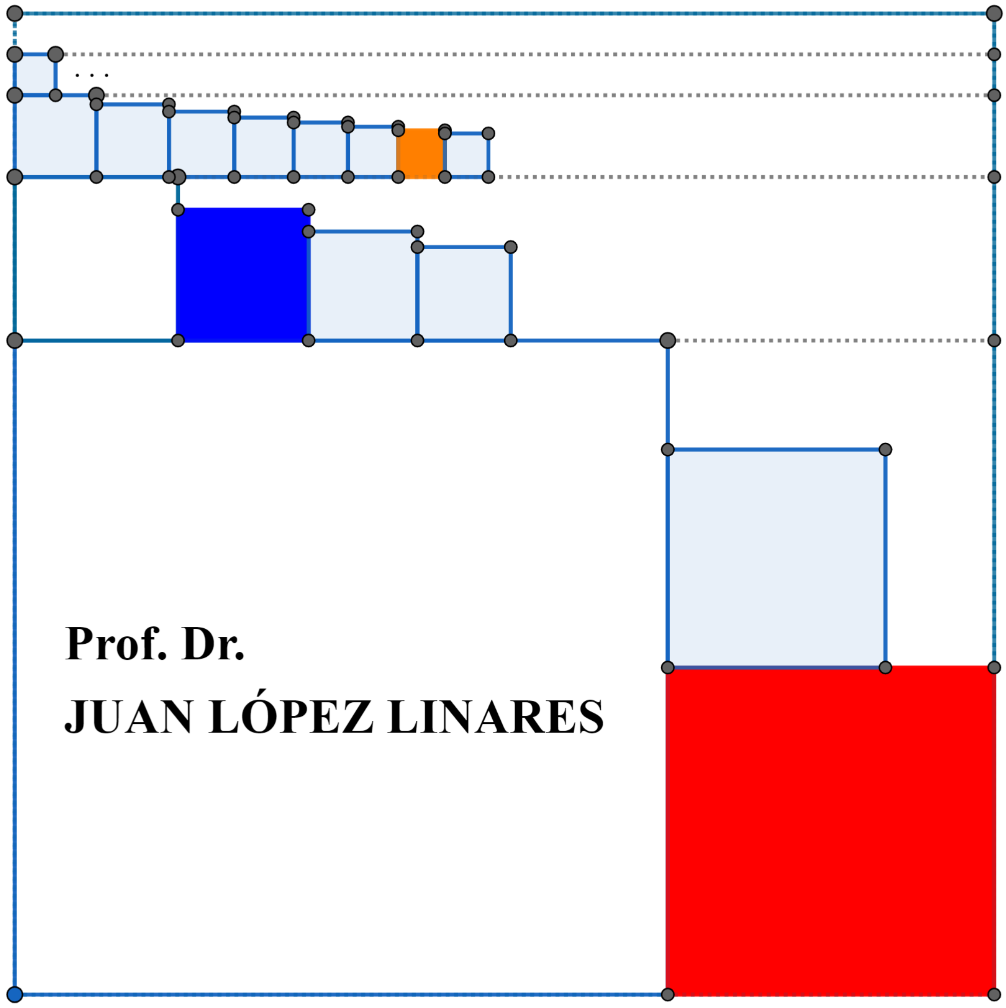
Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática



Prof. Dr.
JUAN LÓPEZ LINARES

JUAN LÓPEZ LINARES

Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática

DOI: 10.11606/9786587023045

Pirassununga - SP
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS (FZEA)
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)
2020

Universidade de São Paulo

Reitor: Prof. Dr. Vahan Agopyan

Vice-Reitor: Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

Avenida Duque de Caxias Norte, 225

Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

http://www.fzea.usp.br

Diretora da FZEA: Profa. Dra. Elisabete Maria Macedo Viegas

Vice-Diretor da FZEA: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Serviço de Biblioteca e Informação da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo

```
        López Linares, Juan
L864s      Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada
        Internacional de Matemática / Juan López Linares. --
        Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de
        Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020.
           81 p.

           ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book)
           DOI: 10.11606/9786587023045


           1. Olimpíada Internacional de Matemática. 2. Ensino
        médio. 3. Ensino universitário. 4. Álgebra. 5. Problemas
        resolvidos. I. Título.
```

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Dedico este livro a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos (DM-UFSCar), pela revisão detalhada e valiosos comentários críticos.

Agradeço ao Prof. Alexys Bruno Alfonso, da Faculdade de Ciências de Bauru, UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Departamento de Matemática, pelas discussões relativas a vários problemas, seus comentários críticos e sugestões e a ajuda no uso do LATEX.

Agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão.

AUTOR

Dr. JUAN LÓPEZ LINARES.

Professor Doutor 2 do Departamento de Ciências Básicas (ZAB) da Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA) da Universidade de São Paulo (USP). Atualmente ministra as disciplinas de Cálculo II e IV para estudantes de engenharias e o curso de Treinamento Olímpico em Matemática para estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de ensino e resolução de problemas de Olimpíadas.

Graduação e Mestrado em Física na Universidade da Havana, Cuba, em 1994 e 1996, respetivamente. Curso de Diploma da Matéria Condensada no Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam, em Trieste, na Itália em 1997-1998. Estágio no Instituto de Espectroscopia Molecular (CNR), Bolonha, Itália em 1998-1999. Doutor em Física pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 1999-2001. Pós-doutorado de 4 anos (2002-2005) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela UFSCar em 2019.

Título Curto

Vinte Desafios de Álgebra na IMO

Título Longo

Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática

Resumo

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, do inglês "International Mathematical Olympiad") é uma competição para estudantes do Ensino Médio em que o número de participantes cresceu de forma sistemática ao longo do tempo. Os objetivos das IMOs são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. A delegação do Brasil fez sua primeira participação em 1979 e apresenta uma melhora de desempenho a longo do tempo. Neste livro são apresentados e discutidos de forma detalhada 20 problemas de Álgebra que foram propostos para alguma das versões. O intuito é que estes possam ser usados não somente no treinamento de estudantes que se preparam para olimpíadas nacionais e internacionais, mas também por professores e estudantes do ensino universitário. Os problemas aparecem organizados em quatro capítulos. Porém, tipicamente cada problema usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática. Em várias seções apresentamos primeiro uma introdução aos conhecimentos chaves para a resolução do problema.

Palavras Chaves: Olimpíada Internacional de Matemática, Ensino Médio, Ensino Universitário, Álgebra, Problemas Resolvidos

Short Title

Twenty Algebra Challenges at IMO

Large Title

Detailed solutions to 20 problems in the International Mathematical Olympiad

Abstract

The International Mathematical Olympiad (IMO) is a competition for high school students in which the number of participants has grown systematically over time. The objectives of IMOs are to discover, stimulate and challenge talented students in mathematics. The delegation of Brazil made its first participation in 1979 and has improved its performance over time. In this book, 20 Algebra problems that have been proposed are presented and discussed in detail. The intention is that these can be used not only in the training of students who are preparing for national and international Olympics, but also by teachers and university students. The problems appear organized in four chapters. However, typically each problem uses knowledge linked to more than one area of mathematics. In several sections we first present an introduction to the key knowledge for solving the problem.

Keywords: International Mathematical Olympiad, High School Education, University Teaching, Algebra, Problems Solved

Sumário

1 Introdução **10**

1.1 Breve descrição da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) 10

1.2 Organização e enunciados dos problemas 13

2 Desigualdades **18**

2.1 Desigualdade com lista de soma zero. P3 da SL da IMO 1972 18

2.1.1 Resolução 18

2.2 Desigualdade, Reordenamento, Mínimos Quadrados. P1 da IMO 1975 19

2.2.1 Considerações iniciais 19

2.2.2 Resolução 20

2.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. P3 da IMO 1982 20

2.3.1 Considerações iniciais 21

2.3.2 Resolução 22

2.3.3 Comentários finais 23

2.4 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica. P2 da IMO 2012 23

2.4.1 Considerações iniciais 24

2.4.2 Resolução 24

2.4.3 Comentários finais 26

2.5 Desigualdades com Sequências de Inteiros. P1 da IMO 2014 27

2.5.1 Considerações iniciais 27

2.5.2 Resolução 27

2.5.3 Comentários finais 29

2.6 Uso da Desigualdade do Rearranjo. P2 da IMO 2018 29

2.6.1 Desigualdade do Rearranjo 29

2.6.2 Caso $n = 3$ 30

2.6.3 Caso $n = 4$ 31

2.6.4 Resolução Geral 32

3 Recorrências **34**
3.1 Recorrência de Segunda Ordem. P4 da SL da IMO 1975 34
3.1.1 Resolução 34
3.2 Recorrência Não Linear. P14 da SL da IMO 1975 37
3.2.1 Resolução 37
3.3 Recorrência Não Linear. P9 da SL da IMO 1981 41
3.3.1 Resolução 41
3.4 Recorrência de Segunda Ordem. P6 da SL da IMO 1984 43
3.4.1 Resolução 43

4 Série Harmônica **46**
4.1 Variação da Série Harmônica. SL da IMO 1975 P5 47
4.1.1 Resolução 47
4.2 Série Harmônica Alternada. P1 da IMO de 1979 49
4.2.1 Resolução 49
4.2.2 Generalização do problema 50
4.3 Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica. P2 da SL da IMO 2001 53
4.3.1 Considerações iniciais 53
4.3.2 Resolução 54

5 Outros problemas de Álgebra **56**
5.1 Sistema de Equações e Produtos Notáveis. P3 da SL da IMO 1971 56
5.1.1 Resolução 56
5.2 Série p, com $p = 2$. Aplicação com áreas. P2 da SL da IMO 1974 59
5.2.1 Resolução 59
5.3 Álgebra com frações. P5 da IMO 1974 61
5.3.1 Resolução 61
5.4 Função Parte Inteira e Fracionária. SL da IMO 2006 P1 63
5.4.1 Função Parte Inteira e Fracionária. 63
5.4.2 Resolução 64
5.5 Máximo e Mínimo numa Subsequência. P1 da IMO 2007 67
5.5.1 Exemplo 67
5.5.2 Resolução 68
5.6 Subsequências de uma Progressão Aritmética. P3 da IMO 2009 70
5.6.1 Considerações iniciais 71
5.6.2 Resolução 72
5.7 Divisibilidade e Sistema de Equações com Inteiros. P1 da IMO 2011 74
5.7.1 Resolução 74

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Capítulo 1

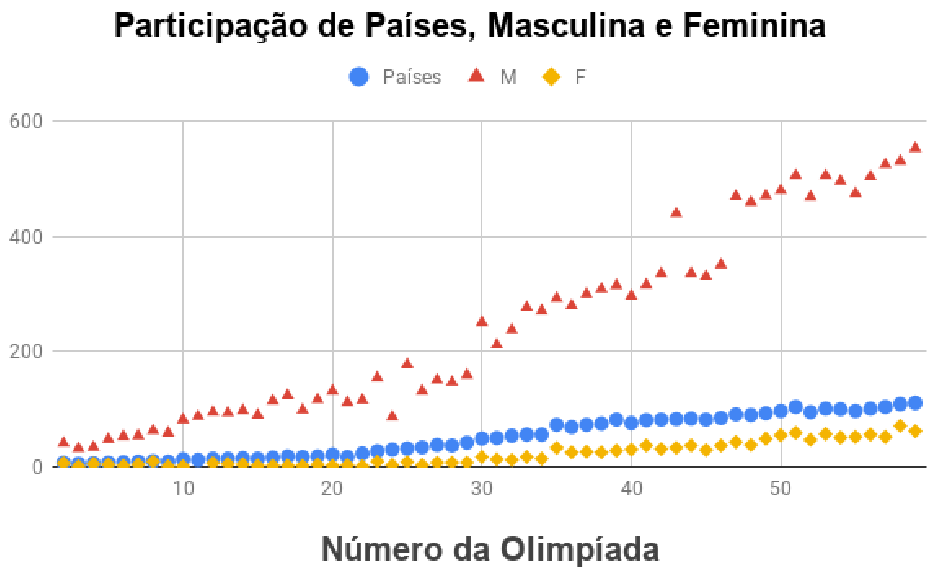
Introdução

1.1 Breve descrição da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio que é realizada anualmente desde 1959. O único ano em que não ocorreu foi em 1980, devido à conflitos na Mongólia, país que iria sediar o evento [1]. Atualmente é a competição de Matemática pré-universitária mais prestigiada [2].

Na primeira IMO em 1959 somente sete países do bloco socialista participaram, mas hoje em dia mais de 100 países de todo o mundo são representados. A Figura 1.1 mostra a evolução do número de países participantes e dos competidores masculinos e femininos.

Figura 1.1: Evolução do número de países participantes e dos competidores masculinos (M) e femininos (F) na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Dados tirados de http://www.imo-official.org/organizers.aspx



Fonte: http://www.imo-official.org/organizers.aspx

O número de competidores cresceu de forma sistemática ao longo do tempo. Porém, a participação masculina é notoriamente maior que a feminina. Esse padrão em que meninos participam mais que meninas é observado também nas competições de Matemática dentro do Brasil e tem sido associado a fatores sócio-culturais [3].

Para um país participar pela primeira vez de uma IMO a sociedade de Matemática ou o Ministro da Educação devem fazer uma solicitação formal e enviar observadores ao primeiro certame após o pedido [4].

O Regulamento das IMOs está disponível em [5]. Além disso, a cada ano é editado um regulamento adicional. O link para 2020 se encontra em [6].

Os objetivos das IMOs são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos de todos os países, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

A delegação de um país é formada por 6 competidores com menos de 20 anos e que não tenham feito curso universitário, um professor Líder e um professor Vice-Líder. O professor Vice-Líder cuida dos estudantes e substitui o Líder caso seja necessário.

Cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial (LongList, LL). Somente o professor Líder pode enviar propostas seguindo um pro-

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

cedimento seguro. Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. Nos últimos anos os problemas aparecem classificados em quatro área: Geometria, Teoria dos Números, Álgebra e Combinatória.

O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar uma lista menor (ShortList, SL). Cada Líder recebe a SL no primeiro dia da reunião de Líderes. A SL de cada ano deve ser mantida confidencial até a conclusão da IMO do próximo ano.

A competição acontece em dois dias consecutivos, três problemas cada dia com quatro horas e meia de duração. Cada problema vale 7 pontos e o grau de dificuldade segue a ordem crescente $P1 < P4 < P2 < P5 < P3 < P6$. Como os líderes conhecem os problemas da prova com antecedência, eles são mantidos separados dos competidores até o término do segundo dia de provas.

As provas são individuais. Durante a competição não é permitido o uso de calculadoras, mas sim de régua e compasso.

Um pouco menos da metade dos participantes recebe alguma medalha seguindo a proporção 1 : 2 : 3 entre Ouro, Prata e Bronze. Prêmios especiais podem ser dados para soluções sobressalentes ou brilhantes. Os participantes que não ganharam medalhas, mas que obtiveram o máximo de 7 pontos em pelo menos um problema recebem Menções Honrosas.

O Juri é formado pelos professores líderes de delegações, cada um com um voto e as decisões são tomadas por maioria simples. Cabe ao Juri a escolha dos problemas da SL que serão usados na IMO, solução de conflitos, a revisão das provas e escolha dos prêmios.

Além da parte competitiva as IMOs são uma grande festa que permite aos participantes socializar com outros estudantes da sua idade e com interesses comuns. O país sede, nos três dias em que as provas são avaliadas, organiza visitas a lugares de interesse da cidade e outras atividades recreativas, esportivas e culturais.

Os países que ficaram com as notas mais altas por equipe em cada IMO foram a China (19 vezes), a antiga União Soviética (14 vezes) e os Estados Unidos (7 vezes) [2].

Considerando o número total de medalhas e menções honrosas recebidas (peso 1 para todas) os três países mais premiados são Hungria, Romênia e Inglaterra. O Brasil é o primeiro país latino americano, na posição de número 23, seguido de Colômbia na posição 41 e Argentina na posição 43.

A delegação do Brasil fez sua primeira participação em 1979 e apresenta uma melhora de desempenho ao longo do tempo [7]. Seu melhor resultado por equipes foi a posição de número 15 (de 109 países) obtido em 2016. Até 2018, de 231 participações, os estudantes brasileiros ganharam 10 medalhas de Ouro, 43 de Prata, 77 de Bronze e 33 Menções Honrosas.

