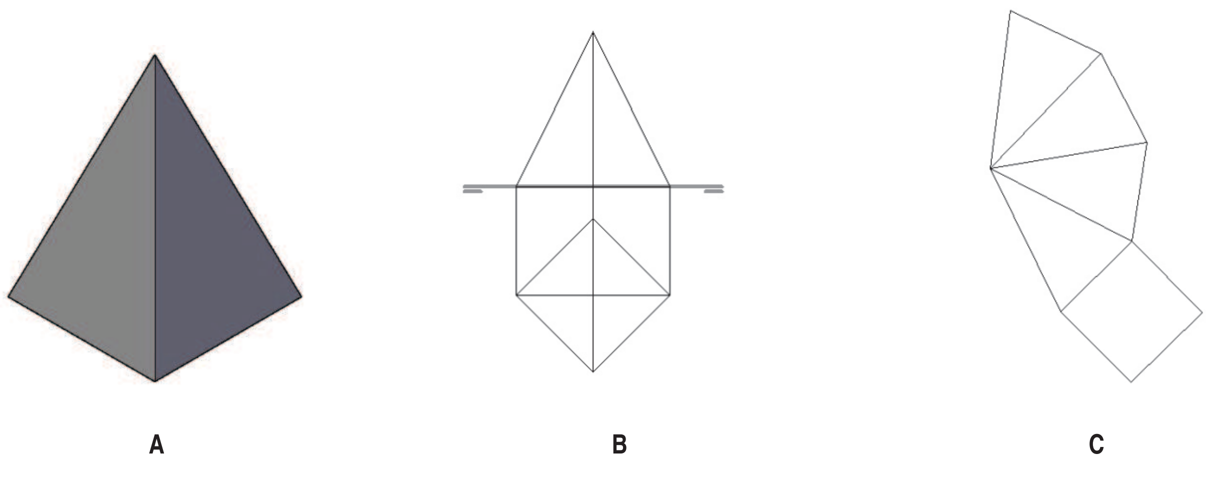
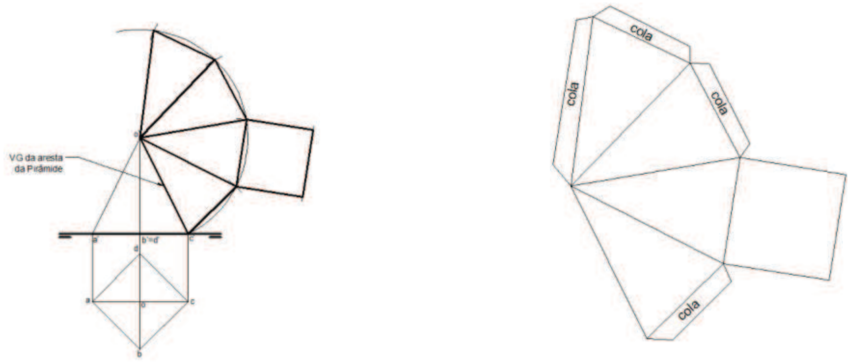


Figura 67. Pirâmide de base triangular (A), épura (B) e desenvolvimento (C)

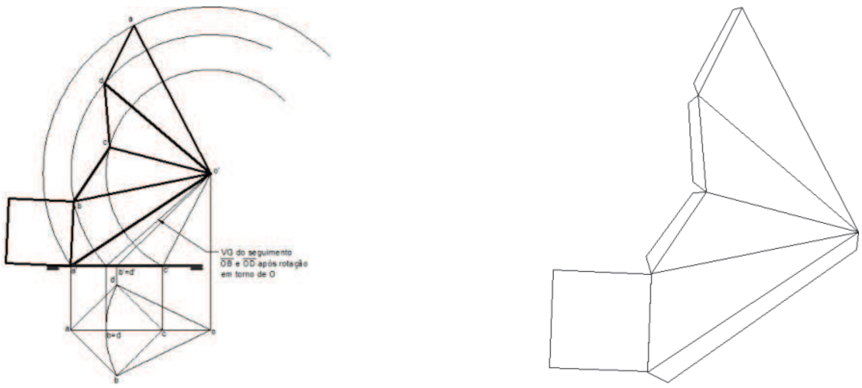
Desenvolvimento da pirâmide

A Figura 68 ilustra como se deve proceder para fazer o desenvolvimento de uma pirâmide reta de base quadrada, já a Figura 69 ilustra o desenvolvimento de uma pirâmide oblíqua, note que a dificuldade do seu desenvolvimento, está no processo de encontra as VG's das arestas que a compõe. Na Figura 70 é possível observar o desenvolvimento de uma pirâmide truncada por um plano, neste caso a dificuldade está em encontrar a VG do plano formado pelo truncamento deste.