A Tabela 1.1 lista os medalhistas de Ouro do Brasil nas IMOs e os anos em que estas

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

aconteceram. Destacamos o Prof. Carlos Gustavo T. de A. Moreira, que atualmente trabalha no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e treina a equipe brasileira que participa da IMO [8] e o Prof. Artur Ávila Cordeiro de Melo [9], que atualmente trabalha na França, e foi o primeiro latino americano a receber a Medalha Fields [10], considerado equivalente ao Prêmio Nobel.

Tabela 1.1: Medalhistas de Ouro do Brasil nas IMOs com seus respectivos anos.

Nome	Anos
Nicolau Corçao Saldanha	1981
Ralph Costa Teixeira	1986,1987
Carlos Gustavo T. de A. Moreira	1990
Artur Ávila Cordeiro de Melo	1995
Nicolau Corçao Saldanha	1981
Gabriel Tabares Bujokas	2005
Henrique Pondé de Oliveira Pinto	2009
Rodrigo Sanches Angelo	2012
Pedro Lucas Lanaro Sponchiado	2018

Fonte: https://www.obm.org.br/olimpiada-internacional-de-matematica/.

Além da IMO o Brasil participa de um número significativo de outras olimpíadas internacionais de Matemática como a Ibero-americana (OIM), a do Cone Sul, a Iraniana de Geometria (IGO) e a Olimpíada Europeia de Matemática para Meninas (EGMO, European Girls' Mathematical Olympiad) [11].

A seleção para representar o Brasil na IMO, e outras olimpíadas, é feita a partir dos estudantes medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática [12].

1.2 Organização e enunciados dos problemas

Os problemas aparecem organizados em quatro capítulos. Porém, tipicamente cada desafio usa conhecimentos ligados a mais de uma área da Matemática. Dentro de cada capítulo é dedicada uma seção para cada IMO. Em várias seções apresentamos primeiro uma introdução aos conhecimentos chaves para a resolução do problema.

Embora úteis e proveitosas, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas da IMO não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos temos conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas soluções se encontram frequentemente somente em inglês.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas neste texto usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Escolhemos discutir alguns assuntos, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Sete desafios apresentamos pela primeira vez neste livro (2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 5.1, 5.2 e 5.3). Uma versão preliminar de treze das seções expostas aqui fizeram parte de uma dissertação do autor [13] e seis problemas foram objeto de dois artigos ([14] e [15]).

Seguem os enunciados dos problemas:

Problema 2.1: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais que satisfazem

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0. \tag{1.1}$$

Seja m o menor e M o maior deles. Provar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq -nmM. \tag{1.2}$$

Problema 2.2: Sejam $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ duas sequências de n números cada. Provar que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

é verdadeiro quando $z_1, z_2, ..., z_n$ denota $y_1, y_2, \cdots, y_n$ em outra ordem.

Problema 2.3: Considere a sequência infinita (x_n) de números reais e positivos com as propriedades a seguir: $x_0 = 1$ e para todo $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$. (a) Prove que para toda sequência desse tipo existe $n \geq 1$ tal que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999. \tag{1.3}$$

(b) Encontre uma sequência para a qual

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \tag{1.4}$$

para todo n.

Problema 2.4: Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n. \tag{1.5}$$

Problema 2.5: Seja $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}. \tag{1.6}$$

Problema 2.6: Determinar todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem números reais $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ tais que $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \tag{1.7}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Problema 3.1: Mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f_k f_{k+1} = f_r$. Seja $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ uma sequência de números reais tais que

$$0 \leq a_n \leq 1 \tag{1.8}$$

e

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0 \tag{1.9}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$. Mostrar que

$$0 \leq (n + 1)\,(a_n - a_{n+1}) \leq 2 \tag{1.10}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Problema 3.2: Sejam $x_0 = 5$ e

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \tag{1.11}$$

com $n = 0, 1, 2, ...$ Provar que $45 < x_{1000} < 45,1$.

Problema 3.3: A sequência (a_n) está definida pela relação de recorrência $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}. \tag{1.12}$$

Encontre uma fórmula explícita para a_n.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Problema 3.4: Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como: $f_1 = 1$, $f_2 = c$, e

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2). \tag{1.13}$$

Problema 4.1: Seja M o conjunto de todos os inteiros positivos que não tem o dígito 9 na base 10. Se $x_1, \cdots, x_n$ é uma sequência de elementos arbitrários e diferentes em M, prove que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{1.14}$$

Problema 4.2: Dado que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$$

onde p e q são números naturais primos entre si, prove que p é divisível por 1979.

Problema 4.3: Seja $a_0, a_1, a_2, ...$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostre que a desigualdade

$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2} \tag{1.15}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n.

Problema 5.1: Sabendo que o sistema

$$x + y + z = 3, \tag{1.16}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 15, \tag{1.17}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 35, \tag{1.18}$$

tem uma solução real para a qual

$$x^2 + y^2 + z^2 < 10, \tag{1.19}$$

encontrar o valor de $x^5 + y^5 + z^5$ para essa solução.

Problema 5.2: Provar que quadrados de lados $1, 1/2, 1/3, ...$ podem ser colocados dentro de um quadrado de lado $3/2$ de tal forma que nenhum par de quadrados tenham pontos interiores em comum.

Problema 5.3: Se a, b, c e d são números reais não negativos arbitrários, encontrar todos os valores possíveis de

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}. \tag{1.20}$$

Problema 5.4: A sequência de números reais $a_0, a_1, a_2, ...$ está definida pela fórmula

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot < a_i > \tag{1.21}$$

para $i \geq 0$; a_0 é um número real arbitrário, $\lfloor a_i \rfloor$ denota o maior inteiro que não é maior que a_i, e $< a_i >= a_i - \lfloor a_i \rfloor$. Prove que $a_i = a_{i+2}$ para i suficientemente grande.

Problema 5.5: Sejam dados os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$. Para cada i $(1 \leq i \leq n)$ defina

$$d_i = max\left\{a_j : 1 \leq j \leq i\right\} - min\left\{a_j : i \leq j \leq n\right\} \tag{1.22}$$

e seja

$$d = max\left\{d_i : 1 \leq i \leq n\right\}. \tag{1.23}$$

(a) Prove que, para quaisquer números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$max\left\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\right\} \geq \frac{d}{2} \tag{1.24}$$

(b) Mostre que existem números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tais que vale a igualdade em (1.24).

Problema 5.6: Seja $s_1, s_2, s_3, ...$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que as subsequências $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ e $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ são ambas progressões aritméticas. Demonstre que a sequência $s_1, s_2, s_3, ...$ também é uma progressão aritmética.

Problema 5.7: Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A. Encontre todos os conjuntos A de quatro inteiros positivos distintos para os quais n_A alcança o seu valor máximo.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Capítulo 2

Desigualdades

2.1 Desigualdade com lista de soma zero. P3 da SL da IMO 1972

Problema: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais que satisfazem

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0. \tag{2.1}$$

Seja m o menor e M o maior deles. Provar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq -nmM. \tag{2.2}$$

A IMO 1972 foi realizada nas cidade de Varsóvia e Torún, na Polônia [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Checoslováquia [17].

2.1.1 Resolução

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ temos

$$m \leq x_i \leq M.$$

Segue que para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ vale

$$(M - x_i)(m - x_i) \leq 0,$$

$$Mm - (M + m)x_i + x_i^2 \leq 0.$$

Somando as desigualdades anteriores desde $i = 1$ até $i = n$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} Mm - \sum_{i=1}^{n} (M+m)\, x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 0,$$

$$nMm - (M+m) \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 0.$$

Mas pela equação (2.1) temos que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Com isto a desigualdade anterior se reduz a equação (2.2)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq -nMm.$$

2.2 Desigualdade, Reordenamento, Mínimos Quadrados. P1 da IMO 1975

Problema: Sejam $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ duas sequências de n números cada. Provar que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$$

é verdadeiro quando $z_1, z_2, ..., z_n$ denota $y_1, y_2, \cdots, y_n$ em outra ordem.

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Checoslováquia, atualmente República Checa [17].

2.2.1 Considerações iniciais

Antes da demonstração, vejamos um exemplo.

Sejam $(x)_{i=1}^{3} = (3, 0, -2)$ e $(y)_{i=1}^{3} = (2, 1, 0)$. Temos (3!) seis permutações possíveis:

$$(3-2)^2 + (0-1)^2 + (-2-0)^2 = 1 + 1 + 4 = 6,$$

$$(3-2)^2 + (0-0)^2 + (-2-1)^2 = 1 + 0 + 9 = 10,$$

$$(3-1)^2 + (0-2)^2 + (-2-0)^2 = 4 + 4 + 4 = 12,$$

$$(3-1)^2 + (0-0)^2 + (-2-2)^2 = 4 + 0 + 16 = 20,$$

$$(3-0)^2 + (0-2)^2 + (-2-1)^2 = 9 + 4 + 9 = 22,$$

$$(3-0)^2 + (0-1)^2 + (-2-2)^2 = 9 + 1 + 16 = 26.$$

2.2.2 Resolução

Queremos provar que a soma dos quadrados das diferenças é mínima quando, para todo i e j, com $1 \leq i < j \leq n$, temos $z_i \geq z_j$. Ou seja, $z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_n$.

A demonstração será feita por absurdo. Suponha o contrário. Isto é, a soma dos quadrados das diferenças é mínima em um reordenamento em que existem i e j, com $1 \leq i < j \leq n$, tal que $z_i < z_j$. Vamos mostrar que a troca de z_i com z_j leva a uma soma menor, o que é uma contradição, pois estamos supondo que a soma é mínima.

Notamos que

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 = \left(x_i^2 - 2x_i z_j + z_j^2\right) + \left(x_j^2 - 2x_j z_i + z_i^2\right),$$

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 = x_i^2 + z_i^2 + x_j^2 + z_j^2 - 2x_i z_j - 2x_j z_i.$$

Subtraendo e somando $2x_i z_i + 2x_j z_j$ segue

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 = \left(x_i^2 - 2x_i z_i + z_i^2\right) + \left(x_j^2 - 2x_j z_j + z_j^2\right) - 2x_i z_j - 2x_j z_i + 2x_i z_i + 2x_j z_j,$$

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 = (x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2 - 2x_i z_j + 2x_i z_i - 2x_j z_i + 2x_j z_j,$$

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 = (x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2 - 2x_i\left(z_j - z_i\right) + 2x_j\left(z_j - z_i\right),$$

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 = (x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2 - 2\left(x_i - x_j\right)\left(z_j - z_i\right).$$

Como $i < j$ temos que $x_i \geq x_j$ e $z_i < z_j$, logo $\left(x_i - x_j\right)\left(z_j - z_i\right) \geq 0$ e vale a desigualdade

$$(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2 \leq (x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2.$$

Esta última desigualdade contradiz a hipótese da soma dos quadrados das diferenças ser mínima quando existem i e j, com $i < j$, tal que $z_i < z_j$. Isto conclui a demonstração.

2.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. P3 da IMO 1982

Problema: Seja a sequência infinita (x_n) de números reais e positivos com as propriedades a seguir: $x_0 = 1$ e para todo $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$. (a) Provar que para toda sequência desse tipo existe $n \geq 1$ tal que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999. \tag{2.3}$$

(b) Encontrar uma sequência para a qual

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \tag{2.4}$$

para todo n.

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, Hungria [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga União Soviética [17].

2.3.1 Considerações iniciais

Proposição 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Dadas duas sequências de números reais $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ então*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \tag{2.5}$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ com λ real.

Demonstração: Consideremos a função real de variável real

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência podemos escrever

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Isto é, $f(x)$ é um polinômio de segundo grau em x. Como $f(x)$ é uma soma de quadrados teremos $f(x) \geq 0$ e seu discriminante negativo ou igual a zero:

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Dividindo por 4 obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrita com os símbolos de somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2.$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero. Nesse caso $f(x)$ tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Mas isto corresponde a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2 = 0.$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, os quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i\lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. □

2.3.2 Resolução

(a) Inicialmente usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Consideremos as sequências de números reais e positivos

$$(a_n) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_1}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_2}}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}} \right),$$

$$(b_n) = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \cdots, \sqrt{x_n}).$$

Pela equação (2.5) temos

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq (x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 .$$

Seja $X_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Como $x_0 = 1$ segue que

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \right) (X_{n-1} + x_n) \geq (1 + X_{n-1})^2 .$$

Adicionalmente, desenvolvendo o quadrado, simplificando e fatorando novamente verifica-se que $(1 + X_{n-1})^2 \geq 4X_{n-1}$. Logo

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq \frac{4X_{n-1}}{X_{n-1} + x_n} = \frac{4}{1 + \frac{x_n}{X_{n-1}}}. \tag{2.6}$$

Das hipóteses do problema a sequência (x_n) é não crescente:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n.$$

Logo,

$$X_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1} \geq (n-1)x_n.$$

Segue que

$$\frac{x_n}{X_{n-1}} \leq \frac{1}{n{-}1}. \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) em (2.6) encontramos

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq \frac{4}{1 + \frac{x_n}{X_{n-1}}} \geq \frac{4\,(n-1)}{n}.$$

Como queremos encontrar um valor de n tal que (2.3) seja verdadeiro basta escolher

$$\frac{4(n-1)}{n} \geq 3,999,$$

ou seja, $n > 4000$.

(b) A sequência $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma solução. Note que $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ e (x_n) é decrescente (logo não crescente). De fato, $x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n = x_n$.

Para mostrar que vale (2.4) notamos que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Sendo o lado direito da equação anterior a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ segue que

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Logo, vale para todo n que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} < 4.$$

2.3.3 Comentários finais

Este problema, proposto para a IMO de 1982, lidou com uma sequência infinita e não crescente de números reais positivos. Como tema central treinamos o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Porém, outros conhecimentos clássicos, como a soma de uma série geométrica, também foram necessários.

2.4 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica. P2 da IMO 2012

Problema: Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Provar que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n. \tag{2.8}$$

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina [16].

2.4.1 Considerações iniciais

A ferramenta principal para resolver o problema desta seção é a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica.

Proposição 2 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica) *Seja*

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

uma lista de números reais positivos com $n \geq 2$*, então*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i},$$

onde $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ *e* $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$*. A igualdade ocorre quando* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Demonstração: Caso $n = 2$: Queremos provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado temos:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando obtemos outras sentenças equivalentes:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Mas o quadrado de um número real é sempre não negativo. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2$. □

A demonstração para $n > 2$ pode ser encontrada, por exemplo, em [18] e [19].

2.4.2 Resolução

Para o primeiro fator na multiplicação da desigualdade (2.8) considere a lista $\{1, a_2\}$. Como ambos números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2}.$$

Elevando ao quadrado os dois lados da desigualdade anterior temos

$$(1+a_2)^2 \geq 2^2 \cdot a_2. \tag{2.9}$$

A igualdade ocorre quando $a_2 = 1$.

Para o segundo fator na multiplicação da desigualdade (2.8) consideremos a lista $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a_3\right\}$. Como os três números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3}{3} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a_3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3}.$$

Elevando ao cubo na desigualdade anterior temos

$$(1+a_3)^3 = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)+a_3\right)^3 \geq 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3. \tag{2.10}$$

A igualdade ocorre quando $a_3 = \frac{1}{2}$.

Em geral, para o termo k-ésimo $(2 \leq k \leq n)$ do lado esquerdo na desigualdade (2.8) consideramos a lista com $k-1$ números iguais a $\frac{1}{k-1}$ e a_k, isto é,

$$\left\{\underbrace{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, \cdots, \frac{1}{k-1}}_{(k-1) \quad números}, a_k\right\}.$$

Como todos os números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{(k-1)\left(\frac{1}{k-1}\right)+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k}.$$

Elevando à potência k-ésima os dois lados da desigualdade anterior obtemos

$$(1+a_k)^k \geq k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k. \tag{2.11}$$

A igualdade ocorre quando $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Como k varia de 2 até n multiplicando os termos da desigualdade anterior temos

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq \prod_{k=2}^{n} k^k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)} \cdot a_k.$$

Notamos que parte do lado direito da desigualdade anterior é um produto telescópico onde todos os termos se cancelam, exceto um

$$\prod_{k=2}^{n} k^k \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = 2^2 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdots (n-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} n^n \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = n^n,$$

logo

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq n^n \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n.$$

Usando a hipótese no enunciado do problema $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ podemos escrever

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq n^n.$$

Para que aconteça a igualdade devemos ter que $a_k = \frac{1}{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n$, mas $n \geq 3$ e

$$a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n-1} \neq 1.$$

Isto é, a igualdade nunca acontece, provando que a desigualdade é estrita

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k > n^n.$$

2.4.3 Comentários finais

Este problema, proposto para a IMO de 2012, explorou uma sequência de números reais positivos. A solução do desafio envolveu o uso repetido da desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

2.5 Desigualdades com Sequências de Inteiros. P1 da IMO 2014

Problema: Seja $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Provar que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}. \tag{2.12}$$

A IMO 2014 foi realizada na Cidade do Cabo, África do Sul. Problema proposto por Gerhard Wöginger, Áustria [16].

2.5.1 Considerações iniciais

A fração que aparece na desigualdade inicialmente lembra a média aritmética, mas não é o caso devido ao termo a_0. É uma soma de $n+1$ termos da sequência, dividida por n.

Vamos estudar primeiramente um exemplo. Seja $a_n = n+1$ com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que (a_n) é estritamente crescente (vale $0 < a_0 < a_1 < a_2 \ldots$). Adicionalmente

$$a_{n+1} - a_n = (n+2) - (n+1) = 1.$$

Isto é, a sequência é uma progressão aritmética (PA) de inteiros positivos. A soma de $n+1$ termos de uma PA é

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(n+1) \cdot (a_0 + a_n)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Segue que podemos escrever a desigualdade (2.12) como

$$n + 1 < \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2n} \leq n + 2. \tag{2.13}$$

O lado esquerdo de (2.13) vale se $n < 2$ e o lado direito de (2.13) se $n \geq 1$. Com isto, $n = 1$ é a única solução da desigualdade.

2.5.2 Resolução

Olhando para o lado esquerdo da desigualdade (2.12), e como todos os números são inteiros positivos, vamos definir uma nova sequência (d_n)

$$na_n < a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$0 < a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n = d_n,$$

$$0 < d_n.$$

Agora focamos no lado direito da desigualdade (2.12)

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq na_{n+1},$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \leq na_{n+1} + a_{n+1} = (n+1)a_{n+1},$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} \leq 0,$$

$$d_{n+1} \leq 0.$$

Isto é, a desigualdade (2.12) é equivalente a

$$d_{n+1} \leq 0 < d_n \tag{2.14}$$

para a sequência (d_n). Note de (2.5.2) que $d_0 = d_1 = a_0 > 0$. Temos adicionalmente que

$$d_{n+1} - d_n = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n).$$

Logo, para $n \geq 1$ vale que

$$d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0. \tag{2.15}$$

Como a sequência (a_n) é estritamente crescente temos $a_n - a_{n+1} < 0$ e $d_{n+1} < d_n$. Isto é, a sequência (d_n) é estritamente decrescente para $n > 1$.

Segue que, para algum valor de n, a desigualdade (2.14) é satisfeita, pois a sequência (d_n) inicia em um inteiro positivo, é estritamente decrescente e somente assume valores inteiros.

O fato da sequência inicial ser de números inteiros é essencial na demonstração. Como contra-exemplo, seja (a_n) uma sequência de números reais dada por

$$a_n = 10 - \frac{1}{2^n}.$$

Temos $a_0 = 9$ e usando (2.5.2) $d_0 = a_0 = 9 > 0$. Adicionalmente

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Logo $a_n < a_{n+1}$ e (a_n) é estritamente crescente. Pela equação (2.15) segue que,

$$d_{n+1} - d_n = -\frac{n}{2^{n+1}}.$$

Isto é, a sequência (d_n) é estritamente decrescente para $n > 0$. Porém, como o número $\frac{n}{2^{n+1}}$ tende a zero rapidamente quando n cresce, pode ser verificado que $d_n > 8 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = 10 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{n-1}{2^n} = 8 + \frac{n+1}{2^n} > 8.$$

Com isso não existe um valor de n que satisfaça a desigualdade (2.14).

2.5.3 Comentários finais

O problema discutiu uma propriedade, satisfeita por uma sequência, que podia ser confundida com uma média aritmética. Mostramos que o fato da sequência ser estritamente crescente e de números inteiros positivos foi essencial na solução.

2.6 Uso da Desigualdade do Rearranjo. P2 da IMO 2018

Problema: Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem números reais $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$ tais que $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \tag{2.16}$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

A IMO 2018 foi realizada na cidade Cluj-Napoca, Romênia. Problema proposto pela delegação da Eslováquia [16].

2.6.1 Desigualdade do Rearranjo

Antes de resolver o problema vamos estudar a Desigualdade do Rearranjo que será usada posteriormente. Seguimos o enunciado e demonstração apresentado por Antonio Caminha Muniz Neto [20].

Proposição 3 (Desigualdade do Rearranjo) *Sejam $a_1 < \cdots < a_n$, com $n \in \mathbb{N}$, números reais e considere a expressão*

$$S = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

onde $b_1, \cdots, b_n$ é uma reordenação de $a_1, \cdots, a_n$. Então

$$a_1 a_n + \cdots + a_n a_1 \leq S \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2. \tag{2.17}$$

Antes da demonstração, vejamos um exemplo.

Exemplo: Seja $(a)_{i=1}^{3} = (-2, 0, 3)$. Temos (3!) seis permutações possíveis:

$$(-2)(3) + (0)(0) + (3)(-2) = -12,$$

$$(-2)(0) + (0)(3) + (3)(-2) = -6,$$

$$(-2)(3) + (0)(-2) + (3)(0) = -6,$$

$$(-2)(-2) + (0)(3) + (3)(0) = 4,$$

$$(-2)(0) + (0)(-2) + (3)(3) = 9,$$

$$(-2)(-2) + (0)(0) + (3)(3) = 13.$$

Uma ilustração geométrica usando vetores tridimensionais pode ser encontrada em [21].

Demonstração: Vamos primeiro maximizar S. Como só há um número finito ($n!$) de possíveis reordenações $b_1, \cdots, b_n$, há uma delas que torna S máxima. Suponha então que partimos da reordenação $b_1, \cdots, b_n$ que torna S máxima. Queremos mostrar que essa reordenação é exatamente $a_1, \cdots, a_n$. Para isso, basta mostrarmos que deve ser $b_1 < \cdots < b_n$. Por absurdo, suponha o contrário, isto é, que existam índices $i < j$ tais que $b_i > b_j$. Trocando as posições de b_i e b_j (pondo b_j ao lado de a_i e b_i ao lado de a_j) a variação de S será:

$$\triangle S = (a_i b_j + a_j b_i) - (a_i b_i + a_j b_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0.$$

Em outras palavras, S aumenta. Mas isso é um absurdo pois partimos de um valor máximo de S. Logo, $b_1 < \cdots < b_n$ e $b_i = a_i, \forall i$. Com isso o maior valor possível de S é $a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

O raciocínio para provar a outra parte da desigualdade (2.17) é análogo. Existe uma reordenação $c_1, \cdots, c_n$ que torna S mínima, pois o número de reordenações é finito. Suponha então que partimos dela. Queremos mostrar que essa reordenação é exatamente $a_n, \cdots, a_1$. Para isso, basta mostrarmos que deve ser $c_1 > \cdots > c_n$. Por absurdo, suponha o contrário, isto é, que existam índices $i < j$ tais que $c_i < c_j$. Trocando as posições de c_i e c_j (pondo c_j ao lado de a_i e c_i ao lado de a_j) a variação de S será:

$$\triangle S = (a_i c_j + a_j c_i) - (a_i c_i + a_j c_j) = (a_i - a_j)(c_j - c_i) < 0.$$

Em outras palavras, S diminui. Mas isso é um absurdo pois partimos de um valor mínimo de S. Logo, vale que $c_1 > \cdots > c_n$ e $c_i = a_{n+1-i}, \forall i$. Com isso o menor valor possível de S é $a_1 a_n + \cdots + a_n a_1$. □

2.6.2 Caso $n = 3$

Temos a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_1, a_2)$, pois $a_4 = a_1$ e $a_5 = a_2$. Adicionalmente, da equação (2.16) seguem três equações, uma para cada valor de $i = 1, 2, 3$:

$$a_1 a_2 + 1 = a_3 \tag{2.18}$$

$$a_2a_3 + 1 = a_1 \tag{2.19}$$

$$a_3a_1 + 1 = a_2 \tag{2.20}$$

estamos interessados em encontrar uma solução.

- Suponha inicialmente que $a_1 = a_2 = a_3 = a$. As três equações anteriores se transformam em

$$a^2 - a + 1 = 0 \tag{2.21}$$

que não tem solução real pois o discriminante dessa equação quadrática em a é negativo.

- Como segunda tentativa considere $a_1 = a_2 = a \neq a_3$. Neste caso a equação (2.18) se transforma em

$$a_3 = a^2 + 1 \tag{2.22}$$

  e as equações (2.19) e (2.20) em

$$aa_3 + 1 = a. \tag{2.23}$$

  Substituindo a_3 de (2.22) em (2.23) encontramos que $a^3 = -1$, segue que $a = -1$ e voltando em (2.22) encontramos $a_3 = 2$. Isto é, existe solução no caso $n = 3$, a sequência $(a_1, a_2, a_3) = (-1, -1, 2)$.

  Pode ser mostrado que $(a_1, a_2, a_3) = (2, -1, -1)$ e $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 2, -1)$ também são soluções.

2.6.3 Caso $n = 4$

Temos a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_1, a_2)$, pois $a_5 = a_1$ e $a_6 = a_2$. Note ainda que podemos estender a sequência de forma cíclica: $a_7 = a_3$ e $a_8 = a_4$.

Adicionalmente, da equação (2.16) seguem quatro equações, uma para cada valor de $i = 1, 2, 3, 4$:

$$a_1a_2 + 1 = a_3, \tag{2.24}$$

$$a_2a_3 + 1 = a_4, \tag{2.25}$$

$$a_3a_4 + 1 = a_1, \tag{2.26}$$

$$a_4a_1 + 1 = a_2. \tag{2.27}$$

Das quatro equações anteriores vamos formar outros dois conjuntos de quatro equações cada. Para o primeiro conjunto multiplique as equações anteriores por a_3, a_4, a_1 e a_2, respetivamente.

$$a_1a_2a_3 + a_3 = a_3^2, \tag{2.28}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

$$a_2a_3a_4 + a_4 = a_4^2, \tag{2.29}$$

$$a_1a_3a_4 + a_1 = a_1^2, \tag{2.30}$$

$$a_1a_2a_4 + a_2 = a_2^2. \tag{2.31}$$

Para o segundo conjunto multiplique as equações (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) por a_4, a_1, a_2 e a_3, respetivamente.

$$a_1a_2a_4 + a_4 = a_3a_4, \tag{2.32}$$

$$a_1a_2a_3 + a_1 = a_1a_4, \tag{2.33}$$

$$a_2a_3a_4 + a_2 = a_1a_2, \tag{2.34}$$

$$a_1a_3a_4 + a_3 = a_2a_3. \tag{2.35}$$

Note que a soma dos lados esquerdos dos dois conjuntos de equações anteriores é idêntica, logo a somas dos lados direitos dos dois conjuntos deve ser igual:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + a_4a_4 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1.$$

Como (a_2, a_3, a_4, a_1) é uma permutação de (a_1, a_2, a_3, a_4) pela Desigualdade do Rearranjo (equação 2.17) concluímos que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$ e voltando nas equações (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) encontramos novamente a equação 2.21 que não tem solução real. Isto prova que não existe solução real no caso $n = 4$. estamos prontos para a solução geral.

2.6.4 Resolução Geral

Multiplicando a equação (2.16) por a_{i+2} teremos:

$$a_ia_{i+1}a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2. \tag{2.36}$$

Somando as n equações anteriores, lembrem que $i = 1, 2, \cdots, n$, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1}a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2, \tag{2.37}$$

mas $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ logo

$$\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1}a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{2.38}$$

Por outro lado, trocando i por $i+1$ na equação (2.16) encontramos:

$$a_{i+1}a_{i+2}+1=a_{i+3}. \tag{2.39}$$

Multiplicando por a_i a equação anterior segue:

$$a_i a_{i+3}=a_i a_{i+1}a_{i+2}+a_i. \tag{2.40}$$

No próximo passo somamos as n equações anteriores:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3}=\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}a_{i+2}+\sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2.41}$$

Agora podemos verificar que o lado esquerdo da equação (2.38) coincide com o lado direito da equação (2.41), logo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3}=\sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{2.42}$$

Pela Desigualdade do Rearranjo (equação (2.17)) a equação (2.42) implica que

$$a_{i+3}=a_i, \forall i=1,2,\cdots,n. \tag{2.43}$$

Temos dois casos a considerar.

- n é múltiplo de 3, $n=3k$ com $k\in\mathbb{N}$.

Neste contexto existe uma solução que satisfaz a equação (2.43) da forma

$$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{3k-2},a_{3k-1},a_{3k})=(-1,-1,2,\cdots,-1,-1,2)\,.$$

Esta solução repete o padrão encontrado no caso $n=3$.

- n não é múltiplo de 3, $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ com $k\in\mathbb{N}$.

Neste contexto não existe nenhuma solução. Pois a equação (2.43) implica que $a_1=a_4=\cdots=a_{3k+1}$, $a_2=a_5=\cdots=a_{3k+2}$ e $a_3=a_6=\cdots=a_{3k}$. Por outro lado, quando $n=3k+1$ temos que as igualdades das hipóteses do problema $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$ podem ser escritas como $a_{3k+2}=a_1$, $a_{3(k+1)}=a_2$. Logo, $a_2=a_1$ e $a_3=a_2$. Isto é, $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ que já vimos que não leva a nenhuma solução real. Uma situação análoga acontece quando $n=3k+2$.

Capítulo 3

Recorrências

3.1 Recorrência de Segunda Ordem. P4 da SL da IMO 1975

Problema: Seja $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ uma sequência de números reais tais que

$$0 \leq a_n \leq 1 \tag{3.1}$$

e

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0 \tag{3.2}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$. Mostrar que

$$0 \leq (n+1)\left(a_n - a_{n+1}\right) \leq 2 \tag{3.3}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$.

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Bulgas-Sofia, Bulgária [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Suécia [17].

3.1.1 Resolução

Inicialmente notamos que a relação de recorrência (3.2) pode ser escrita de forma mais simétrica como

$$a_n - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_{n+2}. \tag{3.4}$$

A desigualdade anterior e a que queremos provar sugerem definir a variação Δa_n como

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}. \tag{3.5}$$

Usando a definição anterior reescrevemos (3.4) e (3.3) como

$$\Delta a_n \geq \Delta a_{n+1} \tag{3.6}$$

e

$$0 \leq (n+1)\Delta a_n \leq 2. \tag{3.7}$$

Notamos que o fato da desigualdade (3.6) ser válida para todo número natural implica que se j e l são números naturais, com $j < l$, então

$$\Delta a_j \geq \Delta a_l. \tag{3.8}$$

Temos duas desigualdades para provar em todo $n \in \mathbb{N}$: i) $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ e ii) $(n+1)\Delta a_n \leq 2$.

i) $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $n+1$ é um número positivo basta provar que $\Delta a_n \geq 0$ para todo n. Suponhamos, por absurdo, que exista algum número natural $n = n_0$ tal que

$$\Delta a_{n_0} < 0. \tag{3.9}$$

Segue de (3.8) que para todo número natural $k \geq n_0$ teremos

$$\Delta a_{n_0} \geq \Delta a_k. \tag{3.10}$$

Seja m um número natural. Vamos procurar uma relação entre a diferença $a_{n_0} - a_{n_0+m}$ e a variação Δa_{n_0}:

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} = (a_{n_0} - a_{n_0+1}) + (a_{n_0+1} - a_{n_0+2}) + \cdots + (a_{n_0+m-1} - a_{n_0+m}),$$

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} = \Delta a_{n_0} + \Delta a_{n_0+1} + \cdots + \Delta a_{n_0+m-1}.$$

Por (3.10) os m somandos no lado direito da equação anterior são menores ou iguais a Δa_{n_0}:

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq \Delta a_{n_0} + \Delta a_{n_0} + \cdots + \Delta a_{n_0},$$

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq m\Delta a_{n_0}. \tag{3.11}$$

Por (3.9) sempre podemos escolher um valor de $m = m_0$ suficientemente grande tal que $m_0\Delta a_{n_0} < -1$. Segue que para todo $m \geq m_0$ teremos

$$a_{n_0} - a_{n_0+m} < -1. \tag{3.12}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Esta última desigualdade é um absurdo pois por (3.1) devemos ter que

$$-1 \leq a_{n_0} - a_{n_0+m} \leq 1.$$

Concluímos que $\Delta a_n \geq 0$ e vale que $0 \leq (n+1)\Delta a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) $(n+1)\Delta a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Inicialmente vamos estudar a soma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

De (3.1) temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1 + 1 + \cdots + 1 = n. \tag{3.13}$$

A seguir vamos estudar outra soma usando as variações Δa_k:

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = (a_1 - a_2) + 2\,(a_2 - a_3) + 3\,(a_3 - a_4) + \cdots + (n-1)\,(a_{n-1} - a_n) + n\,(a_n - a_{n+1})\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}.$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1}. \tag{3.14}$$

Juntando (3.13) e (3.14) obtemos a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1} \leq n. \tag{3.15}$$

Notamos agora que

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k + na_{n+1}$$

pois na_{n+1} é um número não negativo. De (3.15) e a desigualdade anterior segue que

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq n. \tag{3.16}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Por outro lado, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = \Delta a_1 + 2\Delta a_2 + \cdots + n\Delta a_n.$$

Neste ponto usamos a relação de recorrência (3.8) que determina que se $k \leq n$ então $\Delta a_k \geq \Delta a_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq \Delta a_n + 2\Delta a_n + \cdots + n\Delta a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq (1 + 2 + \cdots + n)\,\Delta a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \geq \frac{n\,(n+1)}{2}\Delta a_n. \tag{3.17}$$

Juntas as desigualdades (3.16) e (3.17) garantem o que queríamos demonstrar:

$$\frac{n\,(n+1)}{2}\Delta a_n \leq \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k \leq n,$$

$$\frac{n\,(n+1)}{2}\Delta a_n \leq n.$$

Concluímos que vale $(n+1)\,\Delta a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Recorrência Não Linear. P14 da SL da IMO 1975

Problema: Sejam $x_0 = 5$ e

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \tag{3.18}$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$. Provar que $45 < x_{1000} < 45,1$.