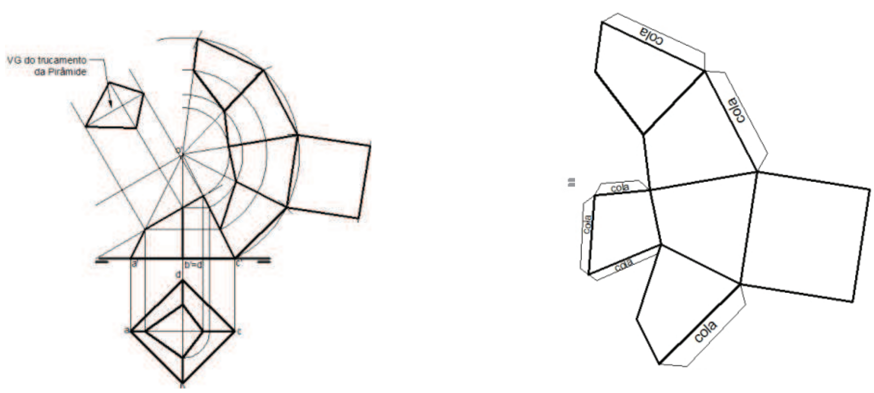
A B

Figura 68. Desenvolvimento da pirâmide reta



A B

Figura 69. Desenvolvimento da pirâmide obliqua



A B

Figura 70. Desenvolvimento de uma pirâmide reta truncada

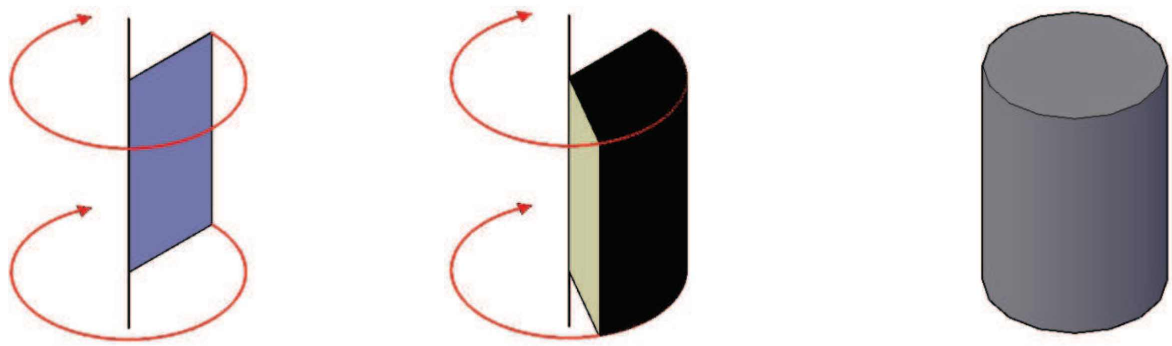
CAPÍTULO 9
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

São todos os corpos sólidos em que predominam as superfícies curvas. Os mais importantes são:

- **CILINDRO**
- **CONE**
- **ESFERA**

Cilindro

O Cilindro é o sólido gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados (Figura 71). Este por sua vez é formado por uma superfície lateral curva e por dois círculos paralelos denominados bases do cilindro. O cilindro pode apresentar-se reto, quando o eixo for perpendicular a base, ou obliquo, quando o eixo formar um ângulo diferente de 90° em relação à base. As Figuras 72, 73 e 74 detalham o modo de desenvolvimento de um cilindro reto, obliquo e truncado, respectivamente.