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Iugoslávia [17].

3.2.1 Resolução

A sequência dada lembra o algoritmo de Hierão para o cômputo da raiz quadrada de um número real d:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{d}{x_n}\right). \tag{3.19}$$

Não faremos aqui (por fugir ao escopo do Ensino Médio), mas pode ser provado que quando n tende a infinito a mesma converge a $\sqrt{d}$ usando a aproximação de Newton para a

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

função real de variável real $f(x) = x^2 - d$. Uma interpretação geométrica para o algoritmo de Hierão pode ser encontrada em [22].

A Tabela 3.1 ilustra o cálculo até duas casas decimais dos primeiros termos da sequência definida no problema por (3.18).

Tabela 3.1: Cálculo até duas casas decimais dos primeiros termos das sequências (3.18).

n	x_n
0	5
1	5,2
2	5,39
3	5,58

Fonte: O autor.

Os resultados sugerem conjeturar que para todo inteiro n não negativo valem: i) $x_n > 0$ ii) $x_{n+1} > x_n$ e iii) $x_{n+1} - x_n \leq 0,2$.

i) Temos $x_0 = 5 > 0$. Supondo, por hipótese de indução, que para um certo n temos $x_n > 0$ segue que $\frac{1}{x_n} > 0$. Logo, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > 0$ por ser a soma de dois números positivos. Concluímos que $x_n > 0$ para todo inteiro n não negativo.

ii) Como $\frac{1}{x_n}$ é um número real positivo e $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ segue que $x_{n+1} > x_n$. Isto significa que a sequência é crescente para todo inteiro n não negativo.

iii) Como (x_n) é uma sequência crescente e de números reais positivos segue que a sequência $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ é decrescente. Da condição inicial $x_0 = 5$, $\frac{1}{x_0} = 0,2$, como $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ é decrescente e $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n}$ então $x_{n+1} - x_n \leq 0,2$ para todo inteiro n não negativo.

Notamos também que (3.18) pode ser escrito como:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n},$$

$$x_{n+1}x_n = x_n^2 + 1,$$

$$x_{n+1}x_n - x_n^2 = 1,$$

$$x_n\left(x_{n+1} - x_n\right) = 1,$$

$$2x_n\left(x_{n+1} - x_n\right) = 2,$$

$$\left(x_n + x_n\right)\left(x_{n+1} - x_n\right) = 2. \tag{3.20}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Usando agora que $x_{n+1} > x_n$ no primeiro parêntesis da equação anterior encontramos

$$(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n) > 2,$$

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 > 2. \tag{3.21}$$

Como aparece a diferença de termos consecutivos na desigualdade (3.21) podemos escreve-la para diferentes valores de n com vista a formar uma soma telescópica:

$$x_1^2 - x_0^2 > 2,$$

$$x_2^2 - x_1^2 > 2,$$

$$x_3^2 - x_2^2 > 2,$$

$$\vdots$$

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 > 2,$$

Somando todas as desigualdades anteriores encontramos:

$$x_n^2 - x_0^2 > 2n,$$

$$x_n^2 > 2n + 25,$$

$$\sqrt{2n+25} < x_n. \tag{3.22}$$

A ultima desigualdade vale para todo inteiro n não negativo. Em particular, substituindo $n = 1000$ temos $45 < x_{1000}$. Esta é a primeira parte do resultado que queríamos provar.

Para a segunda parte demonstraremos que $x_n < 0,1 + \sqrt{2n+25}$ para todo inteiro n não negativo.

Voltando ao resultado provado em iii) $x_{n+1} - 0,2 \leq x_n$ e na igualdade (3.20)

$$(x_n + x_n)(x_{n+1} - x_n) = 2,$$

podemos trocar um dos x_n no primeiro parêntesis por $x_{n+1} - 0,2$ para encontrar a desigualdade

$$(x_{n+1} - 0,2 + x_n)(x_{n+1} - x_n) \leq 2. \tag{3.23}$$

Usando a lei distributiva reescrevemos a desigualdade anterior como

$$(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n) - 0,2\,(x_{n+1} - x_n) \leq 2,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 - 0,2\,(x_{n+1} - x_n) \leq 2. \tag{3.24}$$

Novamente, temos uma desigualdade onde somente aparecem diferenças de termos consecutivos de uma sequência. Escrevendo-a para diferentes valores de n podemos montar uma soma telescópica:

$$x_1^2 - x_0^2 - 0,2\,(x_1 - x_0) \leq 2,$$

$$x_2^2 - x_1^2 - 0,2\,(x_2 - x_1) \leq 2,$$

$$x_3^2 - x_2^2 - 0,2\,(x_3 - x_2) \leq 2,$$

$$\vdots$$

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 - 0,2\,(x_n - x_{n-1}) \leq 2.$$

Somando todas as desigualdade anteriores encontramos

$$x_n^2 - x_0^2 - 0,2\,(x_n - x_0) \leq 2n,$$

$$x_n^2 - 25 - 0,2\,(x_n - 5) - 2n \leq 0,$$

$$x_n^2 - 0,2x_n - (2n + 24) \leq 0. \tag{3.25}$$

Resolvendo a igualdade quadrática em x_n de (3.25) encontramos

$$x_n = \frac{0,2 \pm \sqrt{8n + 96,04}}{2} = 0,1 \pm \sqrt{2n + 24,01}.$$

Logo, (3.25) é satisfeita quando

$$0,1 - \sqrt{2n + 24,01} < x_n < 0,1 + \sqrt{2n + 24,01},$$

$$x_n < 0,1 + \sqrt{2n + 24,01} < 0,1 + \sqrt{2n + 25},$$

$$x_n < 0,1 + \sqrt{2n + 25}.$$

A ultima desigualdade vale para todo inteiro n não negativo. Em particular, substituindo $n = 1000$ temos $x_{1000} < 45,1$. Esta é a segunda parte do resultado que queríamos provar.

Resumindo, mostramos que a recorrência $x_0 = 5$ e $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ satisfaz

$$\sqrt{2n + 25} < x_n < 0,1 + \sqrt{2n + 25}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

3.3 Recorrência Não Linear. P9 da SL da IMO 1981

Problema: A sequência (a_n) está definida pela relação de recorrência $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}. \tag{3.26}$$

Encontre uma fórmula explícita para a_n.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental [17].

3.3.1 Resolução

Primeiramente observamos que $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$. Como $a_1 > 0$, o princípio de indução finita garante que a_n seja um número real positivo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para eliminar a raiz quadrada, definimos a sequência (b_n) tal que

$$b_n = \sqrt{1 + 24a_n} > 0. \tag{3.27}$$

Segue que

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24}. \tag{3.28}$$

Substituindo (3.28) em (3.26) e simplificando encontramos

$$\frac{2}{3}b_{n+1}^2 = \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + b_n,$$

$$b_{n+1}^2 = \frac{b_n^2}{4} + \frac{3}{2}b_n + \frac{9}{4} = \left(\frac{b_n + 3}{2}\right)^2.$$

Logo teremos

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}, \tag{3.29}$$

uma recorrência linear e não homogênea para (b_n). Quando $a_1 = 1$ usando (3.27) encontramos $b_1 = 5$.

Como o coeficiente que acompanha b_n em (3.29) não é 1, primeiro procuramos uma solução da equação homogênea correspondente:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n.$$

Temos que (c_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, logo uma solução é $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Segundo, seja $b_n = c_n \cdot d_n$ ou

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot d_n. \tag{3.30}$$

Como $b_1 = 5$ teremos $d_1 = 5$.

Substituindo a equação (3.30) em (3.29) e simplificando encontramos

$$d_{n+1} = d_n + 3 \cdot 2^{n-1} \quad \forall\, n \geq 1. \tag{3.31}$$

Isto é, a sequência (d_n) é linear e não homogênea como a sequência (b_n), porém agora o coeficiente que acompanha d_n é 1.

Reescrevendo a equação anterior para valores do subíndice variando entre 1 e $n-1$:

$$d_2 = d_1 + 3 \cdot 1,$$

$$d_3 = d_2 + 3 \cdot 2,$$

$$d_4 = d_3 + 3 \cdot 2^2,$$

$$\vdots$$

$$d_n = d_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2}$$

e somando todas as equações anteriores (soma telescópica) encontramos

$$d_n = d_1 + 3\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\right) \quad \forall\, n \geq 2.$$

A soma entre parênteses na linha anterior é de uma progressão geométrica de razão 2, logo

$$d_n = 5 + 3\left(2^{n-1} - 1\right) \quad \forall n \geq 1. \tag{3.32}$$

Substituindo o resultado anterior em (3.30) e simplificando encontramos

$$b_n = 3 + 4 \cdot 2^{-n} \quad \forall n \geq 1. \tag{3.33}$$

Juntando as fórmulas em (3.33) e (3.28) obtemos:

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

3.4 Recorrência de Segunda Ordem. P6 da SL da IMO 1984

Problema: Seja c um inteiro positivo. A sequência (f_n) se define como: $f_1 = 1$, $f_2 = c$, e

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2). \tag{3.34}$$

Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f_k f_{k+1} = f_r$.

A IMO 1984 foi realizada na cidade de Praga, antiga Checoslováquia, atualmente República Checa [16]. O problema acima foi proposto pela delegação do Canadá [17].

3.4.1 Resolução

A relação de recorrência (3.34) pode ser reescrita como

$$f_{n+1} - f_n = f_n - f_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2). \tag{3.35}$$

Vamos escrever agora a recorrência para diferentes valores de n para por em evidência uma soma telescópica:

$$(f_3 - f_2) = (f_2 - f_1) + 2,$$

$$(f_4 - f_3) = (f_3 - f_2) + 2,$$

$$(f_5 - f_4) = (f_4 - f_3) + 2,$$

$$\vdots$$

$$(f_n - f_{n-1}) = (f_{n-1} - f_{n-2}) + 2,$$

$$(f_{n+1} - f_n) = (f_n - f_{n-1}) + 2.$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_{n+1} - f_n = f_2 - f_1 + 2 \cdot (n - 1). \tag{3.36}$$

Escrevendo de forma explícita a equação (3.36) para diferentes valores de n fica em evidência outra soma telescópica

$$f_3 - f_2 = (c - 1) + 2 \cdot 1,$$

$$f_4 - f_3 = (c - 1) + 2 \cdot 2,$$

$$f_5 - f_4 = (c - 1) + 2 \cdot 3,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

$$\vdots$$

$$f_n - f_{n-1} = (c-1) + 2 \cdot (n-2).$$

Somando todas as equações anteriores encontramos

$$f_n - f_2 = (n-2)(c-1) + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-2)),$$

$$f_n = c + (n-2)(c-1) + (n-1)(n-2),$$

$$f_n = n^2 + (c-4)n + (4-c).$$

Chamando $b = c - 4$ temos uma fórmula explícita para a sequência (f_n):

$$f_n = n^2 + bn - b. \tag{3.37}$$

Trocando n por k e $k+1$ em (3.37) escrevemos:

$$f_k f_{k+1} = \left(k^2 + bk - b\right)\left((k+1)^2 + b(k+1) - b\right),$$

$$f_k f_{k+1} = k^4 + 2(b+1)k^3 + (b^2 + b + 1)k^2 - (b^2 + b)k - b. \tag{3.38}$$

Queremos encontrar um número natural r tal que $f_k f_{k+1} = f_r$. Como $f_k f_{k+1}$ é um polinômio de grau 4 em k por (3.38) e f_r é um polinômio de grau 2 em r por (3.37) devemos fazer r um polinômio de grau 2 em k. Seja

$$r = k^2 + pk + q \tag{3.39}$$

onde p e q são inteiros a serem determinados. De (3.37) e (3.39) segue que

$$f_r = f_{k^2+pk+q} = \left(k^2 + pk + q\right)^2 + b\left(k^2 + pk + q\right) - b,$$

$$f_r = k^4 + 2pk^3 + \left(p^2 + 2q + b\right)k^2 + p(2q + b)k + \left(q^2 + bq - b\right). \tag{3.40}$$

Igualando os coeficientes respectivos de cada potência de k em (3.38) e (3.40) chegamos a um sistema de equações com variáveis p e q:

$$p = b + 1, \tag{3.41}$$

$$p^2 + 2q = b^2 + 1, \tag{3.42}$$

$$p(2q + b) = -(b^2 + b), \tag{3.43}$$

$$q^2 + bq = 0. \tag{3.44}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Substituindo $p = b+1$ de (3.41) em (3.42) encontramos $q = -b$. O valor de $q = 0$, solução de (3.44), não satisfaz o sistema.

Logo, voltando em (3.39), o valor de r procurado é

$$r = k^2 + (b+1)k - b. \tag{3.45}$$

ou, usando que $b = c - 4$,

$$r = k^2 + (c-3)k - c + 4.$$

Temos que r é o resultado da soma e produto de inteiros, logo r será um número inteiro. Como c e k são inteiros e no mínimo 1 teremos que r é no mínimo 2:

$$r = k^2 + (c-3)k - (c-4),$$

$$r = [(k-1)+1]^2 + [(c-1)-2][(k-1)+1] - [(c-1)-3],$$

$$r = (k-1)^2 + 2(k-1) + 1 + (c-1)(k-1) + (c-1) - 2(k-1) - 2 - (c-1) + 3,$$

$$r = (k-1)^2 + (c-1)(k-1) + 2 \geq 2.$$

De (3.37) a equação (3.45) também pode ser escrita como

$$r = f_k + k$$

e a propriedade da sequência reescrita como

$$f_k f_{k+1} = f_{f_k+k}.$$

Capítulo 4

Série Harmônica

Se conhece por "Série Harmônica" a soma de um número infinito de termos da forma $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots .$$

Proposição 4 *A Série Harmônica cresce ilimitadamente.*

Demonstração: Partindo da sequência infinita

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$$

pode ser construída outra sequência infinita chamada "sequência das somas parciais da Série Harmônica"

$$(S_n) = \left(1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \cdots, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \cdots\right).$$

Isto é

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Vamos estudar uma subsequência infinita, (S_{2^n}), da sequência (S_n):

$$(S_{2^n}) = (S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, \cdots, S_{2^n}, \cdots).$$

Considerando que

$$S_1 = 1 \geq 1 + 0 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+3\cdot\frac{1}{2},$$

podemos conjeturar que

$$S_{2^n} \geq 1+n\cdot\frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

Para concluir a prova por indução em n basta observar que

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}} \geq S_{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}},$$

$$S_{2^{n+1}} \geq S_{2^n}+\frac{2^n}{2^{n+1}} = S_{2^n}+\frac{1}{2}.$$

Tomando como hipótese de indução que (4.1) vale para algum n temos que

$$S_{2^{n+1}} \geq 1+n\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+(n+1)\cdot\frac{1}{2}.$$

Isto é, (4.1) vale para $n+1$ e, pelo princípio de indução finita, vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como a sequência (n) cresce ilimitadamente quando n cresce, a subsequência (S_{2^n}) e a sequência (S_n) também crescem ilimitadamente quando n cresce. $\square$

4.1 Variação da Série Harmônica. SL da IMO 1975 P5

Problema: Seja M o conjunto de todos os inteiros positivos que não tem o dígito 9 na base 10. Se $x_1, \cdots, x_n$ é uma sequência de elementos arbitrários e diferentes em M, prove que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{4.2}$$

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Suécia [17].

4.1.1 Resolução

Sendo que o número de elementos da sequência dada pode ser tão grande quanto se queira e seus elementos são inteiros positivo, o problema propõe um resultado aparentemente contraditório. A forma do somatório lembra uma série harmônica, da qual mostramos que cresce ilimitadamente, porém se pede provar que a mesma é limitada.

A chave para resolver o conflito está na primeira frase. Não são todos os números naturais que entram na soma. Temos que excluir aqueles com pelo menos um dígito nove. Mesmo assim podemos ter a falsa impressão de que os números com 9 na sua representação decimal são raros, e que sua exclusão pouco afetaria a divergência da soma.

Seja $P(k)$ a probabilidade de que um número de k dígitos não tenha nenhum dígito 9. Pelo princípio multiplicativo temos um total de $9 \cdot 10^{k-1}$ números de k dígitos (9 escolhas para o primeiro dígito da esquerda e 10 escolhas para os outros $k-1$ dígitos), dos quais $8 \cdot 9^{k-1}$ não têm nenhum dígito 9 (8 escolhas para o primeiro dígito da esquerda e 9 escolhas para os outros $k-1$ dígitos). Logo

$$P(k) = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}.$$

Notamos que quando k cresce $P(k)$ decresce e tende a zero quando k tende a infinito.

Denotemos por S o conjunto dos elementos de M selecionados para calcular a soma dos inversos. Consideremos o conjunto S_k dos elementos de S com k dígitos.

Denotando por K a quantidade de dígitos do maior elemento de S, temos que

$$S = \bigcup_{k=1}^{K} S_k \tag{4.3}$$

Podemos escrever o somatório em (4.2) como uma soma dupla:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \sum_{x \in S} \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in S_k} \frac{1}{x}. \tag{4.4}$$

Adicionalmente, sabemos que cada elemento x de S_k satisfaz que $10^{k-1} \leq x < 10^k$. Portanto, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \leq \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in S_k} \frac{1}{10^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{9}{10}\right)^k. \tag{4.5}$$

Para finalizar a resolução, usamos a fórmula da soma da progressão geométrica de razão q com primeiro termo igual a 1, isto é,

$$\sum_{k=0}^{K-1} q^k = \frac{1-q^K}{1-q}. \tag{4.6}$$

Concluímos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 8 \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 8\, \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^K}{1-\frac{9}{10}} = 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^K\right) \tag{4.7}$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{4.8}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Observações: Uma vez discutida esta resolução, os professores e estudantes podem propor ou questionar sobre outros métodos de demonstração, sobre uma estimativa do valor da soma dos inversos de todos os elementos de M, ou sobre o número mínimo de termos que é preciso considerar para superar, por exemplo, o valor 12. Testes com auxílio do software Mathematica indicam que esse número é 6110520 (mais de 6 milhões!).

4.2 Série Harmônica Alternada. P1 da IMO de 1979

Problema: Dado que

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q},$$

onde p e q são números naturais primos entre si, provar que p é divisível por 1979.

A IMO 1979 foi realizada na cidade de Londres, Reino Unido [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental [17].

4.2.1 Resolução

Seja $S=\frac{p}{q}$ a soma dada:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}. \tag{4.9}$$

Notemos que é possível separar os termos com sinais diferentes:

$$S=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right).$$

Somando e subtraindo $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)$ encontramos

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right),$$

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right),$$

$$S=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\frac{1}{662}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right).$$

A última soma tem 660 termos que vamos dividir em dois somatórios:

$$S=\sum_{i=660}^{989}\frac{1}{i}+\sum_{i=990}^{1319}\frac{1}{i}.$$

Também observamos que $1979 - 660 = 1319$ e $1979 - 989 = 990$. Isto permite escrever o segundo somatório usando o número 1979.

$$S = \sum_{i=660}^{989} \frac{1}{i} + \sum_{i=660}^{989} \frac{1}{1979 - i},$$

$$S = \sum_{i=660}^{989} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{1979 - i} \right),$$

$$S = \sum_{i=660}^{989} \frac{1979}{i\,(1979 - i)}.$$

Como 1979 é um número primo, $660 \leq i \leq 989$ e $990 \leq 1979 - i \leq 1319$ nenhum dos denominadores dentro do somatório divide o numerador. Logo, quando escrito na forma $S = \frac{p}{q}$ o número p é divisível por 1979.

4.2.2 Generalização do problema

O número 1979 é primo e correspondeu ao ano da competição. Essa ideia pode ser estendida para outros anos primos?

Lembramos primeiro que um número primo e maior que 3 quando dividido por 6 somente deixa resto 1 ou 5.

A seguir vamos mostrar que existem duas possibilidades: i) o número de parcelas n em S é da forma $4t + 3$ com um ano primo N da forma $6t + 5$ e ii) o número de parcelas n em S é da forma $4t$ com um ano primo N da forma $6t + 1$. Quando o número de parcelas n em S é da forma $4t + 1$ ou $4t + 2$ não podem ser reproduzidos todos os passos do problema anterior.

- i) Para $n = 4t + 3$ com $t \geq 0$ inteiro seja

$$S_n = S_{4t+3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{4t+2} + \frac{1}{4t+3}. \tag{4.10}$$

Separando os termos com o mesmo sinal

$$S_{4t+3} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t+2}\right).$$

Somando e subtraindo $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t+2}\right)$ segue que

$$S_{4t+3} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4t+3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2t+1}\right),$$

$$S_{4t+3} = \left(\frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+3} + \cdots + \frac{1}{4t+3} \right).$$

Temos $2t+2$ parcelas que vamos separar em dois somatórios de $t+1$ parcelas cada

$$S_{4t+3} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \frac{1}{i} + \sum_{i=3t+3}^{4t+3} \frac{1}{i}.$$

Queremos encontrar um ano primo N tal que

$$\sum_{i=3t+3}^{4t+3} \frac{1}{i} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \frac{1}{N-i}.$$

Logo

$$N - (2t+2) = 4t+3,$$

$$N - (3t+2) = 3t+3.$$

Isto é,

$$N = 6t + 5 \tag{4.11}$$

e

$$S_n = S_{4t+3} = \sum_{i=2t+2}^{3t+2} \left[\frac{N}{i\,(N-i)} \right].$$

Exemplo: Em 2027 (próximo ano primo da forma $6t+5$) o problema poderia ser formulado assim: Verifique que a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1350} + \frac{1}{1351}. \tag{4.12}$$

é divisível por 2027.

Uma solução: Como $N = 2027$ temos por (4.11) que $t = 337$. Logo (4.12) coincide com (4.10) pois $1351 = 4 \cdot 337 + 3$.

- ii) Para $n = 4t$ com $t \geq 1$ inteiro seja

$$S_n = S_{4t} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4t-1} - \frac{1}{4t}. \tag{4.13}$$

Separando os termos com o mesmo sinal

$$S_{4t} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4t-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4t} \right).$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Somando e subtraindo $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4t}\right)$ segue que

$$S_{4t}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4t}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2t}\right),$$

$$S_{4t}=\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{1}{2t+2}+\cdots+\frac{1}{4t}\right).$$

Temos $2t$ parcelas que vamos separar em dois somatórios de t parcelas cada

$$S_{4t}=\sum_{i=2t+1}^{3t}\frac{1}{i}+\sum_{i=3t+1}^{4t}\frac{1}{i}.$$

Queremos encontrar um ano primo N tal que

$$\sum_{i=3t+1}^{4t}\frac{1}{i}=\sum_{i=2t+1}^{3t}\frac{1}{N-i}.$$

Logo

$$N-(2t+1)=4t,$$

$$N-3t=3t+1.$$

Isto é,

$$N=6t+1 \tag{4.14}$$

e

$$S_n=S_{4t}=\sum_{i=2t+1}^{3t}\left[\frac{N}{i\,(N-i)}\right].$$

Exemplo: Em 2029 (próximo ano primo da forma $6t+1$) o problema poderia ser formulado assim: Verifique que a soma

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1351}-\frac{1}{1352} \tag{4.15}$$

é divisível por 2029.

Uma solução: Como $N=2029$ temos por (4.14) que $t=338$. Logo (4.15) coincide com (4.13) pois $1352=4\cdot 338$.

Um último comentário, pode ser provado usando a Série de Taylor da função logaritmo natural (conteúdo fora da grade do Ensino Médio) que a soma de um número infinito de termos da série harmônica alternada é ln(2):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=\ln(2)\,.$$

4.3 Desigualdade de Bernoulli e Série Harmônica. P2 da SL da IMO 2001

Problema: Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostre que a desigualdade

$$1+a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2} \tag{4.16}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n.

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [17].

4.3.1 Considerações iniciais

Proposição 5 (Desigualdade de Bernoulli) *Vale que:*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x>-1\ ,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,. \tag{4.17}$$

Demonstração: Este resultado pode ser provado por indução em n. Para $n=0$ temos

$$1=(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x=1.$$

Por hipótese de indução suponha o resultado válido para algum n

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Como $x>-1$ temos que $1+x>0$ e

$$(1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+nx),$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x+nx^2 \geq 1+(n+1)\cdot x,$$

pois $nx^2 \geq 0$. Segue que (4.17) vale para $n+1$ e, pelo princípio de indução finita, vale para todo n. □

4.3.2 Resolução

Usaremos a desigualdade de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \in (-1,+\infty),\ n \in \mathbb{N}$$

para substituir $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$. Fazemos $x = \frac{1}{n}$ na desigualdade anterior

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Segue que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{2}. \tag{4.18}$$

Como $a_n > 0$ para todo n teremos

$$a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1}\sqrt[n]{2}. \tag{4.19}$$

Logo, para provar (4.16), basta mostrar que

$$1+a_n > a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{4.20}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n. Pois nesse caso

$$1+a_n > a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$

e, por transitividade,

$$1+a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}.$$

A demonstração será feita por contradição. Suponhamos o contrário de (4.20). Isto é, suponha que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ vale que

$$1+a_n \leq a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{4.21}$$

Em outras palavras, o número de termos da sequência (a_n) que satisfaz (4.20) seria finito. Dividindo os dois lados de (4.21) por $n+1$ teremos

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq a_{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n}. \tag{4.22}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Segue que:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{a_n}{n+1}\le\frac{a_{n-1}}{n}. \tag{4.23}$$

Somando as desigualdades anteriores quando n muda de N até $m \in \mathbb{N}$, com $m > N$, teremos

$$\sum_{n=N}^{m}\frac{1}{n+1}+\sum_{n=N}^{m}\frac{a_n}{n+1}\le\sum_{n=N}^{m}\frac{a_{n-1}}{n}. \tag{4.24}$$

Escrevendo explicitamente os dois últimos somatórios ficará claro que existem muitos termos idênticos que podemos cancelar

$$\sum_{n=N}^{m}\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}+\frac{a_m}{m+1}, \tag{4.25}$$

$$\sum_{n=N}^{m}\frac{a_{n-1}}{n}=\frac{a_{N-1}}{N}+\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}.$$

Segue que

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right)+\frac{a_m}{m+1}\le\frac{a_{N-1}}{N}, \tag{4.26}$$

$$\frac{a_m}{m+1}\le\frac{a_{N-1}}{N}-\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right). \tag{4.27}$$

O somatório que resta na desigualdade anterior lembra a série harmônica que sabemos que cresce ilimitadamente. Consequentemente, deve existir um valor de m a partir do qual $\frac{a_m}{m+1} < 0$. E esta é a contradição, pois $a_m > 0$ e $m > 0$.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Capítulo 5

Outros problemas de Álgebra

5.1 Sistema de Equações e Produtos Notáveis. P3 da SL da IMO 1971

Problema: Sabendo que o sistema

$$x + y + z = 3, \tag{5.1}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 15, \tag{5.2}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 35, \tag{5.3}$$

tem uma solução real para a qual

$$x^2 + y^2 + z^2 < 10, \tag{5.4}$$

encontrar o valor de $x^5 + y^5 + z^5$ para essa solução.

A IMO 1971 foi realizada nas cidade de Bratislava e Zilina, na Eslováquia [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Alemanha [17].

5.1.1 Resolução

Usaremos as mesmas letras x, y e z para denotar a solução. Seja

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha, \tag{5.5}$$

Temos que

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \tag{5.6}$$

logo

$$(x+y+z)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2,$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2,$$

$$xy + xz + yz = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2}. \tag{5.7}$$

Substituindo (5.1) e (5.5) na equação anterior encontramos

$$xy + xz + yz = \frac{9-\alpha}{2}. \tag{5.8}$$

Adicionalmente, do Binômio de Newton temos

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \tag{5.9}$$

logo

$$(x+y+z)^3 = (x+y)^3 + 3(x+y)^2 z + 3(x+y)z^2 + z^3,$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3\left(x^2 + 2xy + y^2\right)z + 3(x+y)z^2 + z^3,$$

$$(x+y+z)^3 = \left(x^3+y^3+z^3\right) + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz,$$

$$(x+y+z)^3 = \left(x^3+y^3+z^3\right) + 3xy(x+y) + 3xyz + 3xz(x+z) +$$

$$+3xyz + 3yz(y+z) + 3xyz - 3xyz,$$

$$3xyz = -(x+y+z)^3 + \left(x^3+y^3+z^3\right) + 3xy(x+y+z) +$$

$$+3xz(x+y+z) + 3yz(x+y+z),$$

$$3xyz = -(x+y+z)^3 + \left(x^3+y^3+z^3\right) + \tag{5.10}$$

$$+3(x+y+z)(xy+xz+yz).$$

Substituindo (5.1), (5.2) e (5.8) na equação anterior encontramos

$$xyz = -4 + 3\left(\frac{9-\alpha}{2}\right). \tag{5.11}$$

Notamos ainda que

$$(xy+xz+yz)^2 = \left(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2\right) + 2xyz(x+y+z),$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 = (xy+xz+yz)^2 - 2xyz(x+y+z). \tag{5.12}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Substituindo (5.8), (5.11) e (5.1) na equação anterior encontramos

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 = \frac{\alpha^2 + 18\alpha - 147}{4}. \tag{5.13}$$

Do Binômio de Newton temos

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4, \tag{5.14}$$

logo

$$(x + y + z)^4 = (x + y)^4 + 4\,(x + y)^3\,z + 6\,(x + y)^2\,z^2 + 4\,(x + y)\,z^3 + z^4,$$

$$(x + y + z)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 4\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)z +$$

$$+6\left(x^2 + 2xy + y^2\right)z^2 + 4\,(x + y)\,z^3 + z^4,$$

$$(x + y + z)^4 = \left(x^4 + y^4 + z^4\right) + 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)(xy + xz + yz) + \tag{5.15}$$

$$+8xyz\,(x + y + z) + 6\left(x^2z^2 + y^2z^2 + x^2y^2\right).$$

Substituindo (5.1), (5.3), (5.5), (5.8), (5.11) e (5.13) na equação anterior e simplificando encontramos

$$\alpha^2 - 18\alpha + 77 = (\alpha - 7)\,(\alpha - 11) = 0. \tag{5.16}$$

Considerando a equação (5.4) a solução é $\alpha = 7$. Voltando com este último resultado em (5.5), (5.8), (5.11) e (5.13) temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7, \tag{5.17}$$

$$xy + xz + yz = 1, \tag{5.18}$$

$$xyz = -1, \tag{5.19}$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 = 7. \tag{5.20}$$

Para calcular $x^5 + y^5 + z^5$ vamos desenvolver o produto

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)(x + y + z) = \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + x^4y + xy^4 + x^4z + xz^4 + y^4z + yz^4,$$

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)(x + y + z) = \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + xy\left(x^3 + y^3\right) + xz\left(x^3 + z^3\right) + yz\left(y^3 + z^3\right),$$

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)(x + y + z) = \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + (xy + xz + yz)\left(x^3 + y^3 + z^3\right) -$$

$$-xyz^3 - xy^3z - x^3yz,$$

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)(x + y + z) = \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + (xy + xz + yz)\left(x^3 + y^3 + z^3\right) -$$

$$-xyz\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

$$x^5 + y^5 + z^5 = \left(x^4 + y^4 + z^4\right)(x + y + z) - \tag{5.21}$$
$$- (xy + xz + yz)\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + xyz\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Substituindo (5.3), (5.1), (5.18), (5.2), (5.19) e (5.17) na equação anterior encontramos

$$x^5 + y^5 + z^5 = 83. \tag{5.22}$$

5.2 Série p, com $p = 2$. Aplicação com áreas. P2 da SL da IMO 1974

Problema: Provar que quadrados de lados $1, 1/2, 1/3, ...$ podem ser colocados dentro de um quadrado de lado 3/2 de tal forma que nenhum par de quadrados tenham pontos interiores em comum.