A B C

Figura 71. Revolução para constituição do cilindro

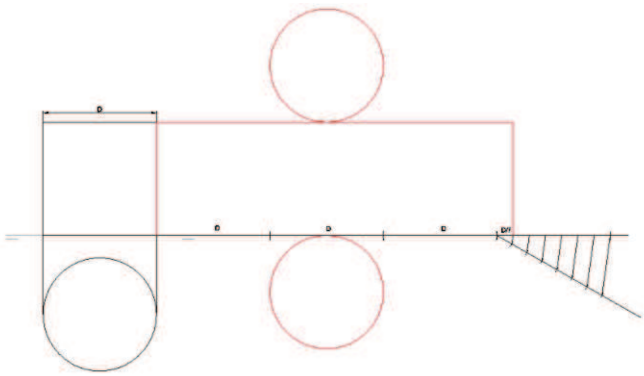


Figura 72. Desenvolvimento do cilindro reto

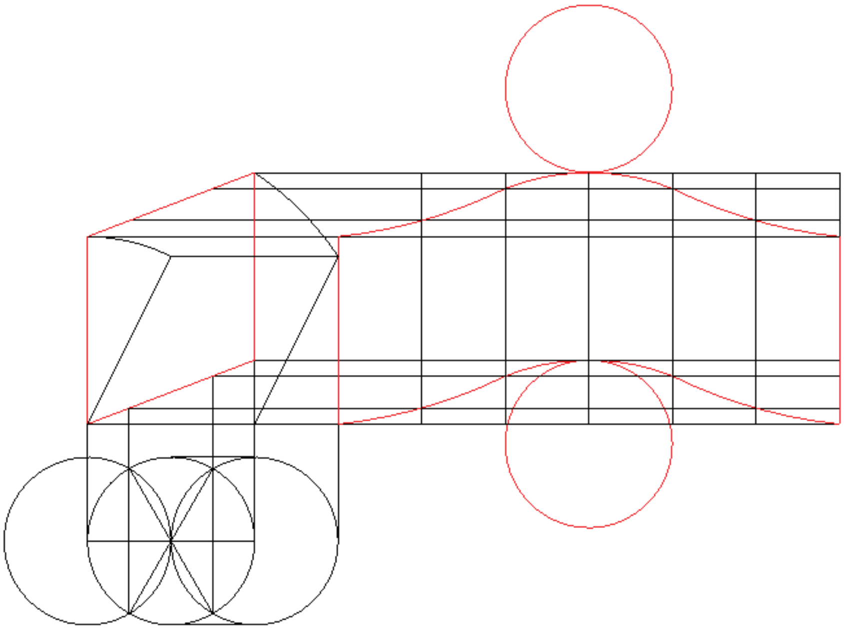


Figura 73. Desenvolvimento do cilindro obliquo

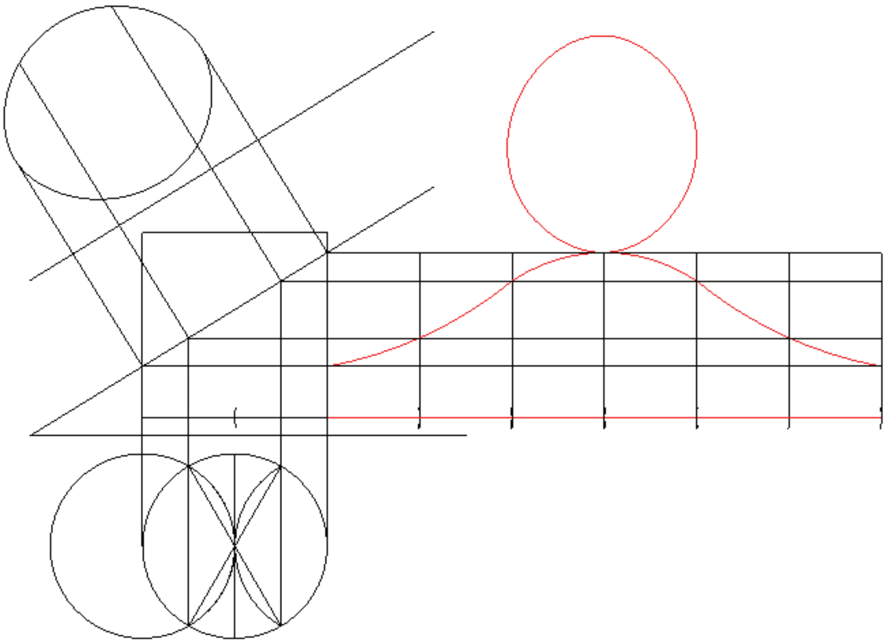
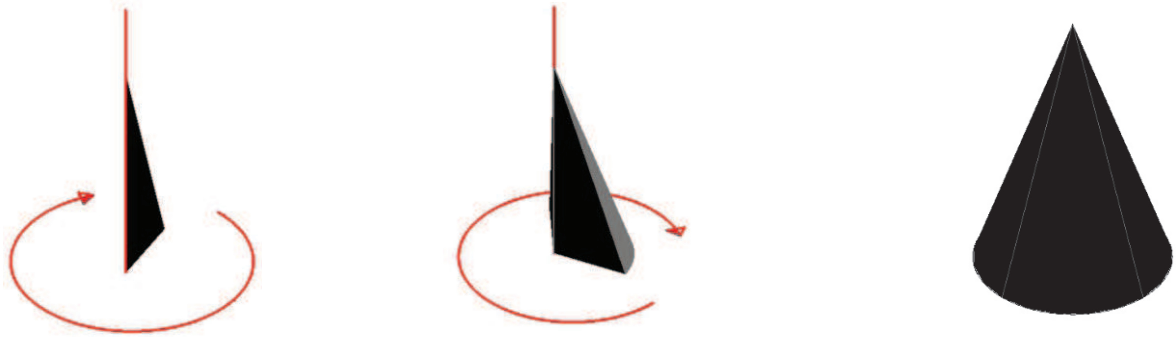