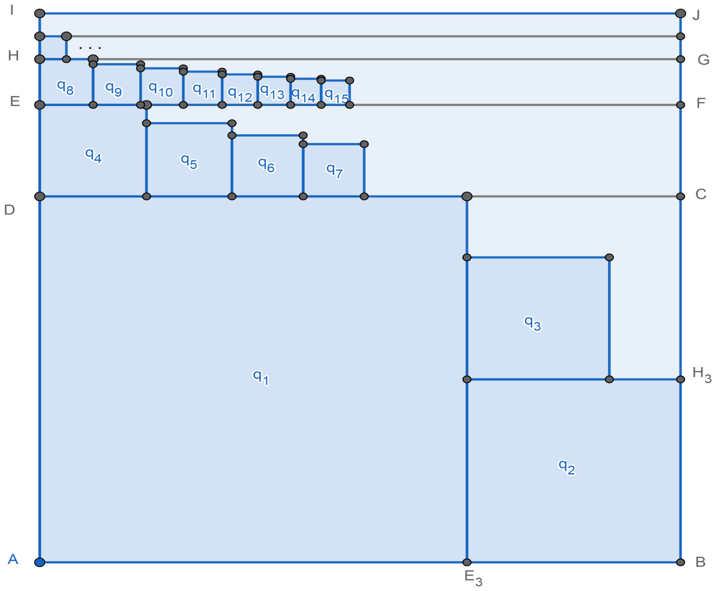
A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, na Alemanha [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Polônia [17].

5.2.1 Resolução

Os somatórios da forma $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^p$, onde p é um número real, são denominados séries-p. Se prova nos cursos de cálculo [24] que o resultado de somar um número infinito de termos é finito (a série é convergente) quando $p > 1$. Este tipo de somatório também serve de ponto de partida para definir a função zeta de Riemann, permitindo que p seja uma variável complexa [25].

A Figura 5.1 ilustra uma solução do problema.

Figura 5.1: Quadrados de lados $1, 1/2, 1/3, ...$ colocados dentro de um quadrado de lado $3/2$ de tal forma que nenhum par de quadrados tenham pontos interiores em comum.



Fonte: O autor.

Seja q_i o quadrado de lado $\frac{1}{i}$ com $i = 1, 2, 3, \cdots$. Dentro do quadrado de lado $\frac{3}{2}$, usando linhas paralelas a um dos lados, podemos construir retângulos r_i. Para $i = 1$ o retângulo r_1 (ABCD) tem lados $\frac{3}{2}$ e 1. Para $i = 2, 3, 4, \cdots$ os lados dos retângulos r_i são $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2^i}$.

A sequência $\left(\frac{1}{2^i}\right)_{i\geq 2}$ é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$. Definimos a sequência das somas parciais $(S_i)_{i\geq 2}$ como

$$S_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^i},$$

$$S_i = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right).$$

Quando i tende a infinito temos $\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right) = 0$ e consequentemente podemos escrever

$$\lim_{i\to\infty} S_i = \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{2}.$$

Segue que a soma $1 + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^i}\right) = \frac{3}{2}$ coincide com o lado do quadrado maior. Isto justifica que a construção dos retângulos r_i pode ser feita.

Como indicado na Figura 5.1 no retângulo r_1 (ABCD) são colocados os quadrados q_1, q_2 e q_3. No retângulo r_2 (CDEF) são colocados os quadrados q_4, q_5, q_6 e q_7. No retângulo r_3

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

(EFGH) são colocados os quadrados q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14} e q_{15}. Em geral, no retângulo r_i, com $i = 2, 3, 4, \cdots$, são colocados os quadrados do q_{2^i} até o $q_{2^{i+1}-1}$.

A justificativa para este alocamento está baseada na seguinte desigualdade para $i \geq 2$:

$$\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i+1} + \frac{1}{2^i+2} + \cdots + \frac{1}{2^{i+1}-1} < 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = 1.$$

No lado esquerdo da desigualdade anterior temos 2^i somandos, sendo que o maior de todos eles é $\frac{1}{2^i}$. Em outras palavras, o comprimento horizontal da linha de quadrados do q_{2^i} até o $q_{2^{i+1}-1}$ é sempre inferior a 1.

Este problema também ilustra que as somas das áreas de todos os quadrados q_i, de lado $\frac{1}{i}$ e com $i = 1, 2, 3, \cdots$, é inferior a $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Ou seja, podemos escrever que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^2 < \frac{9}{4} = 2,25.$$

O valor exato dessa soma de infinitos termos foi encontrado primeiro por Euler [23]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934.$$

5.3 Álgebra com frações. P5 da IMO 1974

Problema: Se a, b, c e d são números reais não negativos arbitrários, encontrar todos os valores possíveis de

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}. \tag{5.23}$$

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, na Alemanha [16]. O problema acima foi proposto por Jan van de Craats da delegação da Holanda [17].

5.3.1 Resolução

A ideia para resolver o problema é que existe uma "quase simetria" entre as frações. Como podemos modificar a soma para que seja mais simétrica? Mais simples de calcular?

Primeiro vamos adicionar a letra que está faltando em cada denominador de (5.23):

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1. \tag{5.24}$$

Como a, b, c e d são números reais não negativos vale a desigualdade anterior.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Segundo, vamos apagar letras nos denominadores de (5.23). Segue que

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2. \tag{5.25}$$

De (5.24) e (5.25) encontramos que

$$1 < S < 2. \tag{5.26}$$

Terceiro, quando $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 1)$ de (5.23) temos

$$S\left(0, 0, 1, 1\right) = 1, \tag{5.27}$$

e quando $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 1)$ segue que

$$S\left(0, 1, 0, 1\right) = 2. \tag{5.28}$$

De (5.26), (5.27) e (5.28) podemos escrever que

$$1 \leq S \leq 2. \tag{5.29}$$

Como S depende de quatro variáveis vamos simplificar para chegar em uma função de uma única variável $x \in [0, 1]$.

Exemplo: Sejam $[a, b, c, d] = [x\left(1-x\right), x, \left(1-x\right), 1]$, de (5.23) temos:

$$S\left(x\right) = \frac{x\left(1-x\right)}{x\left(1-x\right)+x+1} + \frac{x}{x\left(1-x\right)+x+\left(1-x\right)} +$$

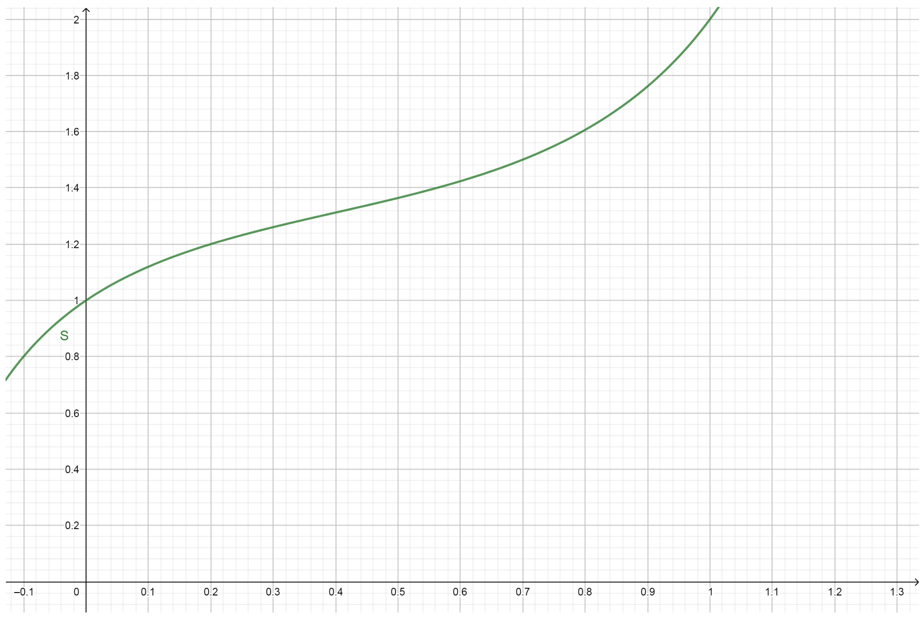
$$+ \frac{1-x}{x+\left(1-x\right)+1} + \frac{1}{x\left(1-x\right)+\left(1-x\right)+1},$$

$$S\left(x\right) = \frac{x^2-x}{x^2-2x-1} - \frac{x}{x^2-x-1} + \frac{1-x}{2} - \frac{1}{x^2-2}. \tag{5.30}$$

Como $S(x)$ é uma função contínua quando $x \in [0, 1]$ temos que S assume todos os valores no intervalo $[1, 2]$. A Figura 5.2 mostra o gráfico de 5.30 quando $x \in [0, 1]$.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Figura 5.2: Gráfico de 5.30 quando $x \in [0, 1]$.



Fonte: O autor.

5.4 Função Parte Inteira e Fracionária. SL da IMO 2006 P1

Problema: A sequência de números reais $a_0, a_1, a_2, ...$ está definida pela fórmula

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot < a_i > \tag{5.31}$$

para $i \geq 0$; a_0 é um número real arbitrário, $\lfloor a_i \rfloor$ denota o maior inteiro que não é maior que a_i, e $< a_i >= a_i - \lfloor a_i \rfloor$. Prove que $a_i = a_{i+2}$ para i suficientemente grande.

A IMO 2006 foi realizada na cidade de Ljubljana, Slovenia [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Estônia [26].

5.4.1 Função Parte Inteira e Fracionária.

A função parte inteira, denotada por $\lfloor x \rfloor$, converte um número real x no maior número inteiro menor ou igual a x, enquanto a função parte fracionária, denotada por $< x >$, converte um número real x em outro número real, $x - \lfloor x \rfloor$, maior ou igual a zero e menor que um.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Isto é, $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que

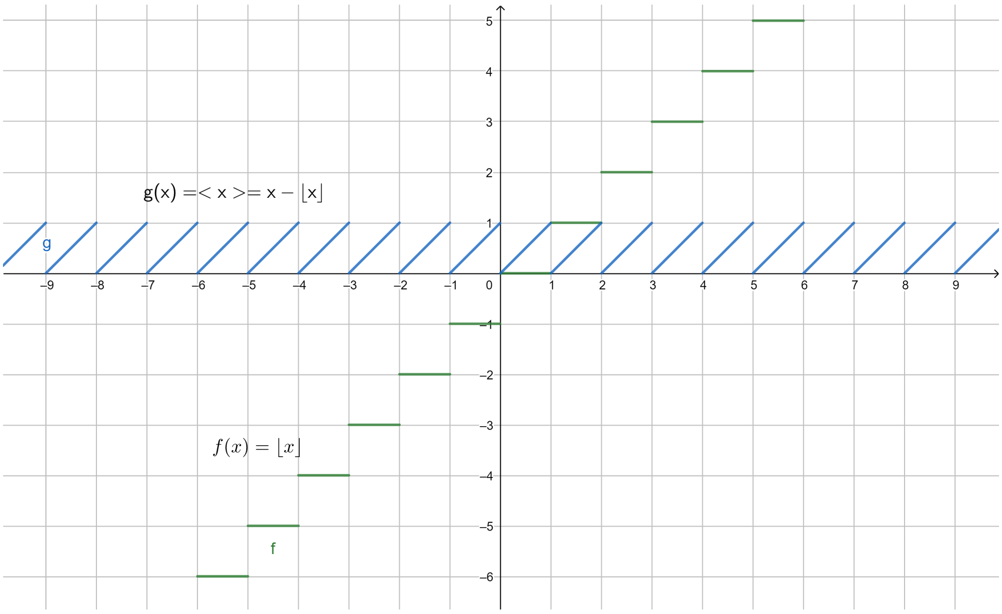
$$\lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

e $< x >: \mathbb{R} \to [0, 1)$ tal que

$$< x > = x - \lfloor x \rfloor.$$

A Figura 5.3 ilustra as funções parte inteira e parte fracionária.

Figura 5.3: A função parte inteira, denotada por $\lfloor x \rfloor$, converte um número real x no maior número inteiro menor ou igual a x, enquanto a função parte fracionária, denotada por $< x >$, converte um número real x em outro número real, $x - \lfloor x \rfloor$, maior ou igual a zero e menor que um.



Fonte: O autor.

Exemplos: $\lfloor -3,3 \rfloor = -4$; $\lfloor -2 \rfloor = -2$; $\lfloor -0,1 \rfloor = -1$; $\lfloor 0,1 \rfloor = 0$; $\lfloor 3,3 \rfloor = 3$; $\lfloor 7 \rfloor = 7$; $< -3,3 >= 0,7$; $< -2 >= 0$; $< -0,1 >= 0,9$; $< 0,1 >= 0,1$; $< 3,3 >= 0,3$; $< 7 >= 0$.

5.4.2 Resolução

A sequência em análise foi definida de forma recursiva. Vamos separar seu estudo em três casos.

- No caso em que $0 \leq a_0 \leq 1$ teremos que $a_1 = 0$ e o resto dos termos da sequência serão zeros. Isto é, vale que $a_i = a_{i+2} = 0$ para $i \geq 1$.

- Consideremos o caso em que $a_0 > 1$, teremos que $a_i \geq 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$, pois $0 \leq < x > < 1$ e quando $x \geq 0$ vale que $\lfloor x \rfloor \geq 0$.

Adicionalmente, $a_{i+1} < \lfloor a_i \rfloor \leq a_i$, multiplicar um número positivo por outro, maior ou igual a zero e menor que 1, produz um número menor que o de partida. Também usamos a definição da função parte inteira na última desigualdade.

Logo, para todo i temos que $a_{i+1} < a_i$ o que significa que a sequência de termos positivos é estritamente decrescente. Assim, para algum valor de i teremos que $0 \leq a_i \leq 1$ e os próximos termos serão todos zero. Novamente, vale que $a_i = a_{i+2} = 0$ para i suficientemente grande.

Agora estudaremos o caso mais desafiador, suponhamos que $a_0 < 0$. Como $0 \leq < x > < 1$ e quando $x < 0$ vale que $\lfloor x \rfloor < 0$ teremos que $a_i \leq 0, \; i \in \mathbb{N}$. Se para algum i acontecer que $a_i = 0$, então o resto dos termos da sequência serão zero, como visto anteriormente. Com isto, considere que $a_i < 0, \; \forall i \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\lfloor a_i \rfloor \leq -1 \tag{5.32}$$

para todo i. Temos ainda que

$$a_{i+1} > \lfloor a_i \rfloor \tag{5.33}$$

pois multiplicar um número negativo por outro, maior ou igual a zero e menor que 1, produz um número maior ao de partida. Adicionalmente, da definição da função parte inteira vale que

$$1 + \lfloor x \rfloor > x,$$

$$1 + \lfloor a_{i+1} \rfloor > a_{i+1}. \tag{5.34}$$

De (5.33) e (5.34) segue

$$1 + \lfloor a_{i+1} \rfloor > \lfloor a_i \rfloor,$$

$$\lfloor a_{i+1} \rfloor \geq \lfloor a_i \rfloor.$$

Logo, a sequência $(\lfloor a_i \rfloor)$ é não decrescente. Este último fato em conjunto com (5.32) indica que deve existir um valor i_0 a partir do qual $\lfloor a_i \rfloor$ é constante, digamos

$$\lfloor a_i \rfloor = c, \; i \geq i_0 \tag{5.35}$$

com $c \leq -1$ um inteiro. Voltando em (5.31), para $i \geq i_0$ temos

$$a_{i+1} = c \cdot < a_i >$$

$$a_{i+1} = c \cdot (a_i - c) = c{\cdot}a_i - c^2, \; i \geq i_0 \tag{5.36}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Encontramos uma equação de recorrência para a sequência (a_i) quando $a_0 < 0$ e $i \geq i_0$. A vantagem de (5.36) em comparação com (5.31) é que não aparecem mais as funções parte inteira e parte fracionária e é uma recorrência linear (porém, não homogênea). Para resolver (5.36) primeiro troque i por $i+1$

$$a_{i+2} = c{\cdot}a_{i+1} - c^2,\ i \geq i_0. \tag{5.37}$$

Subtraindo ((5.36)) de ((5.37)) eliminamos o termo não homogêneo

$$(a_{i+2} - a_{i+1}) = c{\cdot}(a_{i+1} - a_i),\ i \geq i_0. \tag{5.38}$$

Defina a sequência (b_i) como

$$b_i = (a_{i+1} - a_i),\ i \geq i_0. \tag{5.39}$$

Segue que (5.38) é reescrita como

$$b_{i+1} = c{\cdot}b_i,\ i \geq i_0$$

que é uma progressão geométrica de razão c e valor inicial b_{i_0} cuja solução é

$$b_i = c^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0. \tag{5.40}$$

Note agora que (5.35) implica que para $i \geq i_0$ vale que $a_i \in [c, c+1)$. Logo, do resultado anterior e de (5.39) a sequência (b_i) é limitada. Uma progressão geométrica somente é limitada quando o módulo da sua razão é menor ou igual a 1 ou seu termo inicial é zero. Isto é, temos duas possibilidades: i) $\mid c \mid \leq 1$, como $c \leq -1$ é um inteiro temos $c = -1$ e ii) $b_{i_0} = 0$.

i) Colocando $c = -1$ em (5.40) segue

$$b_i = (-1)^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0. \tag{5.41}$$

Substituindo o resultado anterior em (5.39) temos

$$a_{i+1} = a_i + (-1)^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0. \tag{5.42}$$

Trocando i por $i+1$ na equação anterior

$$a_{i+2} = a_{i+1} - (-1)^{i-i_0} b_{i_0},\ i \geq i_0. \tag{5.43}$$

Substituindo a_{i+1} de (5.42) em (5.43) chegamos a $a_{i+2} = a_i$, $\forall i \geq i_0$, como queríamos provar.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

ii) Colocando $b_{i_0} = 0$ em (5.40) encontramos que $b_i = 0,\ i \geq i_0$. Voltando com este resultado em (5.39) temos $a_{i+1} = a_i = a_{i_0},\ i \geq i_0$. Logo, a equação (5.36) se transforma em

$$a_{i_0} = c{\cdot}a_{i_0} - c^2$$

onde encontramos que

$$a_{i_0} = \frac{c^2}{c-1}.$$

Isto é, $a_{i+2} = a_i = a_{i_0} = \frac{c^2}{c-1},\ \forall i \geq i_0$, como queríamos provar.

Exemplos: Sequências que obedecem (5.31) para diferentes valores iniciais:

$$(-3,1; -3,6; -1,6; -0,8; -0,2; -0,8; -0,2; \cdots),$$

$$(5,7; 3,5; 1,5; 0,5; 0; 0; \cdots).$$

5.5 Máximo e Mínimo numa Subsequência. P1 da IMO 2007

Problema: Sejam dados os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$. Para cada i $(1 \leq i \leq n)$ defina

$$d_i = max\{a_j : 1{\leq}j{\leq}i\} - min\{a_j : i{\leq}j{\leq}n\} \tag{5.44}$$

e seja

$$d = max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}. \tag{5.45}$$

(a) Prove que, para quaisquer números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \tag{5.46}$$

(b) Mostre que existem números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ tais que vale a igualdade em (5.46).

A IMO 2007 foi realizada na cidade de Hanói, Vietnã [16]. O problema acima foi proposto pela delegação da Nova Zelândia [27].

5.5.1 Exemplo

Antes de apresentar a solução geral podemos esclarecer a notação estudando um exemplo.

Sejam $n = 5$ e $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (3, 7, 4, 2, 9)$. Verifique usando (5.44) e (5.45) que

$$d_1 = max\{a_1\} - min\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = 3 - 2 = 1,$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

$$d_2 = max\{a_1, a_2\} - min\{a_2, a_3, a_4, a_5\} = 7 - 2 = 5,$$

$$d_3 = max\{a_1, a_2, a_3\} - min\{a_3, a_4, a_5\} = 7 - 2 = 5,$$

$$d_4 = max\{a_1, a_2, a_3, a_4\} - min\{a_4, a_5\} = 7 - 2 = 5,$$

$$d_5 = max\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} - min\{a_5\} = 9 - 9 = 0,$$

$$d = max\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} = 5.$$

Sejam $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Temos que vale a desigualdade no item (a) do problema:

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = max\{2, 5, 1, 2, 4\} = 5 > \frac{5}{2}.$$

Sejam $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 9)$.

Temos que vale a igualdade do item (b) do problema:

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = max\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\} = \frac{5}{2}.$$

5.5.2 Resolução

Considere conhecidos os subíndices $1 \leq p \leq q \leq r \leq n$ tais que $d = d_q$ e, olhando para (5.44) e (5.45), escrevemos

$$a_p = max\{a_j : 1 \leq j \leq q\},$$

$$a_r = min\{a_j : q \leq j \leq n\},$$

$$d = a_p - a_r.$$

Isto é, a sequência $a_1, \cdots, a_p, \cdots, a_q, \cdots, a_r, \cdots, a_n$ é transformada em duas: $a_1, \cdots, a_p, \cdots, a_q$ e $a_q, \cdots, a_r, \cdots, a_n$. O subíndice q representa a posição de um dos máximos da sequência $(d_i)_1^n$. O subíndice p representa a posição de um dos máximos da sequência $(a_j)_1^q$ e o subíndice r representa a posição de um dos mínimos da sequência $(a_j)_q^n$. Os subíndices podem não ser únicos. No exemplo visto o valor de q podia ser tomado como 2, 3 ou 4.

Precisamos estudar o conjunto $D = \{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Como estamos supondo conhecidos p, q e r podemos focar em somente dois elementos do conjunto anterior: $|x_p - a_p|$ e $|x_r - a_r|$. Notamos que

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) = (a_p - a_r) + (x_r - x_p) \geq a_p - a_r = d.$$

Para escrever a desigualdade anterior usamos que $x_r - x_p \geq 0$, pois $r \geq p$ e a sequência (x_i) é não decrescente. Logo

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) \geq d.$$

Segue que $(a_p - x_p) \geq \frac{d}{2}$ ou $(x_r - a_r) \geq \frac{d}{2}$ e

$$max\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \geq \frac{d}{2}.$$

Usando o módulo dos dois elementos vale que

$$max\{| a_p - x_p |, | x_r - a_r |\} \geq max\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \geq \frac{d}{2}.$$

O que equivale a

$$max\{| x_p - a_p |, | x_r - a_r |\} \geq \frac{d}{2}.$$

No próximo passo consideramos todos os elementos do conjunto D:

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq max\{| x_p - a_p |, | x_r - a_r |\} \geq \frac{d}{2}.$$

Com isto concluímos a prova do item (a), isto é,

$$max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}.$$

Para resolver o item (b) vamos definir as sequências (M_i) e (m_i) para todo $1 \leq i \leq n$

$$M_i = max\{a_j : 1 \leq j \leq i\},$$

$$m_i = min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

De (5.44) verificamos que $d_i = M_i - m_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Adicionalmente, como o elemento a_i aparece nos dois conjuntos anteriores temos que

$$m_i \leq a_i \leq M_i \tag{5.47}$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Vamos mostrar que a sequência (x_i) definida como

$$x_i = \frac{M_i + m_i}{2} \tag{5.48}$$

para todo $1 \leq i \leq n$, satisfaz as condições do item (b) do problema.

Notamos primeiro que as sequências (M_i) e (m_i) são não decrescentes

$$M_i = max\{a_1, \cdots, a_i\} \leq max\{a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}\} = M_{i+1},$$

$$m_i = min\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n\} \leq min\{a_{i+1}, \cdots, a_n\} = m_{i+1}.$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Logo, a sequência (x_i), dada por (5.48), também é não decrescente, como requerido pelo problema.

Segundo, multiplicando (5.47) por -1 temos

$$-M_i \leq -a_i \leq -m_i.$$

Somando x_i na desigualdade anterior segue que

$$x_i - M_i \leq x_i - a_i \leq x_i - m_i.$$

Usando (5.48) nos extremos da desigualdade encontramos

$$\frac{M_i + m_i}{2} - M_i \leq x_i - a_i \leq \frac{M_i + m_i}{2} - m_i,$$

$$\frac{-M_i + m_i}{2} \leq x_i - a_i \leq \frac{M_i - m_i}{2}.$$

Lembrando que $d_i = M_i - m_i$ escrevemos

$$\frac{-d_i}{2} \leq x_i - a_i \leq \frac{d_i}{2}.$$

Segue que para todo $1 \leq i \leq n$

$$| x_i - a_i | \leq \frac{d_i}{2}.$$

Com isto

$$max\,\{|x_i{-}a_i| : 1{\leq}i{\leq}n\} \leq max\left\{\frac{d_i}{2} : 1{\leq}i{\leq}n\right\},$$

$$max\,\{|x_i{-}a_i| : 1{\leq}i{\leq}n\} \leq \frac{d}{2}.$$

Esta última desigualdade, em conjunto com o provado no item (a), mostra que

$$max\,\{|x_i{-}a_i| : 1{\leq}i{\leq}n\} = \frac{d}{2}.$$

5.6 Subsequências de uma Progressão Aritmética. P3 da IMO 2009

Problema: Seja $s_1, s_2, s_3, ...$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que as subsequências $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ e $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ são ambas progressões aritméticas. Demonstre que a sequência $s_1, s_2, s_3, ...$ também é uma progressão aritmética.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Bremen, Alemanha [16]. O problema acima foi proposto pela delegação dos Estados Unidos [28].

5.6.1 Considerações iniciais

Antes de apresentar o problema vejamos um exemplo para esclarecer a notação.

Considere a sequência $(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \cdots)$ dada pela fórmula $s_n = 1 + 2n$. Isto é, $(s_n) = (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \cdots)$. A sequência (s_n) é uma PA de razão $d = 2$ $(d_n = s_{n+1} - s_n = 2 = cte)$ e valor inicial 3 $(s_1 = 3)$.

Vamos construir agora uma nova sequência considerando somente alguns termos da anterior, em outras palavras, uma subsequência. Seja $(s_{s_n}) = (s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \cdots) = (s_3, s_5, s_7, \cdots) = (7, 11, 15, \cdots)$. A sequência (s_{s_n}) é uma PA de razão $D = 4$ $(D_n = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = 4)$ e valor inicial 7 $(s_{s_1} = 7)$.

Adicionalmente, seja outra subsequência
$(s_{s_n+1}) = (s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \cdots) = (s_4, s_6, s_8, \cdots) = (9, 13, 17, \cdots)$. A sequência (s_{s_n+1}) é uma PA de razão $E = 4$ $(E_n = s_{s_{n+1}+1} - s_{s_n+1} = 4)$ e valor inicial 9 $(s_{s_1+1} = 9)$.

Podemos ainda construir uma terceira subsequência formada pela diferença das duas subsequências anteriores. Seja

$$(d_{s_n}) = (s_{s_n+1} - s_{s_n}) = (s_{s_1+1} - s_{s_1}, s_{s_2+1} - s_{s_2}, s_{s_3+1} - s_{s_3}, \cdots) =$$

$$= (s_4 - s_3, s_6 - s_5, s_8 - s_7, \cdots) = (2, 2, 2, \cdots).$$

Vimos um exemplo em que a sequência de partida é uma PA, as duas primeiras subsequências definidas também são PAs e a última subsequência é constante. Esse resultado pode ser generalizado na proposição a seguir.

Proposição 6 *Se* $(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \cdots)$ *é uma progressão aritmética dada pela fórmula* $s_n = A + (n-1)d$, *onde* s_n, A *(valor inicial) e* d *(razão) são números reais e* n *é um número natural, então as subsequências* $(s_{s_n}) = (s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...)$ *e* $(s_{s_n+1}) = (s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...)$ *também são progressões aritméticas.*

Demonstração: Podemos encontrar uma fórmula para s_{s_n} trocando n em $s_n = A + (n-1)d$ por $s_n = A + (n-1)d$. Isto é,

$$s_{s_n} = A + (A + (n-1)d - 1)d,$$

$$s_{s_n} = A + (A-1)d + (n-1)d^2,$$

$$s_{s_n} = B + (n-1)D.$$

Logo, a subsequência (s_{s_n}) é uma Progressão Aritmética de valor inicial $B = A+(A-1)d$ e razão $D = d^2$.

Agora vamos encontrar uma fórmula para s_{s_n+1} trocando n em $s_n = A + (n-1)d$ por $s_n + 1 = A + (n-1)d + 1$. Isto é,

$$s_{s_n+1} = A + (A + (n-1)d + 1 - 1)d,$$

$$s_{s_n+1} = A\,(d+1) + (n-1)d^2,$$

$$s_{s_n+1} = C + (n-1)E.$$

Logo, a subsequência (s_{s_n+1}) é uma Progressão Aritmética de valor inicial $C = A\,(d+1)$ e razão $E = d^2$. □

5.6.2 Resolução

Como $s_1, s_2, s_3, ...$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos vale que $0 < s_1 < s_2 < s_3 < ....$ Temos também que $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, ...$ e $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, ...$ são ambas progressões aritméticas, logo existem inteiros B, C, D e E tais que

$$s_{s_n} = B + (n-1)D, \tag{5.49}$$

$$s_{s_n+1} = C + (n-1)E. \tag{5.50}$$

Notamos que para todo n natural vale que

$$s_{s_n} < s_{s_n+1} \leq s_{s_{n+1}} \tag{5.51}$$

pois $s_n < s_{n+1}$ e $s_n + 1 \leq s_{n+1}$. Substituindo ((5.49)) e ((5.50)) em ((5.51)) encontramos

$$B + (n-1)D < C + (n-1)E \leq B + nD. \tag{5.52}$$

Subtraindo $B + (n-1)D$ na desigualdade anterior chegamos a

$$0 < C - B + (n-1)(E - D) \leq D. \tag{5.53}$$

A desigualdade (5.53) deve valer para todo n natural. No caso em que $E < D$ existirá um valor de n a partir do qual a primeira parte da desigualdade não será verdadeira, no caso $E > D$ existirá um valor de n a partir do qual a segunda parte não será verdadeira. Com isto concluímos que $E = D$, isto é, a razão nas duas subsequências (PA) deve ser a mesma.

Logo, a desigualdade (5.53) pode ser reescrita como

$$0 < C - B \leq D \tag{5.54}$$

e a igualdade (5.50) como

$$s_{s_n+1} = C + (n-1)D. \tag{5.55}$$

Seja $d_n = s_{n+1} - s_n$. Usando (5.55) e (5.49) temos que

$$d_{s_n} = s_{s_n+1} - s_{s_n} = C - B. \tag{5.56}$$

Para demonstrar que a sequência $s_1, s_2, s_3, ...$ é uma progressão aritmética devemos provar que d_n não depende de n. Isto é, $d_n = d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A razão das subsequências pode ser escrita como

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n}.$$

Alternativamente podemos escrever a razão D como uma soma telescópica

$$D = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{n+1}-1},$$

$$D = (s_{s_n+1} - s_{s_n}) + (s_{s_n+2} - s_{s_n+1}) + \cdots + \left(s_{s_{n+1}} - s_{s_{n+1}-1}\right).$$

Como a sequência (s_n) é de inteiros positivos e estritamente crescente teremos que $d_n \geq 1$ é um inteiro e $d_n < D$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, a sequência de inteiros positivos (d_n) é limitada inferiormente e superiormente.

Logo existem m e M tais que $m = min\,\{d_n\}$ e $M = max\,\{d_n\}$.