Figura 74. Desenvolvimento do truncamento do cilindro reto

Cone

É o sólido geométrico gerado pela rotação de um triângulo em torno de um dos seus catetos (Figura 75). O cone é formado por uma base circular e por uma superfície lateral curva. Seria resultante de uma pirâmide cujo o número de arestas tendesse a infinito. O cone pode ser reto, quando o eixo for perpendicular a base circular, ou obliquo, quando o eixo formar um ângulo diferente de 90° em relação à base circular. As Figuras 76, 77 e 78 detalham o modo de desenvolvimento de um cilindro reto, obliquo e truncado, respectivamente.



A B C

Figura 75. Revolução para constituição do cone

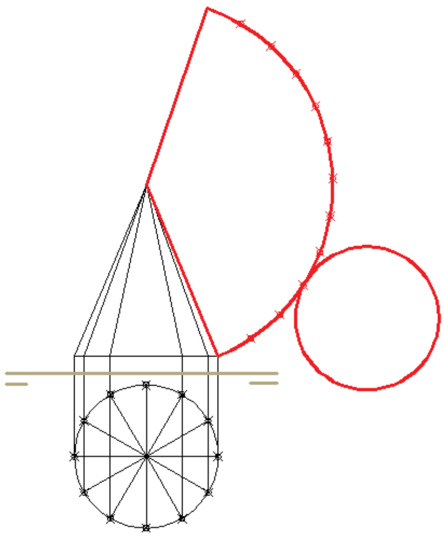


Figura 76. Desenvolvimento do cone reto

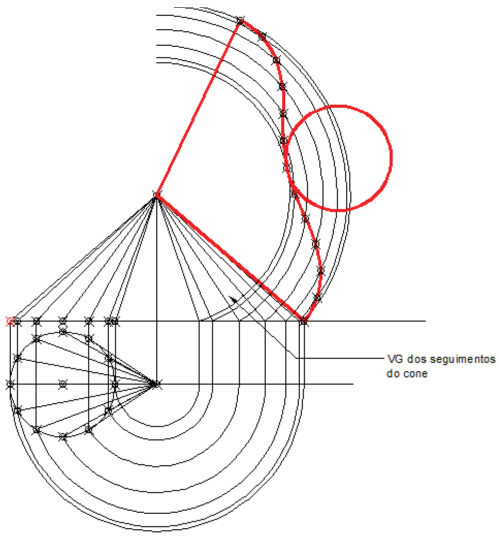


Figura 77. Desenvolvimento do cone obliquo

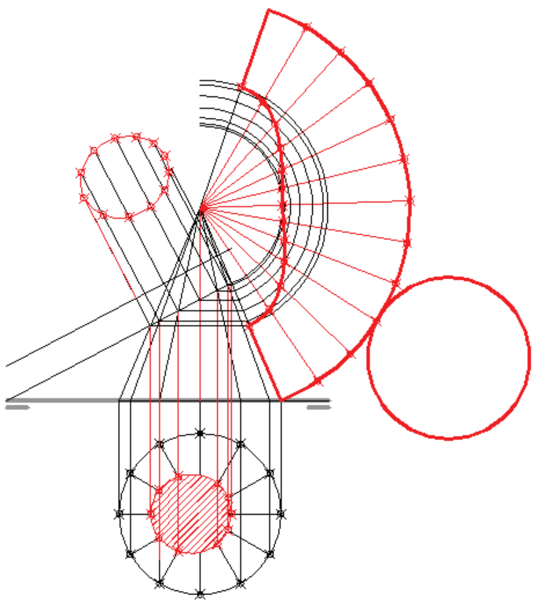
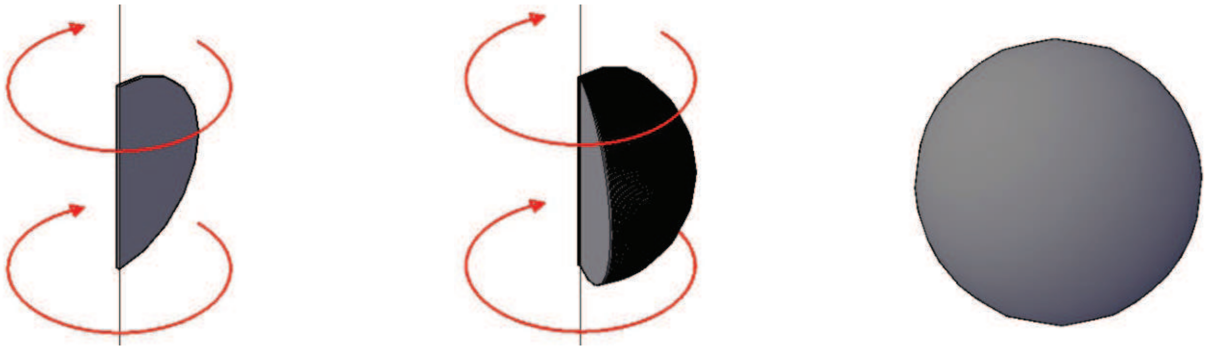


Figura 78. Desenvolvimento do truncamento do cone reto

Esfera

A esfera é o sólido gerado pela revolução de um semi-circulo em torno da aresta que delimita o seu diâmetro, que seria o centro da esfera (Figura 79). A Figura 80 detalha o modo de desenvolvimento da esfera.



A B C

Figura 79. Revolução para constituição da esfera

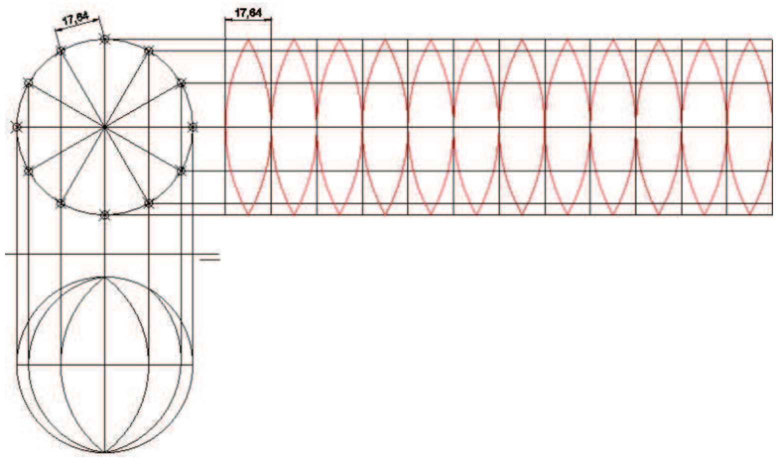


Figura 80. Desenvolvimento da esfera

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Ministério da Educação

CAPES

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UFRB
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

SEAD
Superintendência de Educação Aberta e a Distância

ISBN 978-856134689-8
9 788561 346898