Primeiro, consideramos a soma de m termos da sequência (d_n), todos menores ou iguais a M:

$$d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \leq mM, \tag{5.57}$$

$$(s_{s_n+1} - s_{s_n}) + (s_{s_n+2} - s_{s_n+1}) + \cdots + (s_{s_n+m} - s_{s_n+m-1}) = s_{s_n+m} - s_{s_n} \leq mM.$$

Agora escolhemos n de tal forma que $d_n = m$. Isto é, $m = s_{n+1} - s_n$ para algum n, segue que

$$s_{s_n+m} - s_{s_n} = s_{s_n+s_{n+1}-s_n} - s_{s_n} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D \leq mM. \tag{5.58}$$

A igualdade em $D \leq mM$ vale se, e somente se, todas as parcelas em (5.57) são iguais a M.

Segundo, consideramos a soma de M termos da sequência (d_n), todos maiores ou iguais a m:

$$d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+M-1} \geq mM, \tag{5.59}$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

$$(s_{s_n+1} - s_{s_n}) + (s_{s_n+2} - s_{s_n+1}) + \cdots + (s_{s_n+M} - s_{s_n+M-1}) = s_{s_n+M} - s_{s_n} \geq mM.$$

Agora escolhemos n de tal forma que $d_n = M$. Isto é, $M = s_{n+1} - s_n$ para algum n, segue que

$$s_{s_n+M} - s_{s_n} = s_{s_n+s_{n+1}-s_n} - s_{s_n} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D \geq mM. \tag{5.60}$$

A igualdade em $D \geq mM$ vale se, e somente se, todas as parcelas em (5.59) são iguais a m.

As desigualdades em (5.58) e (5.60) implicam que $D = mM$ e que

$$\textit{Se}\; d_n = m,\; \textit{então}\; d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_n+m-1} = M,$$

$$\textit{Se}\; d_n = M,\; \textit{então}\; d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_n+M-1} = m.$$

Resumindo,

$$\textit{Se}\; d_n = m,\; \textit{então}\; d_{s_n} = M,$$

$$\textit{Se}\; d_n = M,\; \textit{então}\; d_{s_n} = m.$$

Mas a equação (5.56) diz que $d_{s_n} = C - B$ é constante (não depende de n). Isto é, $M = m$, o mínimo e o máximo do conjunto $\{d_n = s_{n+1} - s_n\}$ é o mesmo. Em outras palavras, a sequência (s_n) é uma progressão aritmética, como queríamos provar.

5.7 Divisibilidade e Sistema de Equações com Inteiros. P1 da IMO 2011

Problema: Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A. Encontre todos os conjuntos A de quatro inteiros positivos distintos para os quais n_A alcança o seu valor máximo.

A IMO 2011 foi realizada na cidade de Amsterdã, Holanda [16].

5.7.1 Resolução

Primeiramente suponha que os elementos do conjunto A são inteiros. Note que $a_i + a_j$ divide $s_A = a_i + a_j + a_k + a_l$ se, e somente se, $a_i + a_j$ divide $a_k + a_l = s_A - (a_i + a_j)$. Em outras palavras, a soma de dois termos, $a_i + a_j$, do conjunto A divide a soma dos quatro termos do mesmo conjunto se, e somente se, a soma dos termos, $a_i + a_j$, divide a soma dos outros dois termos, $a_k + a_l$.

Segundo, como os quatro inteiros são positivos e distintos podemos assumir, sem perda

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

de generalidade, que

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4. \tag{5.61}$$

Somando a_1, a_2, a_3 e a_4 na desigualdade anterior encontramos respectivamente:

$$a_1 < 2a_1 < a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4, \tag{5.62}$$

$$a_2 < a_1 + a_2 < 2a_2 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4, \tag{5.63}$$

$$a_3 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < 2a_3 < a_3 + a_4, \tag{5.64}$$

$$a_4 < a_1 + a_4 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < 2a_4. \tag{5.65}$$

Juntando parte das desigualdades (5.62) e (5.65) encontramos

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4. \tag{5.66}$$

E das desigualdades (5.62), (5.64) e (5.63) encontramos

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4. \tag{5.67}$$

As duas desigualdades anteriores, (5.66) e (5.67), ordenam parcialmente as somas de dois elementos do conjunto A. As duas maiores somas são $a_3 + a_4$ e $a_2 + a_4$ nessa ordem e as duas menores somas são $a_1 + a_2$ e $a_1 + a_3$ nessa ordem. Nada pode ser afirmado a priori (maior, menor ou igual) sobre as somas $a_1 + a_4$ e $a_2 + a_3$.

Terceiro, o conjunto de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, é

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

Com isto, os valores possíveis para n_A variam de 0 até 6.

Quarto, fazendo $i = 3$ e $j = 4$ temos que $a_3 + a_4$ não divide $a_1 + a_2$ pois $a_1 + a_2 < a_3 + a_4$ e fazendo $i = 2$ e $j = 4$ temos que $a_2 + a_4$ não divide $a_1 + a_3$ pois $a_1 + a_3 < a_2 + a_4$ logo $a_3 + a_4$ e $a_2 + a_4$ não dividem s_A e $n_A \leq 4$.

Quinto, nos casos em que $a_1 + a_4 < a_2 + a_3$ e $a_1 + a_4 > a_2 + a_3$ temos que $n_A \leq 3$, pois a maior destas somas não divide a menor. A única chance para $n_A = 4$ é que $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ pois neste caso $a_1 + a_4$ divide $a_2 + a_3$ e $a_2 + a_3$ divide $a_1 + a_4$.

Sexto, suponha que $n_A = 4$. Isto é, $a_1 + a_2$ divide $a_3 + a_4$, $a_1 + a_3$ divide $a_2 + a_4$ e $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$. Como $a_1 + a_2$ divide $a_3 + a_4$ deve existir um inteiro positivo m tal que

$$a_3 + a_4 = m(a_1 + a_2).$$

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Adicionalmente, como $a_1 + a_3$ divide $a_2 + a_4$ deve existir um inteiro positivo n tal que

$$a_2 + a_4 = n(a_1 + a_3).$$

Segue das desigualdades (5.66) e do fato dos elementos do conjunto A serem inteiros positivos distintos que $m > n \geq 2$.

Resumindo, devemos resolver o sistema de equações a seguir:

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= a_2 + a_3, \\ m(a_1 + a_2) &= a_3 + a_4, \\ n(a_1 + a_3) &= a_2 + a_4. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Somando a primeira e terceira equação do sistema temos

$$n(a_1 + a_3) = -a_1 + 2a_2 + a_3.$$

No caso em que $n \geq 3$ vale que $n(a_1 + a_3) > 3a_3 > 2a_2 + a_3 > -a_1 + 2a_2 + a_3$, uma contradição com a equação anterior. Logo $n = 2$ e rescrevemos (5.68) como:

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= a_2 + a_3, \\ m(a_1 + a_2) &= a_3 + a_4,, \\ 2(a_1 + a_3) &= a_2 + a_4, \end{aligned} \tag{5.69}$$

e $m > 2$.

No próximo passo eliminamos a_4 somando a primeira e segunda e a primeira e terceira equações anteriores:

$$\begin{aligned} (1 + m)a_1 &= (1 - m)a_2 + 2a_3, \\ 3a_1 + a_3 &= 2a_2. \end{aligned} \tag{5.70}$$

A seguir eliminamos a_3 somando à primeira equação duas vezes a segunda:

$$(7 + m)a_1 = (5 - m)a_2. \tag{5.71}$$

O lado esquerdo da equação anterior é um inteiro positivo, assim como a_2, segue $m < 5$. Como já tínhamos que $m > 2$ e m é inteiro positivo somente restam duas possibilidades: $m = 3$ ou $m = 4$.

- Caso $m = 3$. Voltando em (5.71) temos $a_2 = 5a_1$ e colocando esse resultado na segunda equação de (5.70) encontramos $a_3 = 7a_1$ e finalmente substituindo as duas equações anteriores na primeira equação de (5.69) chegamos a $a_4 = 11a_1$. Chamando $a_1 = d$ concluímos que $A = \{d, 5d, 7d, 11d\}$.

- Caso $m = 4$. Voltando em (5.71) temos $a_2 = 11a_1$e colocando esse resultado na segunda equação de (5.70) encontramos $a_3 = 19a_1$ e finalmente substituindo as duas equações anteriores na primeira equação de (5.69) chegamos a $a_4 = 29a_1$. Chamando $a_1 = d$ concluímos que $A = \{d, 11d, 19d, 29d\}$.

Em resumo, n_A alcança o seu valor máximo, $n_A = 4$, quando $A = \{d, 5d, 7d, 11d\}$ ou $A = \{d, 11d, 19d, 29d\}$ para $d \in \mathbb{Z}$ e $d \geq 1$.

LÓPEZ LINARES, J. **Soluções detalhadas para 20 problemas da Olimpíada Internacional de Matemática.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020. 81 p. ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book). Disponível em: https://doi.org/10.11606/9786587023045.

Capítulo 6

Referências

[1] TURNER, Nura D. A Historical Sketch of Olympiads: U.S.A. and International The College Mathematics Journal, Vol. 16, No. 5 (Nov., 1985), pp. 330-335 1.1

[2] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. *In*: WIKIPÉDIA. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/International_Mathematical_Olympiad. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1, 1.1

[3] SUCUPIRA, Gicele. Será que as meninas e mulheres não gostam de Matemática? Reflexões sobre gênero, educação e ciência a partir de uma etnografia sobre as Olimpíadas de Matemática em Santa Catarina. Fazendo Gênero, v. 8 - Corpo, Violência e Poder. Florianópolis: UFSC, 2008. Disponível em: http://www1.fisica.org.br/gt-genero/images/arquivos/Apresentacoes_e_Textos/sucupira.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[4] PROCEDURE TO BE FOLLOWED BY A NEW COUNTRY WISHING TO TAKE PART IN THE INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Disponível em: http://www.imo-official.org/documents/InvitationIMO.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[5] GENERAL REGULATIONS. Disponível em: http://www.imo-official.org/documents/RegulationsIMO.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[6] ANNUAL REGULATIONS FOR IMO 2020. Disponível em: http://www.imo-official.org/documents/AnnualRegulationsIMO.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020.

[7] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Brasil. Disponível em: http://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=BRA&column=name&order=desc. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[8] CARLOS GUSTAVO MOREIRA. IMPA. Disponível em: https://impa.br/page-pessoas/carlos-gustavo-t-de-a-moreira/. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[9] ARTUR AVILA. *In*: WIKIPÉDIA. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Artur_Avila. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[10] FIELDS MEDAL. Disponível em: https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[11] COMPETIÇÕES INTERNACIONAIS. Disponível em: https://www.obm.org.br/competicoes/internacionais/. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[12] SELEÇÃO DE EQUIPES E TREINAMENTOS PARA COMPETIÇÕES INTERNACIONAIS. Disponível em: https://www.obm.org.br/competicoes/treinamentos-para-competicoes/. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.1

[13] LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 23 mai. 2020. 1.1

[14] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 23 mai. 2020. 1.2

[15] LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 127-138, jul. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 23 mai. 2020. 1.2

[16] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. Problems. 2019. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 30 jun. 2020. 1.2

[17] DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium:** a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7

[18] MORGADO, A. C.; P. C. P. CARVALHO, Matemática Discreta, Coleção ProfMat, SBM, Segunda Edição, 2015. 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 5.3

[19] DESIGUALDADES – AULA 6 – DESIGUALDADE DAS MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA (MA-MG). [S. l.: s. n.], 2015. 1 vídeo (19 min 43 seg). Publicado pelo canal Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. Disponível em: https://youtu.be/da1prIpZniQ. Acesso em: 30 jun. 2020. 2.4.1

[20] NETO, A. C. M., Revista Eureka! N. 5, 1999, página 35. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka5.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 2.4.1

[21] DESIGUALDADE DO REARRANJO. Geogebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ef43vxtk. Acesso em: 30 jun. 2020. 2.6.1

[22] CAMPOS, D. A., Algoritmos de Aproximações de Raizes Quadradas, Dissertação (Mestrado)- Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. São Paulo, p. 25, 2014. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/6699/2/Danilo%20Albuquerque%20de%20Ca Acesso em: 30 jun. 2020. 2.6.1

[23] BASEL PROBLEM. *In*: WIKIPÉDIA. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem. Acesso em: 30 jun. 2020. 3.2.1

[24] SÉRIE-P -V120- CÁLCULO II FZEA USP. [S. l.: s. n.], 2016. 1 vídeo (10 min 44 seg). Publicado pelo canal Juan López Linares. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=jKES61YWwwg. Acesso em: 30 jun. 2020. 5.2.1

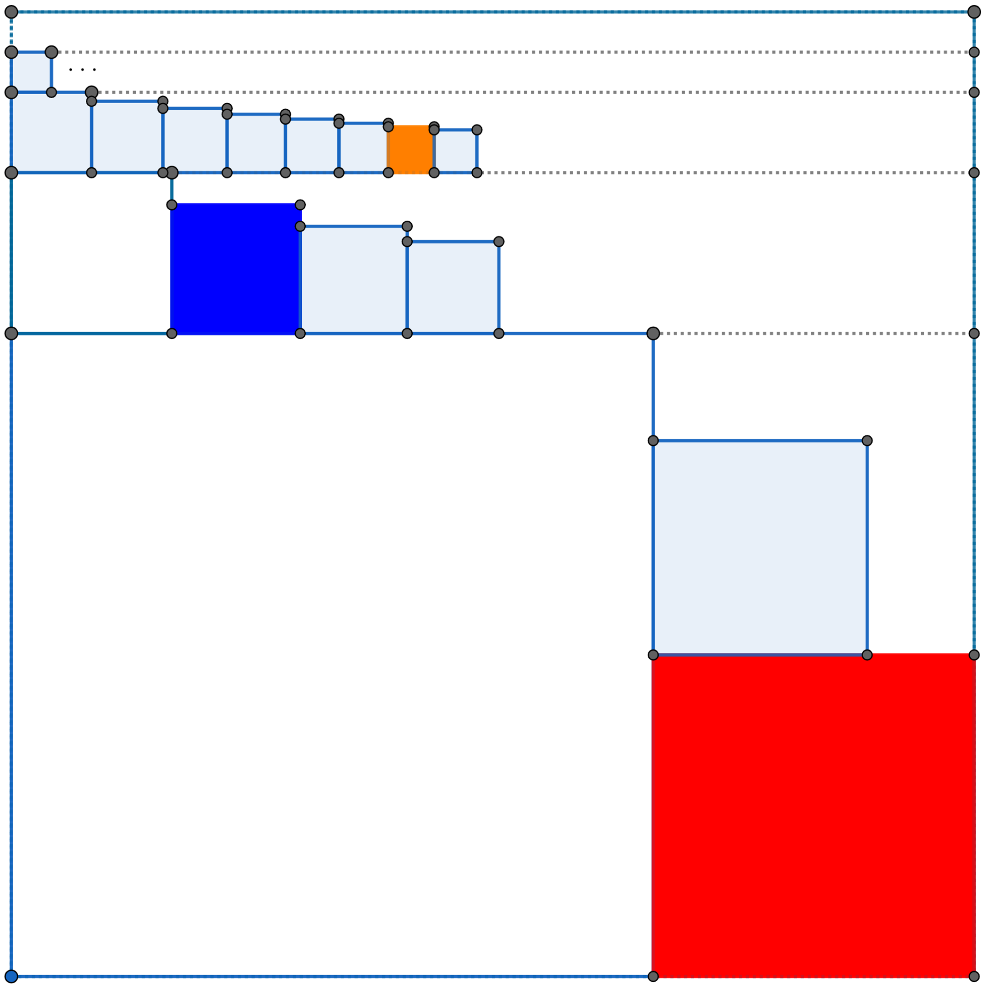
[25] RIEMANN ZETA FUNCTION. *In*: WIKIPÉDIA. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function. Acesso em: 30 jun. 2020. 5.2.1

[26] THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2006. **Shortlisted problems with solutions.** Slovenia: [*s. n.*], 2006. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems/IMO2006SL.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 5.2.1

[27] THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2007. **Shortlisted problems with solutions.** Vietnã: [*s. n.*], 2007. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems/IMO2007SL.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 5.4

[28] THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2009. **Shortlisted problems with solutions.** Germany: [*s. n.*], 2009. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems/IMO2009SL.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020. 5.5

5.6



ISBN 978-65-87023-04-5 (e-book)